Riv. Mat. Univ. Parma 7 (1956), 255-269

VITTORIO E. BONONCINI (*)

Alcuni problemi di massimo per le serie multiple di Fourier. (**)

1. – Introduzione.

In un suo lavoro SZÁSZ (1) risolve alcuni problemi di massimo nella teoria delle serie semplici di FOURIER, indi fa diverse applicazioni dei risultati ottenuti e infine estende questi ultimi alle serie generalizzate di FOURIER delle funzioni quasi periodiche e all'integrale di FOURIER.

Nella presente Nota vengono estesi alle serie doppie di FOURIER alcuni dei risultati stabiliti da SZÁSZ nel lavoro sopra ricordato. La limitazione alle serie doppie di FOURIER è fatta unicamente per semplicità di esposizione, ma i ragionamenti svolti e i risultati ottenuti si possono estendere, senza difficoltà, alle serie r-uple di FOURIER con $r > 2$. L'argomento in oggetto si può riassumere come segue.

Sia $f(x, y)$ una funzione reale o complessa delle variabili reali x e y, periodica di periodo 2π rispetto ad x e y, limitata e sommabile nel quadrato $Q \equiv (-\pi \leqslant x \leqslant \pi, \quad -\pi \leqslant y \leqslant \pi)$. Si può sempre supporre, senza ledere la generalità, che in Q sia

$$|f(x, y)| \leqslant 1 . \tag{1}$$

La serie doppia di FOURIER della $f(x, y)$ si può scrivere nella forma

$$f(x, y) \sim \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_r \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_s \gamma_{r,s} \cdot e^{i\cdot(rx+sy)},$$

(*) Indirizzo: Istituto Matematico S. PINCHERLE, Università, Bologna, Italia.

(**) Ricevuto il 15-X-1956.

(1) O. SZÁSZ, *Some extremum problems in the theory of Fourier series*, Amer. J. Math. **61** (1939), 165-177.

ove

$$(2)\qquad \gamma_{r,s} = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x,\ y)\cdot e^{-i\cdot(rx+sy)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{1}{4}\left(a_{r,s} - d_{r,s} - i\cdot(b_{r,s} + c_{r,s})\right)$$

$$(r,\ s = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots)\ (^2).$$

Assegnati ad arbitrio $(m+1)(n+1)$ numeri reali o complessi $\mu_{r,s}$ $(r = 0, 1, \ldots, m;\ s = 0, 1, \ldots, n)$ e due interi h e k, nel n. **2** si determina il massimo del valore assoluto della somma

$$S_{m,n;h,k} = \sum_{0}^{m}{}_r \sum_{0}^{n}{}_s\, \mu_{r,s}\cdot\gamma_{r+h,s+k},$$

sotto la condizione (1), e la relativa funzione estremante, indi vengono considerati alcuni casi particolari. Nelle ipotesi che la $f(x,\ y)$ sia reale, che i numeri $\mu_{r,s}$ verifichino determinate condizioni e che m e n siano pari, nel n. **3** si determinano i massimi di (³)

$$|\,\Re(S_{m,n;h,k})\,|, \qquad |\,\Im(S_{m,n;h,k})\,|,$$

e nel n. **4** i massimi dei valori assoluti della somma

$$\sum_{0}^{m}{}_r \sum_{0}^{n}{}_s\, \mu_{r,s}\cdot a_{r+h,s+k}$$

e delle altre somme analoghe costruite con i coefficienti $b_{r,s}$, $c_{r,s}$, $d_{r,s}$, nonchè le relative funzioni estremanti. Infine nel n. **5** vengono fatte alcune applicazioni dei risultati ottenuti nel n. **4**.

2. – In virtù della (2) si può scrivere

$$S_{m,n;h,k} = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x,\ y)\cdot\sum_{0}^{m}{}_r \sum_{0}^{n}{}_s\, \mu_{r,s}\cdot e^{-i\cdot[(r+h)x+(s+k)y]}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

(²) I numeri $a_{r,s}$, $b_{r,s}$, $c_{r,s}$, $d_{r,s}$ sono i coefficienti di FOURIER della $f(x,\ y)$. Cfr. ad esempio: L. TONELLI, **Serie trigonometriche**, N. Zanichelli, Bologna 1928, pag. 436.

(³) Indicando con $\Re(a)$ e $\Im(a)$ rispettivamente la parte reale ed il coefficiente della parte immaginaria del numero a.

e da questa, tenuto conto della (1), si trae

$$(3) \qquad |S_{m,n;h,k}| \leqslant \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Big|\sum_0^m{}_r \sum_0^n{}_s \mu_{r,s}\cdot e^{-i\cdot(rx+sy)}\Big|\,dx\,dy,$$

e l'uguaglianza sussiste se

$$f(x, y)\cdot e^{-i\cdot(hx+ky)}\cdot\sum_0^m{}_r \sum_0^n{}_s \mu_{r,s}\cdot e^{-i\cdot(rx+sy)} = \tau\cdot\Big|\sum_0^m{}_r \sum_0^n{}_s \mu_{r,s}\cdot e^{-i\cdot(rx+sy)}\Big|,$$

essendo τ un qualsivoglia numero complesso di modulo 1. Segue

$$f(x, y) = \tau\cdot e^{i\cdot(hx+ky)}\Big[\Big(\sum_0^m{}_r \sum_0^n{}_s \bar{\mu}_{r,s}\cdot e^{-i\cdot(rx+sy)}\Big)\Big/\Big(\sum_0^m{}_r \sum_0^n{}_s \mu_{r,s}\cdot e^{-i\cdot(rx+sy)}\Big)\Big]^{1/2},$$

ove $\bar{\mu}_{r,s}$ è il coniugato di $\mu_{r,s}$.

In particolare, se m ed n sono pari, ossia $m = 2p$ e $n = 2q$, e se le $\mu_{r,s}$ sono definite dalla identità

$$(4) \qquad \sum_0^{2p}{}_r \sum_0^{2q}{}_s \mu_{r,s}\cdot u^r\, v^s = \Big(\sum_0^{p}{}_r \sum_0^{q}{}_s \lambda_{r,s}\cdot u^r\, v^s\Big)^2$$

(ove le $\lambda_{r,s}$ sono $p\cdot q$ numeri reali o complessi scelti ad arbitrio), cioè

$$\mu_{r,s} = \begin{cases} \sum_0^r{}_h \sum_0^s{}_k \lambda_{h,s-k}\cdot\lambda_{r-h,k} & \text{per } r = 0, 1, \ldots, p; \quad s = 0, 1, \ldots, q \\ \sum_0^r{}_h \sum_0^{2q-s}{}_k \lambda_{h,q-k}\cdot\lambda_{r-h,s-q+k} & \text{per } r = 0, 1, \ldots, p; \quad s = q+1, \ldots, 2q \\ \sum_0^{2p-r}{}_h \sum_0^{s}{}_k \lambda_{r-p+h,s-k}\cdot\lambda_{p-h,k} & \text{per } r = p+1, \ldots, 2p; \quad s = 0, 1, \ldots, q \\ \sum_0^{2p-r}{}_h \sum_0^{2q-s}{}_k \lambda_{r-p+h,q-k}\cdot\lambda_{p-h,s-q+k} & \text{per } r = p+1, \ldots, 2p; \quad s = q+1, \ldots, 2q, \end{cases}$$

posto $u = e^{-ix}$, $v = e^{-iy}$, dalle (3) e (4) si ottiene

$$|S_{2p,2q;h,k}| \leqslant \sum_0^p{}_r \sum_0^q{}_s |\lambda_{r,s}|^2$$

e l'uguaglianza vale se

$$f(x,\ y) = e^{-i\theta}\cdot e^{i\cdot(hx+ky)}\cdot \left|\sum_0^p{}_r \sum_0^q{}_s \lambda_{r,s}\cdot e^{-i\cdot(rx+sy)}\right|^2 \Big/ \left(\sum_0^p{}_r \sum_0^q{}_s \lambda_{r,s} e^{-i\cdot(rx+sy)}\right)^2 =$$

$$= e^{-i\theta}\cdot e^{i\cdot(hx+ky)}\cdot\left(\sum_0^p{}_r \sum_0^q{}_s \overline{\lambda}_{r,s}\cdot e^{i\cdot(rx+sy)}\right)\Big/\left(\sum_0^p{}_r \sum_0^q{}_s \lambda_{r,s}\cdot e^{-i\cdot(rx+sy)}\right),$$

essendo θ un numero reale arbitrario e $\overline{\lambda}_{r,s}$ il coniugato di $\lambda_{r,s}$.

Se nella (3) in luogo di $\mu_{r,s}$ si pone $\mu_{r,s}\cdot\xi^r\eta^s$ $\quad(|\xi| = |\eta| = 1)$, risulta:

$$(5) \qquad \left|\sum_0^m{}_r \sum_0^n{}_s \mu_{r,s}\cdot\xi^r\eta^s\gamma_{r+h,s+k}\right| \leqslant \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_0^m{}_r \sum_0^n{}_s \mu_{r,s}\cdot e^{-i\cdot(rx+sy)}\right| dx\, dy,$$

l'uguaglianza valendo se

$$f(x,\ y) = e^{-i\theta}\, e^{i\cdot(hx+ky)}\left[\left(\sum_0^m{}_r \sum_0^n{}_s \overline{\mu}_{r,s}\cdot\xi^{-r}\eta^{-s}\cdot e^{i\cdot(rx+sy)}\right)\Big/\left(\sum_0^m{}_r \sum_0^n{}_s \mu_{r,s}\cdot\xi^r\eta^s\cdot e^{-i(rx+sy)}\right)\right]^{1/2}.$$

Se, in particolare, le $\mu_{r,s}$ sono definite dalle (4), la (5) assume la forma

$$(6) \qquad \left|\sum_0^{2p}{}_r \sum_0^{2q}{}_s \mu_{r,s}\cdot\xi^r\eta^s\cdot\gamma_{r+h,s+k}\right| \leqslant \sum_0^p{}_r \sum_0^q{}_s |\lambda_{r,s}|^2,$$

laddove l'uguaglianza sussiste se

$$f(x,\ y) = e^{-i\theta}\, e^{i\cdot[(h+p)x+(k+q)y]}\cdot\xi^{-p}\eta^{-q}\cdot$$

$$\cdot\left(\sum_0^p{}_r \sum_0^q{}_s \overline{\lambda}_{r,s}\overline{\xi}^r\overline{\eta}^s\cdot e^{i\cdot(rx+sy)}\right)\Big/\left(\sum_0^p{}_r \sum_0^q{}_s \lambda_{r,s}\xi^{r-p}\eta^{s-q}\cdot e^{i[(p-r)x+(q-s)y]}\right).$$

Casi particolari.

a) $\lambda_{r,s} = 1 \qquad (r = 0,\ 1,\ \ldots,\ p;\ s = 0,\ 1,\ \ldots,\ q).$

Dalla (6) si trae

$$\left|\sum_0^p{}_r \sum_0^q{}_s (r+1)(s+1)\cdot\xi^r\eta^s\cdot\gamma_{r+h,s+k} + \sum_0^p{}_r \sum_{q+1}^{2q}{}_s (r+1)(2q-s+1)\cdot\xi^r\eta^s\cdot\right.$$

$$\cdot\gamma_{r+h,s+k} + \sum_{p+1}^{2p}{}_r \sum_0^q{}_s (2p-r+1)(s+1)\cdot\xi^r\eta^s\cdot\gamma_{r+h,s+k} +$$

$$\left. + \sum_{p+1}^{2p}{}_r \sum_{q+1}^{2q}{}_s (2p-r+1)(2q-s+1)\cdot\xi^r\eta^s\cdot\gamma_{r+h,s+k}\right| \leqslant (p+1)(q+1)$$

e l'uguaglianza si ha se

$$f(x,\ y) = e^{-i\theta} \cdot e^{i \cdot [(h+p)x + (k+q)y]} \cdot \xi^{-p}\, \eta^{-q}.$$

b) $\lambda_{r,s} = \binom{p}{r}\binom{q}{s}$ $\quad (r = 0,\ 1,\ \ldots,\ p;\ s = 0,\ 1,\ \ldots,\ q).$

In tale caso si ha

$$\mu_{r,s} = \binom{2p}{r}\binom{2q}{s} \qquad (r = 0,\ 1,\ \ldots,\ 2p; \quad s = 0,\ 1,\ \ldots,\ 2q)$$

e dalla (6) discende

$$\left| \sum_0^{2p}{}_r \sum_0^{2q}{}_s \binom{2p}{r}\binom{2q}{s} \xi^r\, \eta^s \cdot \gamma_{r+h,\, s+k} \right| \leqslant \sum_0^{p}{}_r \sum_0^{q}{}_s \binom{p}{r}^2 \binom{q}{s}^2,$$

l'uguaglianza valendo per

$$f(x,\ y) = e^{-i\theta} \cdot e^{i \cdot [(h+p)x + (k+q)y]} \xi^{-p}\, \eta^{-q}.$$

Se di più è $\xi = \eta = 1$, risulta

$$\left| \sum_0^{2p}{}_r \sum_0^{2q}{}_s \binom{2p}{r}\binom{2q}{s} \cdot \gamma_{r+h,\, s+k} \right| \leqslant \sum_0^{p}{}_r \sum_0^{q}{}_s \binom{p}{r}^2 \binom{q}{s}^2$$

e l'uguaglianza sussiste se

$$f(x,\ y) = e^{-i\theta} \cdot e^{i \cdot [(h+p)x + (k+q)y]}.$$

3. – Nell'ipotesi che $f(x,\ y)$ sia reale, dalla (2) segue

$$\gamma_{-m,-n} = \overline{\gamma}_{m,n}, \qquad \gamma_{-m,n} = \overline{\gamma}_{m,-n} \qquad (\overline{\gamma} = \text{coniugato di } \gamma)$$

e dalla (4) si ricava

$$(7) \qquad S_{2p,2q;h,k} = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x,\ y) \cdot \sum_0^{2p}{}_r \sum_0^{2q}{}_s \mu_{r,s} \cdot e^{-i\cdot(r+h)x} e^{-i\cdot(s+k)y}\, dx\, dy =$$

$$= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x,\ y) e^{-ihx} e^{-iky} \Big(\sum_0^{p}{}_r \sum_0^{q}{}_s \lambda_{r,s} \cdot e^{-irx} e^{-isy} \Big)^2\, dx\, dy =$$

$$= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x,\ y) \cdot e^{-i(h+p)x} e^{-i(k+q)y} \Big(\sum_0^{p}{}_r \sum_0^{q}{}_s \lambda_{r,s} \cdot e^{i\cdot[(p/2)-r]x} \cdot e^{i\cdot[(q/2)-s]y} \Big)^2\, dx\, dy\,.$$

Se inoltre

$$\overline{\lambda}_{p-r,q-s} = \lambda_{r,s} \qquad (r = 0,\ 1,\ \ldots,\ p;\ s = 0,\ 1,\ \ldots,\ q),$$

risulta

$$(8) \qquad \sum_{0}^{p}{}_r \sum_{0}^{q}{}_s \lambda_{r,s} e^{i\cdot[(p/2)-r]x} e^{i\cdot[(q/2)-s]y} = \sum_{0}^{p}{}_r \sum_{0}^{q}{}_s \overline{\lambda}_{r,s} e^{-i\cdot[(p/2)-r]x} e^{-i\cdot[(q/2)-s]y},$$

onde la somma a primo membro è reale e la (7) dà

$$(9) \qquad S_{2p,2q;h,k} = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x,\ y)\cdot\left(\sum_{0}^{p}{}_r \sum_{0}^{q}{}_s \lambda_{r,s}\cdot e^{i\cdot[(p/2)-r]x} e^{i\cdot[(q/2)-s]y}\right)^2 \cdot$$

$$\cdot[\cos\{(h+p)x\}\cdot\cos\{(k+q)y\} - \operatorname{sen}\{(h+p)x\}\cdot\operatorname{sen}\{(k+q)y\} -$$

$$- i\cdot(\operatorname{sen}\{(h+p)x\}\cdot\cos\{(k+q)y\} + \cos\{(h+p)x\}\cdot\operatorname{sen}\{(k+q)y\})]\,dx\,dy;$$

pertanto, tenuto conto anche della (4),

$$(10) \qquad \begin{cases} |\,\mathfrak{R}\,(S_{2p,2q;h,k})\,| \leqslant \\ \leqslant \dfrac{1}{4\pi^2}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sum_{0}^{2p}{}_r \sum_{0}^{2q}{}_s \mu_{r,s}\, e^{i\cdot(p-r)x} e^{i\cdot(q-s)y}\cdot|\cos\{(h+p)x + (k+q)y\}|\,dx\,dy, \\ |\,\mathfrak{J}(S_{2p,2q;h,k})\,| \leqslant \\ \leqslant \dfrac{1}{4\pi^2}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sum_{0}^{2p}{}_r \sum_{0}^{2q}{}_s \mu_{r,s}\, e^{i\cdot(p-r)x} e^{i\cdot(q-s)y}\cdot|\operatorname{sen}\{(h+p)x + (k+q)y\}|\,dx\,dy, \end{cases}$$

ove i primi membri sono i moduli, rispettivamente della parte reale e del coefficiente dell'immaginario, del primo membro della (9).

Osservato che [4]

$$(11) \qquad \begin{cases} |\operatorname{sen} t| = \dfrac{2}{\pi}\left\{1 - 2\displaystyle\sum_{1}^{\infty}{}_\nu \frac{\cos(2\nu t)}{4\nu^2 - 1}\right\}, \\ |\cos t| = \dfrac{2}{\pi}\left\{1 - 2\displaystyle\sum_{1}^{\infty}{}_\nu (-1)^\nu \frac{\cos(2\nu t)}{4\nu^2 - 1}\right\} \end{cases}$$

---

[4] Si veda ad esempio: CH. J. DE LA VALLÉE POUSSIN, **Leçons sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle**, Gauthier-Villars, Paris 1919, pag. 36.

e supposto che valga una delle seguenti quattro coppie di disuguaglianze

$$
(12) \qquad \begin{cases} 2(h+p) > p, & 2(k+q) > q; \\ 2(h+p) > p, & 2(k+q) < -q; \\ 2(h+p) < -p, & 2(k+q) > q; \\ 2(h+p) < -p, & 2(k+q) < -q, \end{cases}
$$

dalle (10) si trae, integrando termine a termine,

$$
(13) \qquad \begin{cases} |\,\Re(S_{2p,2q;h,k})\,| \leq \dfrac{2}{\pi}\mu_{p,q} = \dfrac{2}{\pi}\sum_0^p{}_r \sum_0^q{}_s \,|\,\lambda_{r,s}\,|^2 \\ |\,\Im(S_{2p,2q;h,k})\,| \leq \dfrac{2}{\pi}\mu_{p,q} = \dfrac{2}{\pi}\sum_0^p{}_r \sum_0^q{}_s \,|\,\lambda_{r,s}\,|^2 \end{cases}
$$

e l'uguaglianza vale nella prima se

$$
f(x, y) = \pm \operatorname{sgn} \cos\{(h+p)x + (k+q)y\},
$$

nella seconda se

$$
f(x, y) = \pm \operatorname{sgn} \operatorname{sen}\{(h+p)x + (k+q)y\}.
$$

Relativamente alla funzione $f(x+u,\ y+v)$ si ha

$$
\gamma_{r,s}(u, v) = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+u,\ y+v)\cdot e^{-i\cdot(rx+sy)}\,dx\,dy =
$$

$$
= \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x,\ y)\cdot e^{-i\cdot(rx+sy)}e^{i\cdot(ru+sv)}\,dx\,dy = \gamma_{r,s}\cdot e^{i\cdot(ru+sv)}
$$

e dalle (13) si deduce

$$
|\,\Re(\sum_0^{2p}{}_r \sum_0^{2q}{}_s \mu_{r,s}\cdot\gamma_{r+h,s+k}\cdot e^{i\cdot(r+h)u}\cdot e^{i\cdot(s+k)v})\,| \leq \frac{2}{\pi}\sum_0^p{}_r \sum_0^q{}_s \,|\,\lambda_{r,s}\,|^2,
$$

$$
|\,\Im(\sum_0^{2p}{}_r \sum_0^{2q}{}_s \mu_{r,s}\cdot\gamma_{r+h,s+k}\cdot e^{i\cdot(r+h)u}\cdot e^{i\cdot(s+k)v})\,| \leq \frac{2}{\pi}\sum_0^p{}_r \sum_0^q{}_s \,|\,\lambda_{r,s}\,|^2
$$

e, per ogni assegnata coppia di numeri reali u e v, l'uguaglianza sussiste nella prima se

$$f(x+u,\ y+v) = \pm \operatorname{sgn} \cos\{(h+p)x + (k+q)y\},$$

nella seconda se

$$f(x+u,\ y+v) = \pm \operatorname{sgn} \operatorname{sen}\{(h+p)x + (k+q)y\}.$$

4. – Sempre nell'ipotesi che $f(x, y)$ sia reale, risulta

$$\sum_{0}^{2p}{}_r \sum_{0}^{2q}{}_s \mu_{r,s} \cdot a_{r+h,\,s+k} = \tag{14}$$

$$= \frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x,\ y) \cdot \sum_{0}^{2p}{}_r \sum_{0}^{2q}{}_s \mu_{r,s} \cdot \cos\{(r+h)x\} \cdot \cos\{(s+k)\ y\}\, dx\, dy =$$

$$= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x,\ y) \cdot \sum_{0}^{2p}{}_r \sum_{0}^{2q}{}_s \mu_{r,s} \cdot e^{i\cdot(r+h)x} \cdot e^{i\cdot(s+k)y}\, dx\, dy =$$

$$= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x,\ y) \cdot \sum_{0}^{2p}{}_r \sum_{0}^{2q}{}_s \mu_{r,s} \cdot e^{i\cdot(r+h)x} \cdot e^{-i\cdot(s+k)y}\, dx\, dy =$$

$$= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x,\ y) \cdot \sum_{0}^{2p}{}_r \sum_{0}^{2q}{}_s \mu_{r,s} \cdot e^{-i\cdot(r+h)x} \cdot e^{i\cdot(s+k)y}\, dx\, dy =$$

$$= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x,\ y) \cdot \sum_{0}^{2p}{}_r \sum_{0}^{2q}{}_s \mu_{r,s} \cdot e^{-i\cdot(r+h)x} \cdot e^{-i\cdot(s+k)y}\, dx\, dy$$

e, per la (4),

$$\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x,\ y) \cdot \sum_{0}^{2p}{}_r \sum_{0}^{2q}{}_s \mu_{r,s} \cdot e^{\pm i\cdot(r+h)x} \cdot e^{\pm i\cdot(s+k)y}\, dx\, dy =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x,\ y) \cdot e^{\pm i\cdot(h+p)x} \cdot e^{\pm i\cdot(k+q)y} \cdot \Big(\sum_{0}^{p}{}_r \sum_{0}^{q}{}_s \lambda_{r,s} \cdot e^{\mp i\cdot[(p/2)-r]x} \cdot e^{\mp i\cdot[(q/2)-s]y}\Big)^2\, dx\, dy,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x,\ y)\cdot \sum_0^{2p}{}_r \sum_0^{2q}{}_s\, \mu_{r,s}\cdot e^{\pm i\cdot(r+h)x}\cdot e^{\mp i\cdot(s+k)y}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x,\ y)\cdot e^{\pm i\cdot(h+p)x}\cdot e^{\mp i\cdot(k+q)y}\Big(\sum_0^{p}{}_r \sum_0^{q}{}_s\, \lambda_{r,s}\cdot e^{\mp i\cdot[(p/2)-r]x}\cdot e^{\pm i\cdot[(q/2)-s]y}\Big)^2\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y,$$

ove si corripondono i segni inferiori e i segni superiori.

Ammesso inoltre che

$$\bar{\lambda}_{p-r,q-s} = \bar{\lambda}_{r,q-s} = \bar{\lambda}_{p-r,s} = \lambda_{r,s} \qquad (r = 0,\ 1,\ \ldots,\ p;\ s = 0,\ 1,\ \ldots,\ q)$$

si ha manifestamente

$$\sum_0^{p}{}_r \sum_0^{q}{}_s\, \lambda_{r,s}\cdot e^{-i[(p/2)-r]x}\cdot e^{-i\cdot[(q/2)-s]y} = \sum_0^{p}{}_r \sum_0^{q}{}_s\, \lambda_{r,s}\cdot e^{-i\cdot[(p/2)-r]x}\cdot e^{i\cdot[(q/2)-s]y} =$$

$$= \sum_0^{p}{}_r \sum_0^{q}{}_s\, \lambda_{r,s}\cdot e^{i\cdot[(p/2)-r]x}\cdot e^{-i\cdot[(q/2)-s]y} = \sum_0^{p}{}_r \sum_0^{q}{}_s\, \lambda_{r,s}\cdot e^{i\cdot[(p/2)-r]x}\cdot e^{i\cdot[(q/2)-s]y},$$

sicchè le somme, sotto il segno d'integrale, negli ultimi quattro membri della (14) sono fra loro uguali e per la (8) reali e positive. Dalla (14) si ricava allora

$$\text{(15)} \qquad \sum_0^{2p}{}_r \sum_0^{2q}{}_s\, \mu_{r,s}\cdot a_{r+h,s+k} =$$

$$= \frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x,\ y)\cdot \sum_0^{2p}{}_r \sum_0^{2q}{}_s\, \mu_{r,s}\cdot e^{i\cdot[(p/2)-r]x}\cdot e^{i\cdot[(q/2)-s]y}\cdot$$

$$\cdot \cos\{(h+p)x\}\cdot \cos\{k+q)y\}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$$

e conseguentemente

$$\Big|\sum_0^{2p}{}_r \sum_0^{2q}{}_s\, \mu_{r,s}\cdot a_{r+h,s+k}\Big| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sum_0^{2p}{}_r \sum_0^{2q}{}_s\, e^{i\cdot(p-r)x}\cdot e^{i\cdot(q-s)y}\, |\cos\{(h+p)x\}|\cdot|\cos\{(k+q)y\}|\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y,$$

da cui, per la seconda delle (11) e integrando termine a termine sotto una delle condizioni (12'),

$$(16_1) \qquad \left| \sum_{0}^{2p}{}_r \sum_{0}^{2q}{}_s \mu_{r,s} \cdot a_{r+h,s+k} \right| \leqslant \frac{16}{\pi^2} \sum_{0}^{p}{}_r \sum_{0}^{q}{}_s |\lambda_{r,s}|^2,$$

che si riduce a una uguaglianza se

$$f(x,\ y) = \pm \operatorname{sgn} (\cos\{(h+p)x\} \cdot \cos\{(k+q)y\}).$$

In modo analogo si prova che

$$(16_2) \qquad \left| \sum_{0}^{2p}{}_r \sum_{0}^{2q}{}_s \mu_{r,s} \cdot b_{r+h,s+k} \right| \leqslant \frac{16}{\pi^2} \sum_{0}^{p}{}_r \sum_{0}^{q}{}_s |\lambda_{r,s}|^2,$$

con l'uguaglianza se

$$f(x,\ y) = \pm \operatorname{sgn} (\operatorname{sen}\{(h+p)x\} \cdot \cos\{(k+q)y\}).$$

Ragionando alla stessa maniera o, più rapidamente, dalla (9), tenendo conto della (15) e della formula analoga per $b_{r,s}$, si deduce

$$(16_3) \qquad \left| \sum_{0}^{2p}{}_r \sum_{0}^{2q}{}_s \mu_{r,s} \cdot c_{r+h,s+k} \right| \leqslant \frac{16}{\pi^2} \sum_{0}^{p}{}_r \sum_{0}^{q}{}_s |\lambda_{r,s}|^2,$$

$$(16_4) \qquad \left| \sum_{0}^{2p}{}_r \sum_{0}^{2q}{}_s \mu_{r,s} \cdot d_{r+h,s+k} \right| \leqslant \frac{16}{\pi^2} \sum_{0}^{p}{}_r \sum_{0}^{q}{}_s |\lambda_{r,s}|^2,$$

e l'uguaglianza sussiste nella (16_3) se

$$f(x,\ y) = \pm \operatorname{sgn} (\cos\{(h+p)x\} \cdot \operatorname{sen}\{(k+q)y\}),$$

nella (16_4) se

$$f(x,\ y) = \pm (\operatorname{sgn} \operatorname{sen}\{(h+p)x\} \cdot \operatorname{sen}\{(k+q)y\}).$$

Per la funzione $f(x+u,\ y+v)$ si ha

$$a_{r,s}(u,\ v) = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+u,\ y+v) \cdot \cos(rx) \cdot \cos(sy) \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y =$$

$$= \frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x,\ y) \cdot \cos\{r \cdot (x-u)\} \cdot \cos\{s \cdot (y-v)\} \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y =$$

$$= a_{r,s}\cdot\cos(ru)\cdot\cos(sv) + b_{r,s}\cdot\mathrm{sen}(ru)\cdot\cos(sv) +$$
$$+ c_{r,s}\cdot\cos(ru)\cdot\mathrm{sen}(sv) + d_{r,s}\cdot\mathrm{sen}(ru)\cdot\mathrm{sen}(sv)$$

e analogamente

$$b_{r,s}(u,\ v) = b_{r,s}\cdot\cos(ru)\cdot\cos(sv) - a_{r,s}\cdot\mathrm{sen}(ru)\cdot\cos(sv) +$$
$$+ d_{r,s}\cdot\cos(ru)\cdot\mathrm{sen}(sv) - c_{r,s}\cdot\mathrm{sen}(ru)\cdot\mathrm{sen}(sv),$$

$$c_{r,s}(u,\ v) = c_{r,s}\cdot\cos(ru)\cdot\cos(sv) + d_{r,s}\cdot\mathrm{sen}(ru)\cdot\cos(sv) -$$
$$- a_{r,s}\cdot\cos(ru)\cdot\mathrm{sen}(sv) - b_{r,s}\cdot\mathrm{sen}(ru)\cdot\mathrm{sen}(sv),$$

$$d_{r,s}(u,\ v) = d_{r,s}\cdot\cos(ru)\cdot\cos(sv) - c_{r,s}\cdot\mathrm{sen}(ru)\cdot\cos(sv) -$$
$$- b_{r,s}\cdot\cos(ru)\cdot\mathrm{sen}(sv) + a_{r,s}\cdot\mathrm{sen}(ru)\cdot\mathrm{sen}(sv).$$

Dalle (16_1), (16_2), (16_3), (16_4) si desume rispettivamente

$$(17_1)\qquad \Big|\sum_{0}^{2p}{}_r \sum_{0}^{2q}{}_s\, \mu_{r,s}\cdot\big(a_{r+h,s+k}\cdot\cos\{(r+h)u\}\cdot\cos\{(s+k)v\} +$$
$$+ b_{r+h,s+k}\cdot\mathrm{sen}\{(r+h)u\}\cdot\cos\{(s+k)v\} +$$
$$+ c_{r+h,s+k}\cdot\cos\{(r+h)u\}\cdot\mathrm{sen}\{(s+k)v\} +$$
$$+ d_{r+h,s+k}\cdot\mathrm{sen}\{(r+h)u\}\cdot\mathrm{sen}\{(s+k)v\}\big)\Big| \leqslant \frac{16}{\pi^2}\sum_{0}^{p}{}_r \sum_{0}^{q}{}_s\, |\lambda_{r,s}|^2,$$

$$(17_2)\qquad \Big|\sum_{0}^{2p}{}_r \sum_{0}^{2q}{}_s\, \mu_{r,s}\cdot\big(b_{r+h,s+k}\cdot\cos\{(r+h)u\}\cdot\cos\{(s+k)v\} -$$
$$- a_{r+h,s+k}\cdot\mathrm{sen}\{(r+h)u\}\cdot\cos\{(s+k)v\} +$$
$$+ d_{r+h,s+k}\cdot\cos\{(r+h)u\}\cdot\mathrm{sen}\{(s+k)v\} -$$
$$- c_{r+h,s+k}\cdot\mathrm{sen}\{(r+h)u\}\cdot\mathrm{sen}\{(s+k)v\}\big)\Big| \leqslant \frac{16}{\pi^2}\sum_{0}^{p}{}_r \sum_{0}^{q}{}_s\, |\lambda_{r,s}|^2,$$

$$(17_3)\qquad \Big|\sum_{0}^{2p}{}_r \sum_{0}^{2q}{}_s\, \mu_{r,s}\cdot\big(c_{r+h,s+k}\cdot\cos\{(r+h)u\}\cdot\cos\{(s+k)v\} +$$
$$+ d_{r+h,s+k}\cdot\mathrm{sen}\{(r+h)u\}\cdot\cos\{(s+k)v\} -$$

$$-a_{r+h,s+k}\cdot\cos\{(r+h)u\}\cdot\operatorname{sen}\{(s+k)v\}-$$

$$-b_{r+h,s+k}\cdot\operatorname{sen}\{(r+h)u\}\cdot\operatorname{sen}\{(s+k)v\})\,|\leqslant\frac{16}{\pi^2}\sum_0^p{}_r\sum_0^q{}_s\,|\lambda_{r,s}|^2,$$

$$(17_4)\qquad |\sum_0^{2p}{}_r\sum_0^{2q}{}_s\,\mu_{r,s}\cdot(d_{r+h,s+k}\cdot\cos\{(r+h)u\}\cdot\cos\{(s+k)v\}-$$

$$-c_{r+h,s+k}\cdot\operatorname{sen}\{(r+h)u\}\cdot\cos\{(s+k)v\}-$$

$$-b_{r+h,s+k}\cdot\cos\{(r+h)u\}\cdot\operatorname{sen}\{(s+k)v\}+$$

$$+a_{r+h,s+k}\cdot\operatorname{sen}\{(r+h)u\}\cdot\operatorname{sen}\{(s+k)v\})\,|\leqslant\frac{16}{\pi^2}\sum_0^p{}_r\sum_0^q{}_s\,|\lambda_{r,s}|^2,$$

e, per ogni assegnata coppia di numeri reali u e v, l'uguaglianza vale nella (17_1) se

$$f(x+u,\ y+v)=\pm\operatorname{sgn}(\cos\{(h+p)x\}\cdot\cos\{(k+q)y\}),$$

nella (17_2) se

$$f(x+u,\ y+v)=\pm\operatorname{sgn}(\operatorname{sen}\{(h+p)x\}\cdot\cos\{(k+q)y\}),$$

nella (17_3) se

$$f(x+u,\ y+v)=\pm\operatorname{sgn}(\cos\{(h+p)x\}\cdot\operatorname{sen}\{(k+q)y\}),$$

e infine nella (17_4) se

$$f(x+u,\ y+v)=\pm\operatorname{sgn}(\operatorname{sen}\{(h+p)x\}\cdot\operatorname{sen}\{(k+q)y\}).$$

5. – Faccio ora alcune applicazioni delle formule (17_1), (17_2), (17_3), (17_4).

Se $\lambda_{r,s}=1$ $\quad (r=0,\,1,\,\ldots,\,p;\ \ s=0,\,1,\,\ldots,\,q)$, $h=k=1$, ponendo $p-1$, $q-1$ rispettivamente in luogo di p, q, le (17_1), (17_2), (17_3), (17_4) divengono ordinatamente

$$(18)\qquad |\{\sum_1^p{}_r\sum_1^q{}_s\,rs+\sum_1^p{}_r\sum_{q+1}^{2q}{}_s\,r\cdot(2q-s)+\sum_{p+1}^{2p}{}_r\sum_1^q{}_s\,(2p-r)s+$$

$$+\sum_{p+1}^{2p}{}_r\sum_{q+1}^{2q}{}_s\,(2p-r)(2q-s)\}\cdot A^{(j)}_{r,s}(u,\ v)\,|\leqslant\frac{16}{\pi^2}pq\qquad (j=1,\,2,\,3,\,4),$$

ove $A^{(j)}_{r,s}(u,\ v)$ per $j=1,\ 2,\ 3,\ 4$ è dato ordinatamente da

$$a_{r,s}\cdot\cos(ru)\cdot\cos(sv)+b_{r,s}\cdot\mathrm{sen}(ru)\cdot\cos(sv)+$$
$$+\,c_{r,s}\cdot\cos(ru)\cdot\mathrm{sen}(sv)+d_{r,s}\cdot\mathrm{sen}(ru)\cdot\mathrm{sen}(sv),$$

$$b_{r,s}\cdot\cos(ru)\cdot\cos(sv)-a_{r,s}\cdot\mathrm{sen}(ru)\cdot\cos(sv)+$$
$$+\,d_{r,s}\cdot\cos(ru)\cdot\mathrm{sen}(sv)-c_{r,s}\cdot\mathrm{sen}(ru)\cdot\mathrm{sen}(sv),$$

$$c_{r,s}\cdot\cos(ru)\cdot\cos(sv)+d_{r,s}\cdot\mathrm{sen}(ru)\cdot\cos(sv)-$$
$$-\,a_{r,s}\cdot\cos(ru)\cdot\mathrm{sen}(sv)-b_{r,s}\cdot\mathrm{sen}(ru)\cdot\mathrm{sen}(sv),$$

$$d_{r,s}\cdot\cos(ru)\cdot\cos(sv)-c_{r,s}\cdot\mathrm{sen}(ru)\cdot\cos(sv)-$$
$$-\,b_{r,s}\cdot\cos(ru)\cdot\mathrm{sen}(sv)+a_{r,s}\cdot\mathrm{sen}(ru)\cdot\mathrm{sen}(sv).$$

Denotati con $s^{(1)}_{p,q}(x,\ y)$ la ridotta di indici $p,\ q$ della serie di FOURIER della $f(x,\ y)$ e con $\sigma^{(1)}_{p,q}(x,\ y)$ il polinomio trigonometrico di FEJÉR d'ordine $(p-1,\ q-1)$ relativo alla $f(x,\ y)$, cioè

$$s^{(1)}_{p,q}(x,\ y)=\frac{1}{4}\,a_{0,0}+\frac{1}{2}\sum_{1}^{p}{}_{r}\left\{a_{r,0}\cdot\cos(rx)+b_{r,0}\cdot\mathrm{sen}(rx)\right\}+$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{1}^{q}{}_{s}\left\{a_{0,s}\cdot\cos(sy)+c_{0,s}\cdot\mathrm{sen}(sy)\right\}+\sum_{1}^{p}{}_{r}\sum_{1}^{q}{}_{s}A^{(1)}_{r,s}(x,\ y),$$

$$\sigma^{(1)}_{p,q}(x,\ y)=\frac{1}{pq}\cdot\sum_{0}^{p}{}_{r}\sum_{0}^{q}{}_{s}\,s^{(1)}_{r,s}(x,\ y),$$

risulta

$$\sigma^{(1)}_{2p,2q}(x,\ y)-\sigma^{(1)}_{2p,q}(x,\ y)-\sigma^{(1)}_{p,2q}(x,\ y)+\sigma^{(1)}_{p,q}(x,\ y)=\frac{1}{4pq}\Big\{\sum_{1}^{p}{}_{r}\sum_{1}^{q}{}_{s}\,rs+$$
$$+\sum_{1}^{p}{}_{r}\sum_{q+1}^{2q}{}_{s}\,r\cdot(2q-s)+\sum_{p+1}^{2p}{}_{r}\sum_{1}^{q}{}_{s}\,(2p-r)s+\sum_{p+1}^{2p}{}_{r}\sum_{q+1}^{2q}{}_{s}\,(2p-r)(2q-s)\Big\}\cdot A^{(1)}_{r,s}(x,\ y).$$

Dalle limitazioni (18), e con evidente significato dei simboli, segue ([5])

$$\left|\sigma^{(j)}_{2p,2q}(x,\ y)-\sigma^{(j)}_{2p,q}(x,\ y)-\sigma^{(j)}_{p,2q}(x,\ y)+\sigma^{(j)}_{p,q}(x,\ y)\right|\leqslant\frac{4}{\pi^2}\qquad(j=1,\ 2,\ 3,\ 4).$$

([5]) Circa le tre serie coniugate della serie di FOURIER della $f(x,\ y)$ vedasi: L. CESARI, *Sulle serie di Fourier delle funzioni lipschitziane di più variabili*, Ann. Scuola Norm. Super. Pisa (2) 7 (1938), 279-295. In particolare cfr. pag. 281.

Supposto inoltre $d_{r,s} \geqslant 0$ ($r = 1, 2, \dots$; $s = 1, 2, \dots$), dall'ultima delle (18) discende

$$\sum_1^p{}_r \sum_1^q{}_s rs \cdot d_{r,s} \leqslant \frac{16}{\pi^2} pq, \tag{19}$$

la quale per $p = q = 1$ fornisce $d_{1,1} \leqslant 16/\pi^2$ e l'uguaglianza vale se

$$f(x, y) = \pm \operatorname{sgn} (\operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} y),$$

cioè se

$$f(x, y) \sim \frac{16}{\pi^2} \sum_1^\infty{}_r \sum_1^\infty{}_s \frac{\operatorname{sen} \{ (2r-1)x \} \cdot \operatorname{sen} \{ (2s-1)y \}}{(2r-1)(2s-1)} .$$

Quest'ultimo risultato si può anche ottenere dalla stessa definizione del coefficiente $d_{1,1}$.

Posto

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{4} \{ f(x, y) - f(-x, y) - f(x, -y) + f(-x, -y) \} \sim$$

$$\sim \sum_1^\infty{}_r \sum_1^\infty{}_s d_{r,s} \cdot \operatorname{sen} (rx) \cdot \operatorname{sen} (sy),$$

dalla (19) segue

$$\left| \sum_1^p{}_r \sum_1^q{}_s r \cdot d_{r,s} \cdot \operatorname{sen}(rx) \cdot \operatorname{sen}(sy) \right| \leqslant \frac{16}{\pi^2} pq,$$

$$\left| \sum_1^p{}_r \sum_1^q{}_s s \cdot d_{r,s} \cdot \operatorname{sen} (rx) \cdot \operatorname{sen} (sy) \right| \leqslant \frac{16}{\pi^2} pq,$$

$$\left| \sum_1^p{}_r \sum_1^q{}_s rs \cdot d_{r,s} \cdot \operatorname{sen} (rx) \cdot \operatorname{sen} (sy) \right| \leqslant \frac{16}{\pi^2} pq .$$

Mediante l'applicazione del primo teorema della media all'integrale di FEJÉR [6] relativo alla $\varphi(x, y)$, ove si ricordi la (1), si ha poi

$$\left| \sum_1^p{}_r \sum_1^q{}_s (p-r)(q-s) \cdot d_{r,s} \cdot \operatorname{sen} (rx) \cdot \operatorname{sen} (sy) \right| \leqslant pq,$$

---

[6] Loc. cit. in [2], pag. 487.

sicchè, dall'identità

$$\sum_1^p{}_r \sum_1^q{}_s u_{r,s} = \frac{1}{pq} \sum_1^p{}_r \sum_1^q{}_s (p-r)(q-s)\cdot u_{r,s} + \frac{1}{p} \sum_1^p{}_r \sum_1^q{}_s r\cdot u_{r,s} +$$

$$+ \frac{1}{q} \sum_1^p{}_r \sum_1^q{}_s s\cdot u_{rs} - \frac{1}{pq} \sum_1^p{}_r \sum_1^q{}_s rs\cdot u_{r,s}$$

e ponendo $u_{r,s} = d_{r,s}\cdot \text{sen}\,(rx)\cdot \text{sen}\,(sy)$, si ottiene

$$(20) \qquad \left| \sum_1^p{}_r \sum_1^q{}_s d_{r,s}\cdot \text{sen}\,(rx)\cdot \text{sen}\,(sy) \right| \leqslant 1 + (1+p+q)\,\frac{16}{\pi^2}$$

ovvero

$$\sum_1^p{}_r \sum_1^q{}_s d_{r,s}\cdot \text{sen}\,(rx)\cdot \text{sen}\,(sy) = O(p+q)\,.$$

Si osservi che se $d_{r,s} \geqslant 0$ ($r = 1, 2, \ldots, M$; $s = 1, 2, \ldots, N$) allora le (19) e (20) valgono soltanto per $p \leqslant M/2$, $q \leqslant N/2$. Risultati analoghi si hanno supponendo $d_{r,s} \leqslant 0$.