Riv. Mat. Univ. Parma 8 (1957), 5-14

Al Prof. BRUTO CALDONAZZO

GIORGIO SESTINI (*)

# Problemi di propagazione del calore con convezione forzata. (**)

## 1. – Introduzione.

In una comunicazione al 5° Congresso della « Unione Matematica Italiana » [1] (1) richiamai l'attenzione sull'efficacia del metodo classico di LEVI-GEVREY ([2], [3]) per la soluzione, nel caso unidimensionale, di problemi relativi alla determinazione dello stato termico in un mezzo omogeneo e termicamente isotropo, che si muove con assegnata velocità funzione del posto e del tempo (*convezione forzata*). In quella comunicazione misi in rilievo l'importanza della risoluzione di problemi del genere anche dal punto di vista tecnico, giustificandosi con ciò il rinnovato interesse al loro studio.

Nel caso particolare di problema unidimensionale con velocità costante ([4], [5]) o con velocità funzione molto particolare del posto [6] è stata ottenuta in forma esplicita la soluzione del problema, ricorrendo o alla trasformata di LAPLACE o a particolari artifizi atti a ridurre il problema considerato ad altro noto in assenza di convezione. L'efficacia però di questi procedimenti risiede

---

(*) Professore o. della Università di Firenze. Indirizzo: Istituto Matematico U. DINI della Università, Via Alfani 81, Firenze, Italia.

(**) Questa Nota fu riassunta in una comunicazione al « 4° Österreichischer Mathematikerkongress », Vienna 17-22 settembre 1956.

(1) I numeri in parentesi quadra si riferiscono alla Bibliografia posta al termine della Nota.

proprio e solamente nella particolarità del problema unidimensionale affrontato.

Il metodo classico sopra ricordato permette al contrario di costruire la soluzione di generali problemi, anche non unidimensionali, del tipo sopra accennato, soddisfatte alcune naturali ipotesi di regolarità ed onestà per i dati, non appena si conosca, col metodo della funzione di GREEN, la soluzione dell'analogo problema in assenza di convezione.

In questa Nota, impostato il problema in forma generale e scritta la equazione integrodifferenziale con un limite variabile, che ne permette la risoluzione con il metodo delle approssimazioni successive, equazione che nei casi interessanti le pratiche applicazioni si riduce di regola ad una equazione integrale, elencherò la vasta classe di problemi che per questa via trovano soluzione, accennando anche all'avviamento del calcolo numerico della soluzione stessa in problemi relativi al semispazio.

## 2. – Impostazione del problema e formula risolvente.

Con riferimento all'intervallo $(0, T)$ per il tempo $t$, se con $S$ indichiamo la regione di spazio, finita o no, occupata dal mezzo omogeneo, termicamente isotropo, di costante *diffusività* $k$, in moto con assegnata velocità $\boldsymbol{v}(P, t)$, la determinazione della temperatura del mezzo $U(P, t)$, note per $U(P, t)$ le condizioni iniziali e sulla frontiera $\mathfrak{F}S$ di $S$ supposta regolare, dipende, come è noto, dalla risoluzione di un sistema differenziale del tipo:

$$(1)\quad \begin{cases} k\cdot \Delta U(P,t) - \boldsymbol{v}(P,t)\times \operatorname{grad} U(P,t) = \dfrac{\partial U(P,t)}{\partial t} + A(P,t) + c(P,t)\cdot U(P,t) & \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{in } S, \quad t>0; \\ U(P,0) = f(P) & \text{in } S; \\ a\,\dfrac{\partial U(P,t)}{\partial n} + b\cdot U(P,t) = \varphi(P,t) & \text{su } \mathfrak{F}S, \quad t>0 \end{cases}$$

($a$, $b$ costanti positive; $n$ normale a $\mathfrak{F}S$ interna a $S$),

nella incognita funzione $U = U(P, t)$, dove $A(P, t)$ (interpretabile come rendimento specifico di una assegnata distribuzione di sorgenti in seno al mezzo), $f(P)$, $\varphi(P, t)$ e $c(P, t)$ sono, insieme a $\boldsymbol{v}(P, t)$, funzioni note dei loro argomenti.

Osserveremo che in molti problemi si ha $c(P, t) = 0$; ma $c$ risulta sicuramente diverso da zero in tutti i problemi relativi ad esempio a piastre (problemi bidimensionali) nei quali, scrivendo in un dato istante l'equazione dell'equilibrio termico in un punto occorre tener conto del calore che dalla piastra passa nel mezzo circostante attraverso alla superficie della piastra stessa, ritenendo valida la legge di NEWTON. Gioverà poi osservare che, nel caso di problemi relativi a sistemi estendentisi a distanza infinita, occorrerà imporre alla ricercata soluzione e sue derivate, oltre che ai dati, condizioni di regolarità o di comportamento all'infinito atte ad assicurare l'esistenza e l'unicità della soluzione [7].

In ipotesi molto larghe, ampiamente verificate nei casi interessanti le pratiche applicazioni, continuità dei dati e loro lipschitzianità di ordine $\mu$ (con $0 < \mu \leqslant 1$), resta provata, con procedimento del tutto analogo a quello seguito per il caso bidimensionale nella citata Memoria del GEVREY, l'esistenza e la unicità della soluzione del sistema (1), che può essere poi effettivamente calcolata col metodo delle approssimazioni successive, come subito vedremo accennando al procedimento risolutivo del sistema (1).

Indichiamo con $W(P, t)$ la soluzione del *sistema ridotto associato* al sistema (1):

$$(2)\qquad \begin{cases} k\cdot\Delta W(P,\ t) - \dfrac{\partial W(P,\ t)}{\partial t} = 0 & \text{in} \quad S,\ t>0; \\[2ex] W(P,\ 0) = f(P) & \text{in} \quad S; \\[2ex] a\ \dfrac{\partial W(P,\ t)}{\partial n} + b\cdot W(P,\ t) = \varphi(P,t) & \text{su} \quad \mathfrak{F}S,\ t>0. \end{cases}$$

Assumiamo un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O,\ \boldsymbol{i},\ \boldsymbol{j},\ \boldsymbol{k}$ nel quale siano:

$$v_x = \boldsymbol{v}(P,\ t)\times\boldsymbol{i}, \qquad v_y = \boldsymbol{v}(P,\ t)\times\boldsymbol{j}, \qquad v_z = \boldsymbol{v}(P,\ t)\times\boldsymbol{k}$$

le componenti di $\boldsymbol{v}(P,\ t)$; $x,\ y,\ z$ le coordinate del punto $P$ e $\xi,\ \eta,\ \zeta$ quelle di un generico punto $Q$ di $S$. Fissato in $(0,\ T)$ un istante $t < T$, sia $\tau < t$ un generico istante e si indichi con $G(P,\ Q;\ t,\ \tau)$ la funzione di GREEN relativa al sistema (2). Questa funzione rappresenta manifestamente [9] la temperatura nel punto $P$ di $S$ e nell'istante $t$ dovuta ad una sorgente di portata unitaria generata nel punto $Q$ di $S$ all'istante $\tau$, essendo nulla la temperatura iniziale di $S$ e pure nulla la temperatura del mezzo che circonda $S$.

Associando all'equazione $(1_1)$ l'aggiunta dell'equazione $(2_1)$, con il solito procedimento che permette di applicare la formula di GREEN, si ottiene per l'incognita funzione $U(P,\ t)$ la seguente equazione integrodifferenziale:

$$U(P,\ t) = W(P,\ t) - \tag{3}$$

$$- \int_0^t \int_S [\boldsymbol{v}(Q,\ \tau) \times \operatorname{grad} U(Q,\ \tau) + c(Q,\ \tau) \cdot U(Q,\ \tau) + A(Q,\tau)] \cdot G(P,\ Q;\ t,\ \tau)\, dS\, d\tau.$$

Questa, ove le componenti di $\boldsymbol{v}(P,\ t)$ siano derivabili rispetto alle coordinate di $P$, con facile calcolo, si trasforma nell'equazione integrale:

$$U(P,\ t) = W(P,\ t) + \tag{4}$$

$$+ \int_0^t \int_S \{ U \cdot [\operatorname{div} G\boldsymbol{v} - cG] - AG \}_{(Q,\ \tau)}\, \mathrm{d}S\, \mathrm{d}\tau + \int_0^t \int_{\mathfrak{F}S} UG\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{n}\, \mathrm{d}\sigma\, \mathrm{d}\tau.$$

La (3), ovvero la (4), si risolve con un procedimento di approssimazioni successive, ponendo rispettivamente per la (3):

$$U_0(P,\ t) = W(P,\ t),$$

$$U_n(P,\ t) = \int_0^t \int_S [\boldsymbol{v} \times \operatorname{grad} U_{n-1} + c\, U_{n-1} + A] \cdot G\, \mathrm{d}S\, \mathrm{d}\tau, \tag{5}$$

e per la (4):

$$U_0(P,\ t) = W(P,\ t),$$

$$U_n(P,\ t) = \int_0^t \int_S \{ U_{n-1} \cdot [\operatorname{div} G\boldsymbol{v} - cG] - AG \}\, \mathrm{d}S\, \mathrm{d}\tau + \int_0^t \int_{\mathfrak{F}S} U_{n-1} G\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{n}\, \mathrm{d}\sigma\, \mathrm{d}\tau\,.$$

Le ipotesi sui dati assicurano [**2**] l'uniforme e assoluta convergenza della serie:

$$U(P,\ t) = U_0(P,\ t) + U_1(P,\ t) + \ldots + U_n(P,\ t) + \ldots\,,$$

che esprime la ricercata soluzione del problema.

Si può pertanto concludere che la (3), ovvero la (4), stabilisce un teorema di riduzione del problema termico con convezione forzata ad altro analogo in assenza di convezione, tutte le volte che per quest'ultimo sia nota la funzione di GREEN e di conseguenza la soluzione $W(P, t)$. Questo fatto si verifica per i principali campi interessanti le pratiche applicazioni, nelle usuali condizioni di stato termico iniziale e al contorno, quali il semispazio, lo strato piano; lo spazio esterno o interno ad un cilindro rotondo, lo strato cilindrico; lo spazio interno od esterno ad una sfera, lo strato sferico, oltre ad altri casi particolari pure di notevole interesse applicativo (cfr., ad esempio, [**9**], Cap. XIII).

Giovera infine osservare che nell'espressione della funzione di GREEN per i campi sopra ricordati entrano funzioni ben note e studiate quali la funzione degli errori e sue iterate, le funzioni di BESSEL di vario tipo, le funzioni sferiche; ciò facilita notevolmente il calcolo della soluzione di (2) e quindi di (1), quando, per particolari espressioni dei dati (coefficienti, valori iniziali e al contorno, velocità del mezzo), non si arrivi addirittura a funzioni già tabellate.

## 3. – Applicazioni.

Accenneremo ora, quale esempio, alla risoluzione di due problemi relativi al semispazio, uno dei quali pluridimensionale, che generalizzano risultati noti. Per la trattazione di questi casi penseremo in (1) nulli $c(P, t)$ e $A(P, t)$; circa la supposta mancanza di $A(P, t)$ osserveremo che la sua presenza porterebbe soltanto al calcolo di un termine noto nella valutazione di $U(P, t)$.

a) **Caso unidimensionale.**

Il procedimento usato ad esempio dal sig. BENFIELD, fondato sulla trasformata di LAPLACE, non risulta conveniente nel caso in cui la velocità $\boldsymbol{v}$ risulti funzione anche del tempo.

Noi considereremo qui il problema unidimensionale relativo ad un mezzo omogeneo e termicamente isotropo, occupante un semispazio, che assumeremo come semispazio delle $x \geqslant 0$ in un riferimento cartesiano ortogonale, la cui velocità, normale al piano $x = 0$, $\boldsymbol{v}(x, t)$ supporremo funzione continua e derivabile di $x$ e $t$ con derivate limitate. Come in [**4**], specializzeremo le funzioni $f(P)$ e $\varphi(P, t)$ che compaiono in (1), rispettivamente in $-Ax$ e $-\lambda t$.

Il sistema da risolvere è pertanto:

$$\begin{cases} k \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} - v(x, t) \dfrac{\partial T}{\partial x} = \dfrac{\partial T}{\partial t} & (x > 0, \quad t > 0) \\ T(x, 0) = -Ax & (x > 0), \\ T(x, \ ) = -\lambda t & (x = 0, \quad t > 0) \end{cases}$$

Il sistema associato è allora:

$$\begin{cases} k\,\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \dfrac{\partial U}{\partial t} & (x > 0, \quad t > 0), \\ U(x,\ 0) = -Ax & (x > 0), \\ U(x,\ t) = -\lambda t & (x = 0, \quad t > 0), \end{cases}$$

la cui soluzione è:

$$U(x,\ t) = -Ax - 4\lambda t \ \mathrm{i}^2\mathrm{erfc}\,\frac{x}{2\sqrt{kt}},$$

$$\mathrm{i}^n\mathrm{erfc}\,x = \int_x^{+\infty} \mathrm{i}^{n-1}\mathrm{erfc}\,\xi\,\mathrm{d}\xi, \qquad \mathrm{i}^0\mathrm{erfc}\,x = \mathrm{erfc}\,x\,.$$

Essendo in questo caso la funzione di GREEN espressa da [**9**]:

$$G(x,\ \xi,\ t,\ \tau) = [\pi k\cdot(t-\tau)]^{-1/2}\cdot\varphi(x,\ \xi,\ t-\tau)/2\,,$$

con

$$\varphi(x,\ \xi,\ t-\tau) = \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4k\cdot(t-\tau)}\right] - \exp\left[\frac{(x+\xi)^2}{4k\cdot(t-\tau)}\right],$$

la (3) si può allora scrivere

$$T(x,\ t) = U(x,\ t) - \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\mathrm{d}\tau}{\sqrt{\pi k\cdot(t-\tau)}}\int_0^{+\infty} \varphi v\,\frac{\partial T}{\partial \xi}\,\mathrm{d}\xi =$$

$$= U(x,\ t) + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\mathrm{d}\tau}{\sqrt{\pi k\cdot(t-\tau)}}\int_0^{+\infty} T\,\frac{\partial(v\varphi)}{\partial\xi}\,\mathrm{d}\xi = U(x,\ t) + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\psi(x,\ t,\ \tau)}{\sqrt{\pi k\cdot(t-\tau)}}\,\mathrm{d}\tau$$

e, posto $T_0 = U(x,\ t)$, per avere le successive approssimazioni $T_n$ non resta che procedere al calcolo dei vari integrali, magari facendo uso di procedimenti numerici di cui è agevole il controllo dell'errore (cfr., ad esempio, [**10**], pp. 570-572).

Noi daremo l'espressione di $T_1$ nel caso in cui sia $v(x,\ t) = m(x)\cdot p(t)$, con $m$ e $p$ simboli di funzioni continue con derivate limitate.

In questo caso, posto $T_0 = U(x, t)$, si ha

$$\psi_1 = p(\tau) \cdot \left( A I_1 - \frac{2\lambda\sqrt{\tau}}{\sqrt{k}} I_2 \right),$$

con

$$I_1 = \int_0^{+\infty} m(\xi) \cdot \varphi \, d\xi, \qquad I_2 = \int_0^{+\infty} m(\xi) \cdot \varphi \text{ ierfc } \frac{\xi}{2\sqrt{k\tau}} \, d\xi .$$

Applicando il teorema degli accrescimenti finiti alla $m(x)$, a calcoli fatti si ottiene:

$$I_1 = 2\sqrt{\pi k \cdot (t-\tau)} \left\{ m(x) \cdot \text{erfc} \frac{x}{2\sqrt{k \cdot (t-\tau)}} + \right.$$

$$+ (\overline{m}_2 - \overline{m}_1) \sqrt{\frac{k \cdot (t-\tau)}{\pi}} \left[ 1 - \exp \frac{-x^2}{k \cdot (t-\tau)} \right] + (\overline{m}_2 - \overline{m}_1) x \cdot \text{erfc} \frac{x}{\sqrt{k \cdot (t-\tau)}} +$$

$$\left. + \overline{m}_1 \, x \cdot \text{erfc} \frac{x}{2\sqrt{k \cdot (t-\tau)}} \right\} = 2\sqrt{\pi k \cdot (t-\tau)} \, \overline{I}_1 ,$$

ove $\overline{m}_1$ e $\overline{m}_2$ sono convenienti valori compresi tra l'estremo inferiore e l'estremo superiore dei valori assunti dalla derivata di $m(x)$ rispettivamente in $(0, x)$ e $(x, +\infty)$. Ricordando (cfr., ad esempio, [**9**], p. 373) che $0 \leqslant \text{ierfc}\, x < 0{,}7$, qualunque sia $x$, essendo $\geqslant 0$ la funzione integranda di $I_2$, si ha $I_2 = \eta I_1$, con $0 < \eta < 0{,}7$ e quindi

$$\psi_1(x, t, \tau) = p(\tau) \cdot \left( A - \frac{2\lambda\sqrt{\tau}}{\sqrt{k}} \eta \right) I_1 .$$

Si ha allora

$$T_1 = \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\psi_1}{\sqrt{\pi k \cdot (t-\tau)}} \, d\tau = \int_0^t p(\tau) \cdot \left( A - \frac{2\lambda\sqrt{\tau}}{\sqrt{k}} \eta \right) \overline{I}_1 \, d\tau .$$

Il calcolo di $T_1$, come si vede facilmente, viene ricondotto a quello di integrali del tipo

$$I'_{2m}(x) = \int_x^{+\infty} u^{-2m} e^{-u^2} \, du = \frac{x^{1-2m}}{2m-1} e^{-x^2} - \frac{2}{2m-1} I'_{2m-2}(x),$$

con $I'_0(x) = (1/2)\sqrt{\pi}\,\mathrm{erfc}\,x$. Come esempio prenderemo in considerazione i due seguenti integrali:

$$0 \leqslant I_3 = \int_0^t p(\tau)\cdot \mathrm{erf}\,\frac{a}{\sqrt{t-\tau}}\,d\tau, \qquad 0 \leqslant I_4 = \int_0^t \sqrt{\tau}\cdot p(\tau)\cdot \mathrm{erf}\,\frac{a}{\sqrt{t-\tau}}\,d\tau \leqslant \sqrt{t}\cdot I_3 .$$

Per $I_3$, applicando successivamente il teorema degli accrescimenti finiti alla $p(t)$ e il teorema della media, si ha a calcoli fatti:

$$I_3 = p(t)\cdot\left[t\cdot \mathrm{erf}\,\frac{a}{\sqrt{t}} + \frac{2a^2}{\sqrt{\pi}}\cdot I'_2\!\left(\frac{a}{\sqrt{t}}\right)\right] - \overline{p}'\cdot\left[\frac{t^2}{2}\cdot \mathrm{erf}\,\frac{a}{\sqrt{t}} + \frac{a^4}{\sqrt{\pi}}\cdot I'_4\!\left(\frac{a}{\sqrt{t}}\right)\right],$$

essendo $\overline{p}'$ un conveniente valore compreso tra gli estremi inferiore e superiore della derivata di $p(t)$ in $(0,\ t)$.

Per $I_4$, con analogo procedimento, si ottiene:

$$I_4 = \sqrt{t}\,I_3 - \int_0^t \frac{t-\tau}{\sqrt{t}+\sqrt{\tau}}\cdot p(\tau)\mathrm{erf}\,\frac{a}{\sqrt{t-\tau}}\,d\tau = \sqrt{t}\,I_3 - I_5,$$

con

$$I_5 = -\frac{\overline{p}}{2\sqrt{t}}\left[\frac{t^2}{2}\cdot \mathrm{erf}\,\frac{a}{\sqrt{t}} + \frac{a^4}{\sqrt{\pi}}\cdot I'_4\!\left(\frac{a}{\sqrt{t}}\right)\right],$$

ove con $\overline{p}$ si è indicato un numero compreso tra $l$ e $2L$, essendo $l$ ed $L$ gli estremi inferiore e superiore di $p(t)$ in $(0,\ t)$.

### b) **Caso tridimensionale.**

Sempre con riferimento allo stesso mezzo, occupante il semispazio delle $x \geqslant 0$ e mobile con velocità $\boldsymbol{v}(x,\ t)$ normale al piano $x = 0$, fissa la condizione per $x = 0$, supporremo la temperatura iniziale funzione lineare delle tre coordinate. Il sistema da risolvere è perciò il seguente:

$$\begin{cases} k\cdot \Delta T - v(x,\ t)\cdot \dfrac{\partial T}{\partial x} = \dfrac{\partial T}{\partial t} & (x > 0, \quad t > 0), \\ T(P,\ 0) = Ax + By + Cz & (x > 0), \\ T(P,\ t) = -\lambda t & (x = 0, \quad t > 0), \end{cases}$$

con $k$, $\lambda$, $A$, $B$, $C$ costanti.

Il sistema ridotto associato

$$\begin{cases} k\cdot \Delta U = \dfrac{\partial U}{\partial t} & (x > 0, \quad t > 0), \\ U(P,\ 0) = Ax + By + Cz & (x > 0), \\ U(P,\ t) = -\lambda t & (x = 0, \quad t > 0) \end{cases}$$

ha come soluzione:

$$U(P,\ t) = Ax + (By + Cz)\cdot \operatorname{erf} \frac{x}{2\sqrt{kt}} - \frac{\lambda}{2}(2t + x^2)\cdot \operatorname{erfc} \frac{x}{2\sqrt{kt}} +$$

$$+ \frac{\lambda x}{\sqrt{k\pi}}\cdot \exp \frac{-x^2}{4kt} = a(x,\ t) + (By + Cz)\cdot \operatorname{erf} \frac{x}{2\sqrt{kt}}\,.$$

Essendo per questo caso la funzione di GREEN espressa da [9]

$$G(P,\ Q,\ t,\ \tau) = \frac{1}{8}\,[\pi k\cdot(t-\tau)]^{-3/2}\cdot \exp \frac{-(y-\eta)^2 - (z-\zeta)^2}{4k\cdot(t-\tau)}\cdot \varphi(x,\ \xi,\ t-\tau),$$

sostituendo in (5), si ha per il sistema di approssimazioni successive:

$$T_0(P,\ t) = U(P,\ t),$$

$$T_n(P,\ t) =$$

$$= \frac{1}{8(\pi k)^{3/2}} \int_0^t \frac{d\tau}{(t-\tau)^{3/2}} \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp \frac{-(y-\eta)^2 - (z-\zeta)^2}{4k\cdot(t-\tau)}\, d\eta\, d\zeta \int_0^{+\infty} T_{n-1}(Q,\ \tau)\cdot \frac{\partial(v\varphi)}{\partial \xi}\, d\xi\,.$$

Per la prima approssimazione $T_1$, avendosi

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp \frac{-(y-\eta)^2 - (z-\zeta)^2}{4k\cdot(t-\tau)}\, d\eta\, d\zeta = 4k\pi\cdot(t-\tau),$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} (B\eta + C\zeta)\cdot \exp \frac{-(y-\eta)^2 - (z-\zeta)^2}{4k\cdot(t-\tau)}\, d\eta\, d\zeta = 4k\pi\cdot(By + Cz)(t-\tau),$$

si ottiene

$$T_1 = \frac{1}{2\sqrt{\pi k}} \int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \int_0^{+\infty} a(\xi, \tau) \cdot \frac{\partial(v\varphi)}{\partial \xi} d\xi + \frac{By+Cz}{2\sqrt{\pi k}} \int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \int_0^{+\infty} \operatorname{erf} \frac{\xi}{2\sqrt{k\tau}} \cdot \frac{\partial(v\varphi)}{\partial \xi} d\xi,$$

e il calcolo è ricondotto a quello di integrali analoghi o uguali a quelli considerati nel precedente caso, ove si faccia $v(x, t) = m(x) \cdot p(t)$, con le solite ipotesi sulle funzioni $m(x)$ e $p(t)$.

## 4. – Bibliografia.


[1] G. SESTINI, *Sulla risoluzione di un notevole gruppo di problemi retti da equazioni di tipo parabolico*, Riv. Mat. Univ. Parma **6** (1955), 349-352.

[2], [3] M. GEVREY, *Sur les équations aux dérivées partielles du type parabolique*, J. Math. Pures Appl. (6) **9** (1913), 305-471; (6) **10** (1914), 105-143.

[4] A. E. BENFIELD, *A problem of the temperature distribution in a moving medium*, Quart. Appl. Math. **6** (1948), 439-443.

[5] A. E. BENFIELD, *The temperature in an accreting medium with heat generation*, Quart. Appl. Math. **7** (1949), 436-439.

[6] B. MANFREDI, *Osservazioni su di un problema di distribuzione della temperatura in un mezzo che si muove*, Riv. Mat. Univ. Parma **4** (1953), 327-335.

[7] M. PICONE, *Formule risolutive e condizioni di compatibilità per alcuni problemi di propagazione*, Atti Accad. Italia, Mem. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. **5** (1934), 715-749.

[8] D. GRAFFI, *Alcune considerazioni sulla teoria della trasmissione del calore per convezione forzata*, Atti Accad. Naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (6) **12** (1930), 229-233, 336-340.

[9] H. S. CARSLAW and J. C. JAEGER, **Conduction of heat in solids**, Clarendon Press, Oxford 1948.

[10] M. PICONE, **Lezioni di Analisi infinitesimale**, Vol. 1, Circolo Matematico di Catania, 1923.