Riv. Mat. Univ. Parma 8 (1957), 59-72

TINO ZEULI (*)

# Sforzi e deformazioni in uno strato del suolo, poggiante su un piano orizzontale rigido e sollecitato superiormente da un carico distribuito su un'area rettangolare. (**)

1. – Con riferimento ad una terna di assi cartesiani ortogonali $O(x, y, z)$, con l'origine in un punto $O$ della superficie superiore dello strato e l'asse $z$ diretto normalmente allo strato e verso l'interno, in assenza di forze di massa, gli sforzi interni nello strato, considerato come un corpo elastico isotropo, in condizioni di equilibrio, devono soddisfare alle equazioni

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} = 0 \\ &\frac{\partial X_y}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} = 0 \\ &\frac{\partial X_z}{\partial x} + \frac{\partial Y_z}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} = 0. \end{aligned} \right.$$

Lo spostamento $\vec{s}$ deve verificare l'equazione

$$(2) \qquad \mu \cdot \Delta_2 \vec{s} + (\lambda + \mu) \cdot \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{s} = 0,$$

dove $\lambda$ e $\mu$ sono le costanti di LAMÉ:

$$\lambda = \frac{\sigma E}{(1 + \sigma)(1 - 2\sigma)}, \qquad \mu = \frac{E}{2(1 + \sigma)}$$

---

(*) Indirizzo: Corso Regina Margherita 101, Torino, Italia.
(**) Ricevuto il 9-V-1957.

[$E=$ (modulo di elasticità), $\sigma=$ (coefficiente di contrazione di Poisson)].

Ponendo $\theta=\operatorname{div}\vec{s}$ dalla (2) si ha

$$\Delta_2\theta=0, \tag{3}$$

ossia il coefficiente di dilatazione cubica $\theta$ è una funzione armonica. Indicando poi con $u$, $v$, $w$ le componenti cartesiane dello spostamento, dalla (2) si ha ancora

$$\Delta_4 u=0, \qquad \Delta_4 v=0, \qquad \Delta_4 w=0, \tag{4}$$

cioè le componenti dello spostamento sono funzioni biarmoniche.

Ricordiamo ancora che, essendo $\alpha=d\vec{s}/dP$ l'omografia di deformazione, $D\alpha$ la sua dilatazione e $\Phi$ l'omografia degli sforzi (dilatazione), si ha

$$\Phi=2\mu\cdot D\alpha+\lambda\theta \tag{5}$$

e, se si pone

$$\Theta=\mathrm{I}_1\Phi\equiv X_x+Y_y+Z_z, \tag{6}$$

si ricava

$$\Theta=(3\lambda+2\mu)\theta, \tag{7}$$ e quindi $$\theta=\frac{1}{3\lambda+2\mu}\Theta. \tag{7'}$$

La (2) porge le equazioni scalari

$$\left\{\begin{aligned} &\mu\cdot\Delta_2 u+(\lambda+\mu)\frac{\partial\theta}{\partial x}=0\\ &\mu\cdot\Delta_2 v+(\lambda+\mu)\frac{\partial\theta}{\partial y}=0\\ &\mu\cdot\Delta_2 w+(\lambda+\mu)\frac{\partial\theta}{\partial z}=0, \end{aligned}\right. \tag{8}$$

e così pure dalla (5) si ha

$$X_x=2\mu e_{xx}+\lambda\theta, \qquad Y_y=2\mu e_{yy}+\lambda\theta, \qquad Z_z=2\mu e_{zz}+\lambda\theta, \tag{9}$$

$$X_y=\mu e_{xy}, \qquad Y_z=\mu e_{yz}, \qquad X_z=\mu e_{xz}, \tag{9'}$$

dove $e_{xx}$, $e_{yy}$, $e_{zz}$, $e_{xy}$, $e_{yz}$, $e_{xz}$ sono le componenti della deformazione definite da

$$(10) \qquad e_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad e_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad e_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z},$$

$$(10') \qquad e_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \qquad e_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \qquad e_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}.$$

Derivando ora la prima delle (8) rispetto ad $x$, la seconda rispetto ad $y$, la terza rispetto a $z$ e tenendo conto delle (10) e delle (9), nonchè della (7′), si hanno le equazioni

$$(11) \qquad \begin{cases} \Delta_2 X_x + \dfrac{2(\lambda + \mu)}{3\lambda + 2\mu} \dfrac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} = 0 \\ \Delta_2 Y_y + \dfrac{2(\lambda + \mu)}{3\lambda + 2\mu} \dfrac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2} = 0 \\ \Delta_2 Z_z + \dfrac{2(\lambda + \mu)}{3\lambda + 2\mu} \dfrac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} = 0, \end{cases}$$

dove è

$$(12) \qquad \frac{2(\lambda + \mu)}{3\lambda + 2\mu} = \frac{1}{1 + \sigma}.$$

Analogamente dalle (8) si ricava

$$(13) \qquad \begin{cases} \Delta_2 X_y + \dfrac{2(\lambda + \mu)}{3\lambda + 2\mu} \dfrac{\partial^2 \Theta}{\partial x \partial y} = 0 \\ \Delta_2 Y_z + \dfrac{2(\lambda + \mu)}{3\lambda + 2\mu} \dfrac{\partial^2 \Theta}{\partial y \partial z} = 0 \\ \Delta_2 X_z + \dfrac{2(\lambda + \mu)}{3\lambda + 2\mu} \dfrac{\partial^2 \Theta}{\partial x \partial z} = 0 . \end{cases}$$

Le componenti degli sforzi in un corpo omogeneo isotropo in equilibrio soddisfano dunque alle equazioni (11) e (13), e da esse, in virtù della (7) e della (3), si ha che dette componenti sono funzioni biarmoniche. Questi risultati, come è noto, risalgono a BELTRAMI.

**2.** – Cerchiamo intanto per le equazioni (11) e (13) delle soluzioni che siano il prodotto di una funzione di $x$, $y$ per una funzione della sola $z$.

Per questo poniamo

$$\Theta = (A\,e^{\alpha z} + B\,e^{-\alpha z})\cdot F(x, y, \alpha), \tag{14}$$

con $A$, $B$, $\alpha$ costanti arbitrarie ed $F$ funzione di $x$, $y$ soddisfacente all'equazione differenziale

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \alpha^2 F = 0. \tag{15}$$

La $\Theta$ definita dalla (14) risulta così, com'è richiesto, una funzione armonica. Le equazioni (11) diventano allora

$$\Delta_2 X_x + \frac{1}{1+\sigma}(A\,e^{\alpha z} + B\,e^{-\alpha z})\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 0,$$

$$\Delta_2 Y_y + \frac{1}{1+\sigma}(A\,e^{\alpha z} + B\,e^{-\alpha z})\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0,$$

$$\Delta_2 Z_z + \frac{\alpha^2}{1+\sigma}(A\,e^{\alpha z} + B\,e^{-\alpha z})\quad F = 0,$$

dalle quali [1], a meno di funzioni armoniche arbitrarie, si ricava

$$X_x = \frac{1}{2\alpha\cdot(1+\sigma)}\left[(A_1 - Az)\,e^{\alpha z} + (B_1 + Bz)\,e^{-\alpha z}\right]\frac{\partial^2 F}{\partial x^2},$$

$$Y_y = \frac{1}{2\alpha\cdot(1+\sigma)}\left[(A_2 - Az)\,e^{\alpha z} + (B_2 + Bz)\,e^{-\alpha z}\right]\frac{\partial^2 F}{\partial y^2},$$

$$Z_z = \frac{\alpha}{2(1+\sigma)}\left[(A_3 - Az)\,e^{\alpha z} + (B_3 + Bz)\,e^{-\alpha z}\right]F,$$

con $A_1$, $B_1$, $A_2$, $B_2$, $A_3$, $B_3$ costanti.

---

(1) Col metodo della variazione delle costanti arbitrarie, cercando un integrale particolare del tipo

$$\frac{1}{1+\sigma}\left[A(z)\cdot e^{\alpha z} + B(z)\cdot e^{-\alpha z}\right]\cdot\mathfrak{F}(x, y),$$

con $\mathfrak{F}(x, y)$ eguale a

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \qquad \alpha^2 F$$

rispettivamente per la 1ª, 2ª, 3ª equazione.

Poichè deve sussistere la (6), tenendo conto della (14) e della (15), si deduce che sarà

$$A_1 = A_2, \qquad B_1 = B_2, \qquad A_3 = A_1 + 2(1 + \sigma)A/\alpha, \qquad B_3 = B_1 + 2(1 + \sigma)B/\alpha .$$

Possiamo assumere quindi

$$(16)\quad \left\{ \begin{aligned} X_x &= \frac{1}{2\alpha\cdot(1+\sigma)} \left[(A_1 - Az)\, e^{\lambda z} + (B_1 + Bz)\, e^{-\lambda z}\right] \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + k_1 \Theta \\ Y_y &= \frac{1}{2\alpha\cdot(1+\sigma)} \left[(A_1 - Az)\, e^{\lambda z} + (B_1 + Bz)\, e^{-\lambda z}\right] \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + k_2 \Theta \\ Z_z &= \left\{ \left[A + \frac{\alpha}{2(1+\sigma)} (A_1 - Az)\right] e^{\lambda z} + \right. \\ &\qquad \left. + \left[B + \frac{\alpha}{2(1+\sigma)} (B_1 + Bz) e^{-\lambda z}\right] \right\} F - (k_1 + k_2)\, \Theta , \end{aligned} \right.$$

con $k_1$ e $k_2$ costanti, e si verifica facilmente che i secondi membri di queste relazioni sono funzioni biarmoniche di $x$, $y$, $z$, essendo sempre la $\Theta$ definita dalla (14) e la $F$ dalla (15).

Osserviamo ora che in virtù delle (9) e (10) dovrà essere:

$$\begin{aligned} e_{xx} &= \partial u/\partial x = (X_x - \lambda\theta)/(2\mu) = [X_x - \lambda\Theta/(3\lambda + 2\mu)]/(2\mu), \\ e_{yy} &= \partial v/\partial y = [Y_y - \lambda\Theta/(3\lambda + 2\mu)]/(2\mu), \\ e_{zz} &= \partial w/\partial z = [Z_z - \lambda\Theta/(3\lambda + 2\mu)]/(2\mu) . \end{aligned}$$

Allora, se si pone $k_1 = k_2 = \lambda/(3\lambda + 2\mu)$, si ha

$$(17)\quad \left\{ \begin{aligned} X_x &= \frac{1}{2\alpha\cdot(1+\sigma)} \left[(A_1 - Az)\, e^{\lambda z} + (B_1 + Bz)\, e^{-\lambda z}\right] \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \\ &\qquad + \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} (A\, e^{\lambda z} + B\, e^{-\lambda z})\, F \\ Y_y &= \frac{1}{2\alpha\cdot(1+\sigma)} \left[(A_1 - Az)\, e^{\lambda z} + (B_1 + Bz)\, e^{-\lambda z}\right] \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \\ &\qquad + \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} (A\, e^{\lambda z} + B\, e^{-\lambda z})\, F \\ Z_z &= \left\{ \left[A + \frac{\alpha}{2(1+\sigma)} (A_1 - Az)\right] e^{\lambda z} + \right. \\ &\qquad \left. + \left[B + \frac{\alpha}{2(1+\sigma)} (B_1 + Bz)\right] e^{-\lambda z} \right\} F - \frac{2\lambda}{3\lambda + 2\mu} (A\, e^{\lambda z} + B\, e^{-\lambda z})\, F \end{aligned} \right.$$

e quindi per le componenti dello spostamento si hanno i valori:

$$(18)\quad \begin{cases} u = \dfrac{1}{4\alpha\mu\cdot(1+\sigma)}\left[(A_1 - Az)\,e^{\alpha z} + (B_1 + Bz)\,e^{-\alpha z}\right]\dfrac{\partial F}{\partial x} \\[2ex] v = \dfrac{1}{4\alpha\mu\cdot(1+\sigma)}\left[(A_1 - Az)\,e^{\alpha z} + (B_1 + Bz)\,e^{-\alpha z}\right]\dfrac{\partial F}{\partial y} \\[2ex] w = \dfrac{1}{2\alpha\mu}\left\{\left[\left(\dfrac{2\mu}{3\lambda+2\mu} + \dfrac{1}{2(1+\sigma)}\right)A + \dfrac{\alpha}{2(1+\sigma)}(A_1 - Az)\right]e^{\alpha z} - \right. \\[2ex] \qquad\left. - \left[\left(\dfrac{2\mu}{3\lambda+2\mu} + \dfrac{1}{2(1+\sigma)}\right)B + \dfrac{\alpha}{2(1+\sigma)}(B_1 + Bz)\right]e^{-\alpha z}\right\} F\,. \end{cases}$$

Ne segue ancora, in virtù delle (9′) e (10′),

$$(19)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{\mu}X_y = e_{xy} = \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x} = \\[2ex] \qquad = \dfrac{1}{2\alpha\mu\cdot(1+\sigma)}\left[(A_1 - Az)\,e^{\alpha z} + (B_1 + Bz)\,e^{-\alpha z}\right]\dfrac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y} \\[2ex] \dfrac{1}{\mu}X_z = e_{xz} = \dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial x} = \dfrac{1}{2\alpha\mu\cdot(1+\sigma)}\left\{\left[\dfrac{\mu}{\lambda+\mu}A + \alpha\cdot(A_1 - Az)\right]\cdot e^{\alpha z} - \right. \\[2ex] \qquad\left. - \left[\dfrac{\mu}{\lambda+\mu}B + \alpha\cdot(B_1 + Bz)\right]e^{-\alpha z}\right\}\dfrac{\partial F}{\partial x} \\[2ex] \dfrac{1}{\mu}Y_z = e_{yz} = \dfrac{\partial v}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial y} = \dfrac{1}{2\alpha\mu\cdot(1+\sigma)}\left\{\left[\dfrac{\mu}{\lambda+\mu}A + \alpha\cdot(A_1 - Az)\right]e^{-\alpha z} - \right. \\[2ex] \qquad\left. - \left[\dfrac{\mu}{\lambda+\mu}B + \alpha\cdot(B_1 + Bz)\right]e^{-\alpha z}\right\}\dfrac{\partial F}{\partial y}\,, \end{cases}$$

ed i valori delle componenti degli sforzi $X_y$, $X_z$, $Y_z$ definiti da queste relazioni soddisfano identicamente le equazioni (13). Si verifica infine che i valori trovati delle sei componenti degli sforzi soddisfano alle equazioni (1) dell'equilibrio elastico.

Una soluzione più generale del problema si otterrà considerando le costanti $A$, $B$, $A_1$, $B_1$, funzioni arbitrarie di $\alpha$, ponendo $\alpha = \sqrt{p^2 + q^2}$ e quindi:

$$
(20)\quad \left\{
\begin{aligned}
X_x &= \int_0^\infty\!\!\int_0^\infty \Big\{ \frac{1}{2\alpha\cdot(1+\sigma)} \left[(A_1 - Az)\,\mathrm{e}^{\alpha z} + (B_1 + Bz)\,\mathrm{e}^{-\alpha z}\right] \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \\
&\qquad\qquad + \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu}\left(A\,\mathrm{e}^{\alpha z} + B\,\mathrm{e}^{-\alpha z}\right) F \Big\}\,\mathrm{d}p\,\mathrm{d}q \\
Y_y &= \int_0^\infty\!\!\int_0^\infty \Big\{ \frac{1}{2\alpha\cdot(1+\sigma)} \left[(A_1 - Az)\,\mathrm{e}^{\alpha z} + (B_1 + Bz)\,\mathrm{e}^{-\alpha z}\right] \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \\
&\qquad\qquad + \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu}\left(A\,\mathrm{e}^{\alpha z} + B\,\mathrm{e}^{-\alpha z}\right) F \Big\}\,\mathrm{d}p\,\mathrm{d}q \\
Z_z &= \int_0^\infty\!\!\int_0^\infty \Big\{ \left[A + \frac{\alpha}{2(1+\sigma)}(A_1 - Az)\right] \mathrm{e}^{\alpha z} + \\
&\quad + \left[B + \frac{\alpha}{2(1+\sigma)}(B_1 + Bz)\right] \mathrm{e}^{-\alpha z} - \frac{2\lambda}{3\lambda + 2\mu}\left(A\,\mathrm{e}^{\alpha z} + B\,\mathrm{e}^{-\alpha z}\right)\Big\}\, F\,\mathrm{d}p\,\mathrm{d}q,
\end{aligned}
\right.
$$

$$
(20')\quad \left\{
\begin{aligned}
X_y &= \frac{1}{2(1+\sigma)} \int_0^\infty\!\!\int_0^\infty \left[(A_1 - Az)\,\mathrm{e}^{\alpha z} + (B_1 + Bz)\,\mathrm{e}^{-\alpha z}\right] \frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}\,\frac{\mathrm{d}p\,\mathrm{d}q}{\sqrt{p^2+q^2}} \\
X_z &= \frac{1}{2(1+\sigma)} \int_0^\infty\!\!\int_0^\infty \Big\{ \left[\frac{\mu}{\lambda+\mu} A + \alpha\cdot(A_1 - Az)\right] \mathrm{e}^{\alpha z} - \\
&\qquad - \left[\frac{\mu}{\lambda+\mu} B + \alpha\cdot(B_1 + Bz)\right] \mathrm{e}^{-\alpha z} \Big\} \frac{\partial F}{\partial x}\,\frac{\mathrm{d}p\,\mathrm{d}q}{\sqrt{p^2+q^2}} \\
Y_z &= \frac{1}{2(1+\sigma)} \int_0^\infty\!\!\int_0^\infty \Big\{ \left[\frac{\mu}{\lambda+\pi} A + \alpha\cdot(A_1 - Az)\right] \mathrm{e}^{\alpha z} - \\
&\qquad - \left[\frac{\mu}{\lambda+\mu} B + \alpha\cdot(B_1 + Bz)\right] \mathrm{e}^{-\alpha z} \Big\} \frac{\partial F}{\partial y}\,\frac{\mathrm{d}p\,\mathrm{d}q}{\sqrt{p^2+q^2}},
\end{aligned}
\right.
$$

ed analogamente per le componenti $u$, $v$, $w$ dello spostamento.

**3.** – La soluzione ultima ottenuta ci permette di risolvere il problema della determinazione degli sforzi in uno strato del suolo, considerato come un corpo elastico isotropo, nell'ipotesi che esso poggi su un piano orizzontale *rigido* e che sulla superficie superiore $z = 0$ sia sollecitato da un carico normale statico $P(x, y)$ distribuito su un rettangolo col centro nell'origine e coi lati $2a$, $2b$ paralleli agli assi coordinati $x$, $y$.

Indicando con $c$ la profondità dello strato, si hanno le condizioni

$$X_y = 0, \qquad X_z = 0, \qquad Y_z = 0, \qquad \text{per} \qquad z = 0, \tag{21}$$

$$w = 0 \qquad \text{per} \qquad z = c, \tag{22}$$

$$Z_z = -P(x, y) \qquad \text{per} \qquad z = 0, \tag{23}$$

dove $P(x, y)$ è definita nel rettangolo $-a \leqslant x \leqslant a$, $-b \leqslant y \leqslant b$ ed è *nulla* all'esterno di questo rettangolo. Sulla superficie inferiore $z = c$ si suppone che gli sforzi siano equilibrati dalle forze di attrito che si generano sul piano d'appoggio.

Le condizioni (21) e (22) porgono

$$A_1 + B_1 = 0, \qquad \frac{\mu}{\lambda + \mu} A + \alpha A_1 - \left(\frac{\mu}{\lambda + \mu} B + \alpha B_1\right) = 0,$$

$$\left[\left(\frac{2\mu}{3\lambda + 2\mu} + \frac{1}{2(1+\sigma)}\right) A + \frac{\alpha}{2(1+\sigma)} (A_1 - Ac)\right] e^{\alpha c} -$$

$$- \left[\left(\frac{2\mu}{3\lambda + 2\mu} + \frac{1}{2(1+\sigma)}\right) B + \frac{\alpha}{2(1+\sigma)} (B_1 + Bc)\right] e^{-\alpha c} = 0,$$

dalla prima delle quali si ricava

$$A_1 = -B_1 = -\frac{\mu}{2\alpha \cdot (\lambda + \mu)} (A - B).$$

Dall'ultima, che si può scrivere

$$[(\lambda + 3\mu)A + \alpha \cdot (\lambda + \mu)(A_1 - Ac)]\, e^{\alpha c} -$$

$$- [(\lambda + 3\mu)B + \alpha \cdot (\lambda + \mu)(B_1 + Bc)]\, e^{-\alpha c} = 0,$$

si ottiene

$$B = \frac{[(\lambda + 2\mu) - \alpha c \cdot (\lambda + \mu)] \cdot \mathrm{Ch}\,(\alpha c) + [(\lambda + 3\mu) - \alpha c \cdot (\lambda + \mu)] \cdot \mathrm{Sh}\,(\alpha c)}{[(\lambda + 2\mu) + \alpha c \cdot (\lambda + \mu)] \cdot \mathrm{Ch}\,(\alpha c) - [(\lambda + 3\mu) + \alpha c \cdot (\lambda + \mu)] \cdot \mathrm{Sh}\,(\alpha c)}\, A \tag{24}$$

e quindi

$$(25) \qquad A_1 = - B_1 =$$

$$= \frac{\mu}{\alpha\cdot(\lambda+\mu)} \frac{(\lambda+3\mu)\cdot \mathrm{Sh}\,(\alpha c) - \alpha c\cdot(\lambda+\mu)\cdot \mathrm{Ch}\,(\alpha c)}{[(\lambda+2\mu)+\alpha c\cdot(\lambda+\mu)]\cdot \mathrm{Ch}\,(\alpha c) - [(\lambda+3\mu)+\alpha c\cdot(\lambda+\mu)]\cdot \mathrm{Sh}\,(\alpha c)}\, A\,.$$

La condizione (23) porge infine

$$(Z_z)_{z=0} \equiv \int_0^\infty\!\!\int_0^\infty \left\{ A + \frac{\alpha}{2(1+\sigma)} A_1 + B + \frac{\alpha}{2(1+\sigma)} B_1 - \right.$$

$$\left. - \frac{2\lambda}{3\lambda+2\mu}(A+B) \right\} F(x,\,y,\,p,\,q)\,\mathrm{d}p\,\mathrm{d}q = - P(x,\,y)$$

cioè, dopo facili semplificazioni,

$$(26) \qquad P(x,\,y) = -\frac{\lambda+2\mu}{3\lambda+2\mu}\int_0^\infty\!\!\int_0^\infty (A+B)\,F(x,\,y,\,p,\,q)\,\mathrm{d}p\,\mathrm{d}q$$

con

$$(27) \qquad A + B = \frac{2(\lambda+2\mu)\cdot \mathrm{Ch}\,(\alpha c) - 2\alpha c\cdot(\lambda+\mu)\cdot \mathrm{Sh}\,(\alpha c)}{[(\lambda+2\mu)+\alpha c\cdot(\lambda+\mu)]\cdot \mathrm{Ch}\,(\alpha c) - [(\lambda+3\mu)+\alpha c\cdot(\lambda+\mu)]\cdot \mathrm{Sh}\,(\alpha c)}\, A$$

ed $\alpha = \sqrt{p^2+q^2}$.

La funzione $F$ dovrà verificare l'equazione (15) con $\alpha^2 = p^2 + q^2$, cioè l'equazione

$$(28) \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + (p^2+q^2)\,F = 0$$

che ammette l'integrale

$$(29) \qquad F = M\cdot\cos(px)\cdot\cos(qy) + N\cdot\cos(px)\cdot\mathrm{sen}\,(qy) +$$

$$+ R\cdot\mathrm{sen}\,(px)\cdot\cos(qy) + S\cdot\mathrm{sen}\,(px)\cdot\mathrm{sen}\,(qy),$$

con $M$, $N$, $R$, $S$ costanti funzioni di $p$ e $q$.

Ponendo ancora

$$(30) \qquad -\frac{\lambda + 2\mu}{3\lambda + 2\mu}(A + B)\cdot \begin{cases} M = m(p,\ q) \\ N = n(p,\ q) \\ R = r(p,\ q) \\ S = s(p,\ q), \end{cases}$$

la (26) diventa

$$(31) \qquad P(x,\ y) = \int_0^\infty \int_0^\infty [m(p,\ q)\cdot\cos(px)\cdot\cos(qy) + n(p,\ q)\cdot\cos(px)\cdot\operatorname{sen}(qy) +$$

$$+ r(p,\ q)\cdot\operatorname{sen}(px)\cdot\cos(qy) + s(p,\ q)\cdot\operatorname{sen}(px)\cdot\operatorname{sen}(qy)]\,\mathrm{d}p\,\mathrm{d}q\,.$$

Per determinare i coefficienti $m$, $n$, $r$, $s$ supponiamo che la funzione $P(x,\ y)$ sia rappresentabile mediante un integrale di FOURIER, sia rispetto ad $x$ che rispetto ad $y$. Avremo allora:

$$(32) \qquad P(x,\ y) = \int_0^\infty [\varphi(p,\ y)\cdot\cos(px) + \psi(p,\ y)\cdot\operatorname{sen}(px)]\,\mathrm{d}p,$$

con

$$(32') \quad \begin{cases} \varphi(p,\ y) = (1/\pi)\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} P(x,\ y)\cdot\cos(px)\,\mathrm{d}x = (1/\pi)\int_{-a}^{a} P(x,\ y)\cdot\cos(px)\,\mathrm{d}x \\ \psi(p,\ y) = (1/\pi)\displaystyle\int_{-a}^{a} P(x,\ y)\cdot\operatorname{sen}(px)\,\mathrm{d}x\,. \end{cases}$$

Analogamente sarà:

$$(33) \qquad \varphi(p,\ y) = \int_0^\infty [f(p,\ q)\cdot\cos(qy) + g(p,\ q)\cdot\operatorname{sen}(qy)]\,\mathrm{d}q,$$

con

$$(33')\quad \begin{cases} f(p,\ q) = (1/\pi) \displaystyle\int_{-b}^{b} \varphi(p,\ y)\cdot\cos(qy)\,\mathrm{d}y = \\ \qquad\qquad = (1/\pi^2) \displaystyle\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b} P(x,\ y)\cdot\cos(px)\cdot\cos(qy)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ g(p,\ q) = (1/\pi) \displaystyle\int_{-b}^{b} \varphi(p,\ y)\cdot\mathrm{sen}\,(qy)\,\mathrm{d}y = \\ \qquad\qquad = (1/\pi^2) \displaystyle\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b} P(x,\ y)\cdot\cos(px)\cdot\mathrm{sen}\,(qy)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,, \end{cases}$$

e

$$(34)\qquad \psi(p,\ y) = \int_0^{\infty} [h(p,\ q)\cdot\cos(qy) + k(p,\ q)\cdot\mathrm{sen}\,(qy)]\,\mathrm{d}q,$$

con

$$(34')\quad \begin{cases} h(p,\ q) = (1/\pi) \displaystyle\int_{-b}^{b} \psi(p,\ y)\cdot\cos(qy)\,\mathrm{d}y = \\ \qquad\qquad = (1/\pi^2) \displaystyle\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b} P(x,\ y)\cdot\mathrm{sen}\,(px)\cdot\cos(qy)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ k(p,\ q) = (1/\pi) \displaystyle\int_{-b}^{b} \psi(p,\ y)\cdot\mathrm{sen}\,(qy)\,\mathrm{d}y = \\ \qquad\qquad = (1/\pi^2) \displaystyle\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b} P(x,\ y)\cdot\mathrm{sen}\,(px)\cdot\mathrm{sen}\,(qy)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,. \end{cases}$$

Quindi, in virtù delle (33) e (34), la (32) si può scrivere

$$(35)\qquad P(x,\ y) = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} \{ f(p,\ q)\cdot\cos(px)\cdot\cos(qy) + g(p,\ q)\cdot\cos(px)\cdot\mathrm{sen}\,(qy) +$$
$$+ h(p,\ q)\cdot\mathrm{sen}\,(px)\cdot\cos(qy) + k(p,\ q)\cdot\mathrm{sen}\,(px)\cdot\cos(qy) \}\,\mathrm{d}p\,\mathrm{d}q,$$

dove le funzioni $f(p,\ q)$, $g(p,\ q)$, $h(p,\ q)$, $k(p,\ q)$ sono espresse per mezzo di $P(x,\ y)$ dalle $(33')$ e $(34')$.

Confrontando ora la (31) con la (35) si ha

$$m(p,\ q) = f(p,\ q), \quad n(p,\ q) = g(p,\ q), \quad r(p,\ q) = h(p,\ q), \quad s(p,\ q) = k(p,\ q),$$

e quindi, per le (30),

$$(36) \qquad \left\{ \begin{aligned} M &= -\frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + 2\mu} \frac{f(p,\ q)}{A + B} \\ N &= -\frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + 2\mu} \frac{g(p,\ q)}{A + B} \\ R &= -\frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + 2\mu} \frac{h(p,\ q)}{A + B} \\ S &= -\frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + 2\mu} \frac{k(p,\ q)}{A + B}\,. \end{aligned} \right.$$

Il problema nel caso considerato risulta così risoluto.

**4.** – Nel caso particolare in cui il carico $P(x,\ y)$ è simmetrico rispetto all'asse $x$, $P(x,\ -y) = P(x,\ y)$, risulta $g = 0$, $k = 0$, e si ha quindi

$$P(x,\ y) = \int_0^\infty \int_0^\infty [f(p,\ q)\cdot\cos(px) + h(p,\ q)\cdot\mathrm{sen}\,(px)]\cos(qy)\,\mathrm{d}p\,\mathrm{d}q\,.$$

Nel caso invece in cui il carico è simmetrico rispetto all'asse $y$, si ha $h = 0$, $k = 0$, e quindi

$$P(x,\ y) = \int_0^\infty \int_0^\infty [f(p,\ q)\cdot\cos(qy) + g(p,\ q)\cdot\mathrm{sen}\,(qy)]\cos(px)\,\mathrm{d}p\,\mathrm{d}q\,.$$

Nel caso infine in cui il carico è simmetrico rispetto ad entrambi gli assi, si ha $g = 0$, $h = 0$, $k = 0$ e

$$P(x,\ y) = \int_0^\infty \int_0^\infty f(p,\ q)\cdot\cos(px)\cdot\cos(qx)\,\mathrm{d}p\,\mathrm{d}q\,.$$

Come applicazione consideriamo il carico « paraboloidale » (simmetrico rispetto agli assi $x$ ed $y$) in cui:

$$P = P_0 \cdot [1 - (x^2/a^2)] \qquad \text{per} \quad -a \leqslant x \leqslant a, \quad |y| \leqslant b\,|x|/a,$$

$$P = P_0 \cdot [1 - (y^2/b^2)] \qquad \text{per} \quad -b \leqslant y \leqslant b, \quad |x| \leqslant a\,|y|/b,$$

con $P_0 = \text{cost.}$. In questo caso, essendo $y = bx/a$ ed $y = -bx/a$ le equazioni delle diagonali del rettangolo, la prima delle (33′) porge

$$f = \frac{P_0}{\pi^2} \int_{-a}^{0} \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \cdot \cos(px)\, \mathrm{d}x \int_{bx/a}^{-bx/a} \cos(qy)\, \mathrm{d}y +$$

$$+ \frac{P_0}{\pi^2} \int_{0}^{a} \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \cdot \cos(px)\, \mathrm{d}x \int_{-bx/a}^{bx/a} \cos(qy)\, \mathrm{d}y +$$

$$+ \frac{P_0}{\pi^2} \int_{-b}^{0} \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right) \cdot \cos(qy)\, \mathrm{d}y \int_{ay/b}^{-ay/b} \cos(px)\, \mathrm{d}x +$$

$$+ \frac{P_0}{\pi^2} \int_{0}^{b} \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right) \cdot \cos(qy)\, \mathrm{d}y \int_{-ay/b}^{ay/b} \cos(px)\, \mathrm{d}x =$$

$$= \frac{2P_0}{\pi^2} \int_{0}^{a} \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \cdot \cos(px)\, \mathrm{d}x \int_{-bx/a}^{bx/a} \cos(qy)\, \mathrm{d}y +$$

$$+ \frac{2P_0}{\pi^2} \int_{0}^{b} \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right) \cdot \cos(qy)\, \mathrm{d}y \int_{-ay/b}^{ay/b} \cos(px)\, \mathrm{d}x\,.$$

Il primo integrale a secondo membro, che indicheremo con $f_1$, si trasforma nel secondo, che indicheremo con $f_2$, scambiando ordinatamente $a$ con $b$ e $p$ con $q$; basterà quindi calcolare il primo e da esso dedurre il secondo. Ora essendo

$$f_1 = \frac{2P_0 a}{\pi^2 q} \left\{ \frac{\cos(ap+bq)}{ap+bq} - \frac{2\,\mathrm{sen}\,(ap+bq)}{(ap+bq)^2} - \frac{2\cos(ap+bq)}{(ap+bq)^3} + \frac{2}{(ap+bq)^3} + \right.$$

$$\left. + \frac{\cos(bq-ap)}{bq-ap} - \frac{2\,\mathrm{sen}\,(bq-ap)}{(bq-ap)^2} - \frac{2\cos(bq-ap)}{(bq-ap)^3} + \frac{2}{(bq-ap)^3} \right\}$$

e quindi

$$f_2 = \frac{2P_0 b}{\pi^2 p} \left\{ \frac{\cos(ap+bq)}{ap+bq} - \frac{2\,\mathrm{sen}\,(ap+bq)}{(ap+bq)^2} - \frac{2\cos(ap+bq)}{(ap+bq)^3} + \frac{2}{(ap+bq)^3} + \right.$$

$$\left. + \frac{\cos(ap-bq)}{ap-bq} - \frac{2\,\mathrm{sen}\,(ap-bq)}{(ap-bq)^2} - \frac{2\cos(ap-bq)}{(ap-bq)^3} + \frac{2}{(ap-bq)^3} \right\};$$

sarà così

$$f = f_1 + f_2 = \frac{2P_0}{\pi^2}\,\frac{1}{pq} \left\{ \cos(ap+bq) - \frac{2\,\mathrm{sen}\,(ap+bq)}{ap+bq} - \frac{2\cos(ap+bq)}{(ap+bq)^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{2}{(ap+bq)^2} - \cos(ap-bq) + \frac{2\,\mathrm{sen}\,(ap-bq)}{ap-bq} + \frac{2\cos(ap-bq)}{(ap-bq)^2} - \frac{2}{(ap-bq)^2} \right\},$$

espressione simmetrica, come era da attendersi, rispetto ad $a$ e $b$ e rispetto a $p$ e $q$.

## Summary.

**In this paper is considered the tridimensional determination of the stresses and strains in an indefinite layer of soil, behaving as an elastic isotropic body and resting on a rigid level, no subjected to body force, supposing that on the plane higher surface it is solicited by a static load distributed on a rectangular area; the complete determination of the stresses is obtained by means of a double Fourier integral. I also take into consideration special cases of symmetric distributions.**