Riv. Mat. Univ. Parma 8 (1957), 93-98

SANTA CALAFIORE (*)

Dipendenza lineare e wronskiani nell' ambito della pluriderivazione. (**)

È stato notato [1] che la pluriderivazione generale presenta importanti parallelismi con il suo caso più semplice dato dalla derivazione (rispetto a una determinata variabile). In relazione con ciò mi sono domandata quale generalizzazione abbia, nell'ambito della pluriderivazione, il concetto di « dipendenza lineare di un numero finito di funzioni di una variabile indipendente » e quali ne siano le relative conseguenze. Rispondo a questo nella presente breve Nota: a tale scopo

1°) propongo (vedasi n. **2**) una definizione per la *dipendenza lineare di un numero finito di funzioni di più variabili, in un certo campo e secondo un dato pluriderivatore*;

2°) provo, su la base della precedente definizione, che *le considerazioni relative a tale dipendenza lineare generalizzata, unitamente alla estensione del concetto di wronskiano, procedono parallelamente al caso delle funzioni di una sola variabile indipendente.*

1. – Per le generalità su la pluriderivazione rimando al lavoro richiamato precedentemente. In particolare, qui ha uno speciale interesse il concetto di « costante pluriderivazionale », precisamente il concetto di « costante per un prefissato pluriderivatore

$$A_1(x_1, \dots, x_n)\frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + A_n(x_1, \dots, x_n)\frac{\partial}{\partial x_n} \text{ »},$$

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università, Parma, Italia.
(**) Ricevuto il 3-II-1957.
(1) A. MAMBRIANI, *La pluriderivazione e una classificazione delle equazioni differenziali*, Riv. Mat. Univ. Parma **6** (1955), 321-348.

la quale è una qualunque funzione $z = z(x_1, \ldots, x_n)$ tale che si abbia

$$A_1(x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial z}{\partial x_1} + \ldots + A_n(x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial z}{\partial x_n} = 0$$

nel campo di definizione dei coefficienti $A_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, A_n(x_1, \ldots, x_n)$ del pluriderivatore.

Considerando per semplicità un biderivatore

$$\mathfrak{D} \equiv A(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + B(x, y) \frac{\partial}{\partial y},$$

si trova che le costanti per $\mathfrak{D}$ sono tutte e sole le funzioni della forma

$$K(x, y) \equiv \Omega(k(x, y)),$$

dove $k(x, y)$ è un'opportuna costante per $\mathfrak{D}$ e $\Omega(t)$ è una funzione derivabile arbitraria. Ad esempio, le costanti per i biderivatori

$$a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y} \quad (a,\ b \text{ costanti rispetto ad } x \text{ e } y, \text{ e non nulle}), \qquad x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}$$

sono date, rispettivamente, da [2]

$$\Omega\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right), \qquad \Omega\left(\frac{x}{y}\right)$$

al variare della funzione derivabile $\Omega(t)$.

Essendo $K(x, y)$ una costante per $\mathfrak{D}$ e $f(x, y)$ una funzione derivabile, si ha

$$\mathfrak{D}\left\{K(x, y) \cdot f(x, y)\right\} = K(x, y) \cdot \mathfrak{D} f(x, y).$$

2. – Ciò premesso, limitandomi — per semplicità di enunciazione — alle funzioni di due variabili indipendenti x e y, pongo la seguente

Definizione. Fissato un biderivatore

$$\mathfrak{D} \equiv A(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + B(x, y) \frac{\partial}{\partial y} \tag{1}$$

---

[2] Cfr. loc. cit. in [1], pp. 12-13.

con $A(x, y)$ e $B(x, y)$ definite in un certo campo R del piano (x, y), siano

$$(2) \qquad f_1 = f_1(x, y), \qquad f_2 = f_2(x, y), \qquad \ldots, \qquad f_n = f_n(x, y)$$

delle funzioni definite in un campo $R_0 \subseteq R$. Si dirà che *le n funzioni* (2) *sono linearmente dipendenti nel campo* R_0, *secondo il biderivatore* $\mathfrak{D}$, se esistono n costanti per $\mathfrak{D}$ (vedasi n. **1**)

$$K_1(x, y), \qquad K_2(x, y), \qquad \ldots, \qquad K_n(x, y),$$

mai contemporaneamente nulle in uno stesso punto di R_0 e tali che sia

$$(3) \qquad K_1(x, y)\cdot f_1(x, y) + K_2(x, y)\cdot f_2(x, y) + \ldots + K_n(x, y)\cdot f_n(x, y) \equiv 0$$

per ogni $(x, y) \in R_0$.

In caso opposto si dice che *le n funzioni* (2) *sono linearmente indipendenti nel campo* R_0, *secondo il biderivatore* $\mathfrak{D}$.

Esempio 1°. Le funzioni $\operatorname{sen}(x + 2y)$, $\cos(x + 2y)$ sono *linearmente indipendenti nel quadrante* $\{x > 0,\ y > 0\}$, secondo il biderivatore

$$\mathfrak{D} \equiv x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}.$$

Infatti, esistano — se è possibile — due costanti per $\mathfrak{D}$ (vedasi la fine del n. **1**), siano $\Omega_1(x/y)$ e $\Omega_2(x/y)$, mai contemporaneamente nulle in uno stesso punto del quadrante $\{x > 0,\ y > 0\}$, in modo da aversi

$$\Omega_1(x/y)\cdot \operatorname{sen}(x + 2y) + \Omega_2(x/y)\cdot \cos(x + 2y) \equiv 0$$

in tutto il detto quadrante. Allora, detto (x_0, y_0) un punto di questo quadrante in cui $\Omega_1(x_0/y_0) \neq 0$, esisterebbe per tale punto un intorno $R_0 \subseteq \{x > 0,\ y > 0\}$ in cui sarebbe

$$\operatorname{sen}(x + 2y) + \{\Omega_2(x/y)/\Omega_1(x/y)\}\cdot \cos(x + 2y) \equiv 0$$

ed anche, in ogni punto $(x, y) \in R_0$ in cui $\operatorname{tg}(x + 2y)$ è definita,

$$\operatorname{tg}(x + 2y) \equiv -\Omega_2(x/y)/\Omega_1(x/y) = (\text{costante per } \mathfrak{D}),$$

ciò che non è.

Esempio 2°. Si vede subito che le funzioni

$$\operatorname{sen}(x+2y), \qquad \cos(x+2y), \qquad \operatorname{sen}(x+2y)+(x/y)\cdot\cos(x+2y)$$

sono *linearmente dipendenti* nel quadrante $\{x>0,\ y>0\}$, secondo il biderivatore $\mathfrak{D}$ dell'esempio precedente.

Esempio 3°. Per il seguito è utile notare che le due funzioni

$$f_1(x,y)\equiv\begin{cases}(x+y)^2 & \text{per} \quad x+y>0\,,\\ 0 & \text{per} \quad x+y\leqslant 0\,,\end{cases}$$

$$f_2(x,y)\equiv\begin{cases}0 & \text{per} \quad x+y>0\,,\\ (x+y)^2 & \text{per} \quad x+y\leqslant 0\,,\end{cases}$$

sono *linearmente indipendenti* in tutto il piano (x, y), secondo il biderivatore

$$\mathfrak{D}\equiv\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\,.$$

Infatti, esistano — se è possibile — due costanti per tale $\mathfrak{D}$ (vedasi la fine del n. **1**), siano $\Omega_1(x-y)$ e $\Omega_2(x-y)$, mai contemporaneamente nulle in uno stesso punto, in modo da aversi

$$\Omega_1(x-y)\cdot f_1(x,y)+\Omega_2(x-y)\cdot f_2(x,y)=0$$

per ogni punto (x, y), ossia

$$\Omega_1(x-y)\cdot(x+y)^2=0 \qquad \text{per} \qquad x+y>0,$$

$$\Omega_2(x-y)\cdot(x+y)^2=0 \qquad \text{per} \qquad x+y\leqslant 0\,.$$

Seguirebbe necessariamente

$$\Omega_1(x-y)=0 \quad \text{per} \quad x+y>0, \qquad \Omega_2(x-y)=0 \quad \text{per} \quad x+y<0$$

e, per la continuità di $\Omega_1(t)$ e $\Omega_2(t)$, si avrebbe

$$\Omega_1(x-y)=\Omega_2(x-y)=0 \qquad \text{per} \qquad x+y=0\,,$$

in contrasto con l'ipotesi fatta su $\Omega_1(x-y)$ e $\Omega_2(x-y)$.

3. – Il biderivatore $\mathfrak{D}$, dato da (1), abbia ora i suoi cofficienti derivabili fino all'ordine $n-2$ nel campo R del piano (x, y), onde esisteranno in tale campo le successive potenze d'iterazione $\mathfrak{D}^2, \mathfrak{D}^3, \ldots, \mathfrak{D}^{n-1}$. Inoltre le n funzioni (2) nel campo $R_0 \subseteq R$ siano ora derivabili fino all'ordine $n-1$.

In ogni punto $(x, y) \in R_0$ si può allora considerare il determinante

$$W_{\mathfrak{D}}[f_1, f_2, \ldots, f_n] = \begin{vmatrix} f_1(x, y) & f_2(x, y) & \ldots & f_n(x, y) \\ \mathfrak{D}f_1(x, y) & \mathfrak{D}f_2(x, y) & \ldots & \mathfrak{D}f_n(x, y) \\ \mathfrak{D}^2f_1(x, y) & \mathfrak{D}^2f_2(x, y) & \ldots & \mathfrak{D}^2f_n(x, y) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \mathfrak{D}^{n-1}f_1(x, y) & \mathfrak{D}^{n-1}f_2(x, y) & \ldots & \mathfrak{D}^{n-1}f_n(x, y) \end{vmatrix}, \tag{4}$$

che si dirà il *Wronskiano (biderivazionale), secondo* $\mathfrak{D}$, *delle funzioni* (2).

Analogamente a quanto si fa per i comuni Wronskiani, si provano facilmente le proprietà seguenti:

1°) *Se* $\varphi = \varphi(x, y)$ *è una funzione derivabile in* R_0 *fino all'ordine* $n-1$, *si ha*

$$W_{\mathfrak{D}}[\varphi f_1, \varphi f_2, \ldots, \varphi f_n] = \varphi^n \cdot W_{\mathfrak{D}}[f_1, f_2, \ldots, f_n]. \tag{5}$$

2°) *Se le funzioni* (2) *sono derivabili in* R_0 *fino all'ordine* n, *la biderivata*

$$\mathfrak{D}W_{\mathfrak{D}}[f_1, f_2, \ldots, f_n]$$

s'ottiene dal secondo membro di (4) *sostituendo nella sua ultima riga alle biderivate* $(n-1)$*-esime le biderivate* n*-esime.*

3°) *Se* $\alpha = \alpha(x, y)$ *è una funzione derivabile in* R_0 *fino all'ordine* $n-2$, *si ha*

$$W_{\alpha\mathfrak{D}}[f_1, f_2, \ldots, f_n] = \alpha^{n(n-1)/2} \cdot W_{\mathfrak{D}}[f_1, f_2, \ldots, f_n]. \tag{6}$$

Ciò segue facilmente osservando che risulta

$$\underline{(\alpha\mathfrak{D})^m} f_r = \sum_{1}^{m} {}_k \lambda_k \cdot \mathfrak{D}^k f_r \qquad (m = 1, 2, \ldots, n-1; \quad r = 1, 2, \ldots, n),$$

dove $\underline{(\alpha\mathfrak{D})^m}$ è la iterata d'ordine m di $\alpha\mathfrak{D}$ e le $\lambda_k = \lambda_k(x, y)$ sono determinate funzioni indipendenti da f_r.

4. – Per il biderivatore $\mathfrak{D}$ dato da (1) e per le funzioni (2) supponiamo continuino a valere le ipotesi fatte al principio del n. precedente. Allora, *condizione necessaria per la lineare dipendenza delle funzioni* (2) *nel campo* R_0, *secondo il biderivatore* $\mathfrak{D}$, *è che sia*

$$W_{\mathfrak{D}}[f_1, f_2, \ldots, f_n] = 0 \qquad \textit{per ogni} \qquad (x, y) \in R_0. \tag{7}$$

La dimostrazione è in tutto analoga a quella che si fa nel caso in cui $\mathfrak{D}$ sia semplicemente un derivatore.

La (7) *non è però condizione sufficiente per concludere la lineare dipendenza delle funzioni* (2) *nel campo* R_0, *secondo il biderivatore* $\mathfrak{D}$. Infatti, riprendiamo l'Esempio 3° del n. **2**: il Wronskiano $W_{\mathfrak{D}}[f_1(x, y), f_2(x, y)]$ è uguale a

$$\begin{vmatrix} (x+y)^2 & 0 \\ 4(x+y) & 0 \end{vmatrix} \qquad \text{per} \qquad x + y > 0\,,$$

$$\begin{vmatrix} 0 & (x+y)^2 \\ 0 & 4(x+y) \end{vmatrix} \qquad \text{per} \qquad x + y \leqslant 0\,,$$

onde tale Wronskiano è sempre nullo, tuttavia abbiamo visto che le funzioni $f_1(x, y)$ e $f_2(x, y)$ sono linearmente indipendenti in tutto il piano (x, y), per il biderivatore $\mathfrak{D}$ considerato.