Riv. Mat. Univ. Parma 8 (1957), 145-160

GIANFRANCO CAPRIZ (*)

Alcune osservazioni sulla instabilità di una trave sollecitata a torsione. (**)

Vari Autori hanno preso in considerazione, anche di recente, il problema della stabilità di una trave elastica sollecitata a torsione. L'esame di tale problema, posto ormai da più di settanta anni (1), ha ancora interesse dato che non se ne è potuta indicare una soluzione completamente soddisfacente.

Ciò forse è dovuto in parte al fatto che, nello studio di questioni di instabilità, come quello che qui si considera, si è soliti prendere a modello il caso (che noi chiameremo brevemente nel seguito *caso di Eulero*) della trave soggetta a carico di punta, e quindi a pensare che la instabilità sia sempre accompagnata dalla non unicità del problema statico; mentre il comportamento della trave soggetta a torsione ha carattere ben diverso e sembra che ne sia necessario un esame dinamico.

Ma anche se si affronta il problema da questo punto di vista più completo si ottengono talvolta dei risultati in netto contrasto con l'esperienza (2); tanto che H. ZIEGLER ha proposto degli adattamenti nelle condizioni al contorno, adattamenti suggeriti dal comportamento dei dispositivi che consentono, in pratica, la applicazione delle coppie torcenti (3).

(*) Indirizzo: 11 Churchill Way, Rising Brook, Stafford, Inghilterra.

(**) Ricevuto il 15-IV-1957.

(1) La Memoria *On the Strength of Shafting when exposed both to Torsion and to End Thrust* di A. G. GREENHILL è nel Vol. **182** dei «Proc. Inst. Mech. Eng.» pubblicato nel 1883.

(2) Si veda la Memoria: H. ZIEGLER, *Stabilitätsprobleme bei geraden Stäben und Wellen*, Z. Angew. Math. Physik **2** (1951), 265-289.

(3) H. ZIEGLER, *Knickung gerader Stäbe unter Torsion*, Z. Angew. Math. Physik **3** (1952), 96-119.

In proposito va osservato però che le difficoltà si incontrano studiando il problema nella approssimazione lineare; esse quindi non devono sorprendere del tutto. È noto ad esempio che, nel caso di EULERO, la approssimazione lineare lascia indeterminato un fattore costante nella espressione dello spostamento della direttrice della trave, conseguente alla applicazione di un carico di punta superiore a quello critico. Ma sarebbe errato concluderne che l'indeterminazione è inevitabile nel problema; essa infatti è completamente estranea alla teoria non lineare dello stesso caso. Anzi per toglierla non occorre neppure ricorrere alla trattazione non lineare; basta (4) completare l'approssimazione lineare con le condizioni di compatibilità del terzo sistema ausiliare successivo (5).

Scopo di questo lavoro è di mettere in confronto i risultati che si possono trarre dalla teoria non lineare e dalla teoria linearizzata nello studio statico del semplice caso della trave sollecitata a torsione e non soggetta a vincoli. Ne risultano messe meglio in luce le peculiarità del problema e si può riconoscere come alcune discrepanze tra le due trattazioni possono essere sanate ricorrendo alle condizioni di compatibilità dei sistemi ausiliari successivi.

La circostanza più interessante che sfugge completamente all'esame lineare è la seguente: al contrario del caso di EULERO, nel quale soluzioni non banali esistono per tutti i valori *superiori* al carico critico, qui l'indeterminazione statica si ha invece solo *per un numero discreto di valori critici della coppia torcente.*

---

(4) Si veda: G. CAPRIZ, *Alcune osservazioni su problemi di stabilità delle travi elastiche*, Rend. Mat. e Appl. Roma (5) **16** (1957), 23-42.

(5) Si fa riferimento ad una terminologia suggerita dal prof. A. SIGNORINI nel proporre un efficace metodo di approssimazioni successive in problemi di elastostatica. Se si pensano le varie grandezze che entrano in un problema non-lineare di elastostatica sviluppate in serie di potenze di un parametro λ moltiplicativo dei vettori che caratterizzano le forze esterne attive, i coefficienti delle successive potenze di λ soddisfano a certi sistemi di equazioni lineari a cui si dà il nome di « sistema ausiliare primo, secondo, ecc. ». Così, il primo sistema ausiliare viene a coincidere col sistema di equazioni della teoria linearizzata classica. Si vedano, ad esempio, le seguenti Memorie:

A. SIGNORINI, *Trasformazioni termoelastiche finite, caratteristiche dei sistemi differenziali, onde di discontinuità, in particolare onde d'urto e teoria degli esplosivi*, Atti S.I.P.S. (24ª Riunione) **3** (1935), 3-22.

A. SIGNORINI, *Trasformazioni termoelastiche finite* (Mem. 2ª), Ann. Mat. Pura Appl. (4) **30** (1949), 1-72.

A. SIGNORINI, *Trasformazioni termoelastiche finite* (Mem. 3ª: *Solidi incomprimibili*), Ann. Mat. Pura Appl. (4) **39** (1955), 147-201.

Il metodo è stato adattato allo studio di problemi di stabilità nel lavoro citato nella annotazione (4). I necessari dettagli sono richiamati nel prossimo n. **4**.

1. – Alcuni richiami.

Sia $\mathfrak{T}$ una trave costituita da materiale omogeneo, isotropo e perfettamente elastico. Nella configurazione di riferimento $\mathfrak{T}_*$ (6) la trave abbia la forma di un cilindro circolare retto $\mathfrak{C}$; si supponga inoltre che la lunghezza L della direttrice l di $\mathfrak{T}$ sia molto maggiore del raggio di $\mathfrak{C}$.

Questo complesso di ipotesi permette di introdurre per $\mathfrak{T}$ uno schema ben classico (7) (per il quale sarà qui usato il simbolo $\mathfrak{L}$), che è talvolta indicato col nome di linea a quattro parametri perfettamente elastica. Tale nome fa riferimento (oltre che alle proprietà materiali di $\mathfrak{T}$) al numero di funzioni necessarie e sufficienti per individuare una generica deformazione di $\mathfrak{L}$.

Nel prossimo n. **3** indicheremo con maggior dettaglio alcune proprietà dello schema $\mathfrak{L}$. Converrà però fin d'ora ricordare che, da un punto di vista geometrico, la $\mathfrak{L}$ si può pensare costituita da un insieme di terne ortogonali $\mathfrak{I}_P$ *appoggiate* alla direttrice l di $\mathfrak{T}$. Più precisamente va intesa associata ad ogni punto P di l una terna (levogira) $\mathfrak{I}_P$ costituita dalla tangente ad l e da due assi ortogonali solidali alla sezione normale α di $\mathfrak{T}$ per P. Naturalmente un tale schema è adatto a rappresentare $\mathfrak{T}$ solo se, nei limiti della desiderata approssimazione, si può ritenere incondizionatamente che gli elementi materiali di $\mathfrak{T}$ appartenenti a ciascuna α siano sempre gli stessi e che ciascuna sezione normale rimanga indeformata. La $\mathfrak{L}$ è il più semplice schema di $\mathfrak{T}$ nel quale si può tener conto e dare una misura della *torsione* (8) della trave.

Supponiamo ora che la $\mathfrak{T}$, intesa ormai schematizzata in una $\mathfrak{L}$, sia sollecitata solo sulle sezioni estreme. Indicheremo tali sezioni con α_A ed α_B, intendendo di chiamare A e B gli estremi di l. Supponiamo anche che le forze agenti su α_A siano equivalenti ad una coppia di momento $-\boldsymbol{M}$, e quelle agenti su α_B ad una coppia di momento $\boldsymbol{M}$.

Le configurazioni di equilibrio di $\mathfrak{L}$ sotto l'azione della sollecitazione ora specificata soddisfano alle seguenti condizioni (9):

(I) la lunghezza di ciascun arco di direttrice rimane invariata;

(II) la direttrice è un arco di elica $\mathfrak{E}$ tracciata su un cilindro ad asse parallelo ad $\boldsymbol{M}$.

---

(6) Le lettere affette da asterisco indicano sistematicamente elementi relativi alla configurazione di riferimento.

(7) Si veda, ad esempio, il Cap. XVII del trattato di elasticità del LOVE.

(8) Traduco così semplicemente il vocabolo *twist*. Per evitare ambiguità parlerò in contrasto di *torsione geometrica* di una curva.

(9) Si può vedere il Cap. XIX del trattato del LOVE. Le condizioni (I), ..., (V) sono completamente giustificate nel prossimo n. **3**.

Se si chiama β l'angolo, compreso tra 0 e π, formato dal versore della tangente ad l, $\boldsymbol{i}_3$, (orientato nel verso della ascissa curvilinea crescente da A verso B) ed $\boldsymbol{M}$, si ha di più che:

(III) l'elica $\mathcal{E}$ è levogira o destrogira a seconda che β è acuto o ottuso;

(IV) il raggio R del cilindro a cui $\mathcal{E}$ appartiene e l'angolo β sono legati ad M attraverso la relazione

$$M = \frac{a \cdot \sin\beta}{R}, \tag{1.1}$$

dove a rappresenta il modulo di rigidità a flessione di $\mathfrak{T}$;

(V) la torsione, ψ_3, è costante lungo l ed è misurata in valore e segno da

$$\psi_3 = \frac{M \cdot \cos\beta}{a_3}, \tag{1.2}$$

dove a_3 è il modulo di rigidità a torsione di $\mathfrak{T}$.

Naturalmente il segno di ψ_3 è in relazione col verso della torsione: qui la torsione è antioraria solo se l'elica è levogira.

2. – Un problema di instabilità.

Le considerazioni del n. **1** possono venire utilizzate nello studio della stabilità di una trave soggetta a torsione. Prenderemo qui in esame il caso nel quale le coppie agenti su α_A ed α_B hanno un momento diretto come AB ([10]).

Ma prima di entrare in argomento conviene indicare alcune notazioni. L'ascissa curvilinea contata su l a partire da A sarà chiamata s $(0 \leqslant s \leqslant L)$; i versori delle terne $\mathfrak{I}_P$ saranno indicati con $\boldsymbol{i}_1$, $\boldsymbol{i}_2$, $\boldsymbol{i}_3$, convenendo che $\boldsymbol{i}_3$ coincida col versore della tangente ad l orientata nel verso delle s crescenti; ovviamente gli $\boldsymbol{i}_h$ vanno pensati come certe funzioni di s.

O, x_1, x_2, x_3 sarà una terna fissa di riferimento: ragioni di semplicità consigliano di pensare O coincidente con A e l'asse d'indice 3 passante per B. I versori degli assi della terna fissa saranno indicati con $\boldsymbol{c}_1$, $\boldsymbol{c}_2$, $\boldsymbol{c}_3$.

([10]) Si noti che in tal modo la sollecitazione viene specificata in relazione alla configurazione *attuale*.

Le condizioni dichiarate nel n. 1 in riguardo ad $\boldsymbol{i}_1$, $\boldsymbol{i}_2$ lasciano parzialmente indeterminato l'orientamento di quei versori. Togliamo qui l'indeterminazione ponendo la condizione che nella configurazione di riferimento $\mathcal{L}_*$ essi coincidano ordinatamente coi versori degli assi x_1, x_2:

$$\boldsymbol{i}_1^*(s) \equiv \boldsymbol{c}_1, \qquad \boldsymbol{i}_2^*(s) \equiv \boldsymbol{c}_2 .$$

Supporremo anche sistematicamente che $\boldsymbol{i}_1(0)$ coincida con $\boldsymbol{c}_1$. Il complesso di condizioni ammesso in riguardo alla posizione della trave rispetto alla terna O, x_1, x_2, x_3 si può visualizzare pensando la trave vincolata in A da una cerniera cilindrica di centro invariabile O ed asse parallelo all'asse x_1 ed in B da una cerniera sferica al cui centro sono permesse traslazioni lungo l'asse x_3. Ma le restrizioni di cui si fa questione non vanno propriamente intese come vincoli (il che a rigore richiederebbe l'esame delle corrispondenti reazioni vincolari); esse servono solo a prescindere da uno spostamento rigido di $\mathcal{L}$ che le equazioni della statica lasciano certo indeterminato a causa del tipo di sollecitazione che si è supposto agire su $\mathfrak{S}$.

Colle convenzioni fatte $\boldsymbol{M}$ viene ad essere parallelo a $\boldsymbol{c}_3$; per fissare le idee supporremo che sia orientato come $\boldsymbol{c}_3$.

Allora la sbarra ammette due ovvie configurazioni equilibrate: precisamente le configurazioni a direttrice rettilinea con una torsione uguale rispettivamente a M/a_3 oppure $-M/a_3$. Nella prima le coordinate di B sono $(0, 0, L)$, nella seconda $(0, 0, -L)$. Noi daremo a queste soluzioni il nome di *soluzioni banali.*

Basta ora applicare le proprietà richiamate nel n. 1 per riconoscere che non vi sono altre soluzioni all'infuori delle banali se M non coincide con un multiplo di $2\pi a/L$.

Se M coincide con uno dei valori $2\pi(a/L)n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ c'è una infinità di soluzioni; in ciascuna di esse la $\mathcal{L}$ è individuata dalle seguenti condizioni:

(1) la direttrice l è uno dei due archi di elica uscenti da A i quali appartengono ad uno dei cilindri delle due famiglie dipendenti dal parametro R [da scegliersi nell'intervallo $(0, L/(2\pi n))$]:

$$(x_1 \pm R)^2 + x_2^2 = R^2,$$

e sono tali che l'angolo β tra $\boldsymbol{i}_3$ ed $\boldsymbol{M}$ (scelto tra 0 e π) soddisfa alla relazione

$$\beta = \arcsin\,(2\pi(R/L)n);$$

(2) la torsione lungo l è data in valore assoluto e segno dalla

$$\psi_3 = (M \cdot \cos \beta)/a_3 .$$

La trave sollecitata a torsione presenta dunque un comportamento sostanzialmente diverso da quello ben noto nel caso di EULERO. In quel caso soluzioni statiche non banali esistono per *tutti* i valori del carico di punta *superiori* al primo valore critico, mentre in corrispondenza al primo valore critico l'unica soluzione statica è quella banale. Qui invece esistono infinite soluzioni per $M = 2\pi a/L$, mentre poi l'instabilità della trave per $M > 2\pi a/L$ e diverso da uno dei valori $2\pi(a/L)n$ ($n = 2, 3, \ldots$) non si può provare con argomenti statici.

Faremo vedere nel prossimo n. **4** come queste conclusioni siano apparentemente contraddette quando si studi il problema nella approssimazione lineare.

3. – Giustificazione delle condizioni (I), (II), (III), (IV), (V) del n. 1.

Prima di procedere all'esame della approssimazione lineare, giustifichiamo in questo n. **3** le condizioni (I), (II), (III), (IV), (V) del n. **1**. Si tratta di sviluppi elementari, ma li riportiamo qui per completezza, ed anche perchè dànno l'occasione di introdurre alcune convenzioni e notazioni utili nel seguito. Riprendiamo dunque le ipotesi del n. **1** circa le proprietà materiali della trave e le caratteristiche della sollecitazione agente su di essa.

Cominciamo coll'osservare che lo sforzo normale N_α sulla sezione normale generica α è nullo. Aggiunto alla ipotesi di perfetta elasticità, questo fatto assicura l'annullamento del coefficiente di dilatazione lineare δ della direttrice l di $\mathfrak{S}$, in ogni configurazione equilibrata. L'ascissa curvilinea s potrà essere dunque considerata come variabile lagrangiana atta ad individuare il generico punto di $\mathfrak{S}$ appartenente ad l.

Conviene ora introdurre il versore $\boldsymbol{G}(s)$ così definito:

$$\boldsymbol{G}(s) = \frac{1}{2} \sum_{1}^{3}{}_k \, \boldsymbol{i}_k \wedge \frac{d\boldsymbol{i}_k}{ds} .$$

Le componenti di $\boldsymbol{G}(s)$ secondo la terna $\mathfrak{J}_P$ (associata al punto P di ascissa s) saranno indicate con $\psi_1(s)$, $\psi_2(s)$, $\psi_3(s)$. Quando si accetti ormai l'inestendibilità della l e si prescinda da spostamenti rigidi di insieme, la generica configurazione di $\mathfrak{L}$ è individuata delle funzioni $\psi_h(s)$ ($h = 1, 2, 3$). Quando esse sono note, i versori $\boldsymbol{i}_k$ possono essere ottenuti per integrazione del sistema differenziale

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{i}_k}{\mathrm{d}s} = \boldsymbol{G} \wedge \boldsymbol{i}_k = \sum_{1}^{3}{}_h \, \psi_h \, \boldsymbol{i}_h \wedge \boldsymbol{i}_k \tag{3.1}$$

e successivamente lo spostamento $\boldsymbol{w}(s)$ dei punti di l può essere determinato con una quadratura per mezzo della ovvia relazione

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{w}}{\mathrm{d}s} = \boldsymbol{i}_3 - \boldsymbol{c}_3 \,. \tag{3.2}$$

Osserviamo anche che tra i versori $\boldsymbol{N}$ e $\boldsymbol{b}$ della normale principale e della binormale ad l e l'angolo γ compreso tra $\boldsymbol{i}_1$ ed $\boldsymbol{N}$ sussistono le relazioni (11)

$$\boldsymbol{N} = \cos\gamma \cdot \boldsymbol{i}_1 + \sin\gamma \cdot \boldsymbol{i}_2 , \qquad \boldsymbol{b} = -\sin\gamma \cdot \boldsymbol{i}_1 + \cos\gamma \cdot \boldsymbol{i}_2 ,$$

le quali, derivate rispetto ad s, forniscono delle equazioni vettoriali che sono equivalenti alle tre equazioni scalari

$$\psi_1 = - c \cdot \sin\gamma , \qquad \psi_2 = c \cdot \cos\gamma , \qquad \psi_3 = -\left(\tau + \frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}s}\right), \tag{3.3}$$

dove c e τ indicano la curvatura e la torsione geometrica di l.

Nello schema $\mathfrak{L}$ l'ipotesi di perfetta elasticità di $\mathfrak{T}$ è tradizionalmente trascritta in quella che (δ sia proporzionale ad N_α ed inoltre che) il momento flettente ed il momento torcente in corrispondenza alla sezione normale generica α di $\mathfrak{T}$ siano dati rispettivamente da $-a \cdot (\psi_1 \boldsymbol{i}_1 + \psi_2 \boldsymbol{i}_2)$, $-a_3 \psi_3 \boldsymbol{i}_3$. Anche qui a indica la rigidità a flessione ed a_3 la rigidità a torsione di $\mathfrak{T}$.

Per le ipotesi fatte sulle forze agenti su $\mathfrak{T}$ si ha dunque nel nostro caso

$$a \cdot (\psi_1 \boldsymbol{i}_1 + \psi_2 \boldsymbol{i}_2) + a_3 \psi_3 \boldsymbol{i}_3 = \boldsymbol{M}. \tag{3.4}$$

Da questa, per derivazione, si possono ottenere le tre conseguenze scalari

$$\left\{ \begin{aligned} & a \, \frac{\mathrm{d}\psi_1}{\mathrm{d}s} - (a - a_3)\psi_3\psi_2 = 0 \\ & a \, \frac{\mathrm{d}\psi_2}{\mathrm{d}s} + (a - a_3)\psi_3\psi_1 = 0 \\ & \frac{\mathrm{d}\psi_3}{\mathrm{d}s} = 0 \,. \end{aligned} \right. \tag{3.5}$$

---

(11) Più precisamente γ è l'angolo di cui occorre ruotare, intorno ad $\boldsymbol{i}_3$, il versore $\boldsymbol{i}_1$ in verso antiorario per sovrapporlo ad $\boldsymbol{N}$.

L'ultima delle (3.5) assicura la costanza della torsione, misurata da ψ_3, in accordo con la condizione (V) del n. **1**, mentre l'integrale generale delle prime due è dato da

$$\psi_1 = A\cdot\sin(ks+\varphi), \qquad \psi_2 = -A\cdot\cos(ks+\varphi), \tag{3.6}$$

dove A e φ sono due costanti arbitrarie (ma si può intendere che A sia positiva e φ sia compresa tra 0 e 2π) e si è posto

$$k = \frac{a_3 - a}{a}\,\psi_3 .$$

Il confronto delle (3.6) colle (3.3) permette di riconoscere che $c = A$, $\gamma = ks + \varphi + \pi$ e quindi anche che $\tau = -(k + \psi_3) = -(a_3/a)\psi_3$. Dunque la direttrice è una linea a curvatura e torsione geometrica costanti; di più, moltiplicando la (3.4) scalarmente per $\boldsymbol{i}_3$ (cioè per il versore della tangente ad l) si ottiene

$$\boldsymbol{M}\times\boldsymbol{i}_3 = M\cdot\cos\beta = a_3\psi_3 = \text{cost.}; \tag{3.7}$$

qui si è indicato ancora con β l'angolo (tra 0 e π) formato da $\boldsymbol{M}$ con $\boldsymbol{i}_3$. Si può concludere che la l è un'elica cilindrica e l'asse del cilindro è parallelo al vettore $\boldsymbol{M}$; in più la torsione costante è data proprio dalla (1.2).

Per verificare il lato quantitativo della condizione (IV) basta ricordare che su un'elica vale la relazione

$$\tau = -(\sin\beta\cdot\cos\beta)/R,$$

perchè dalla (3.7) si ottiene allora proprio la (1.1).

4. – Studio del problema nell'approssimazione lineare.

Questo n. **4** è dedicato all'esame del problema che ci interessa nell'ambito lineare. Riprendiamo la questione da principio ma, naturalmente, continuiamo a fare uso di alcune delle notazioni introdotte nei nn. precedenti. Manteniamo anche le convenzioni già fatte circa la scelta della terna di riferimento ed accettiamo quindi le condizioni ai limiti:

$$\boldsymbol{w}(0) = 0, \tag{4.1}$$

$$\boldsymbol{w}(L) = 0, \tag{4.2}$$

$$\boldsymbol{i}_1(0) = \boldsymbol{c}_1 . \tag{4.3}$$

Si tratta ora di sostituire le equazioni indefinite (3.1), (3.2), (3.4) con convenienti approssimazioni. In proposito seguiremo sostanzialmente un metodo da tempo indicato dal prof. A. SIGNORINI (12); le considerazioni che seguono servono ad adattarlo al nostro caso. A noi interessano le eventuali configurazioni non banali di $\mathfrak{L}$ corrispondenti a valori di M di poco *superiori* ad un valore critico M_c *vicine* ad una delle configurazioni banali possibili per $M = M_c$ (delle due possibili noi sceglieremo nel seguito quella nella quale $\boldsymbol{i}_3$ è orientato come $\boldsymbol{c}_3$). Intendendo per m una quantità positiva e per λ un parametro reale, potremo porre

$$M = M_c + m\lambda^2, \tag{4.4}$$

e quindi potremo pensare che in corrispondenza a valori non nulli di λ la configurazione di $\mathfrak{L}$ sia individuata da certe ψ_h, $\boldsymbol{i}_h$, con $h = 1, 2, 3$, e $\boldsymbol{w}$, funzioni oltre che di s anche di λ e sviluppabili in serie di potenze di λ (13):

$$\left\{\begin{aligned} \psi_h(s, \lambda) &= \sum_0^\infty{}_k\, \psi_h^{(k)}(s)\,\frac{\lambda^k}{k!} \\ \boldsymbol{i}_h(s, \lambda) &= \sum_0^\infty{}_k\, \boldsymbol{i}_h^{(k)}(s)\,\frac{\lambda^k}{k!} \\ \boldsymbol{w}(s, \lambda) &= \sum_0^\infty{}_k\, \boldsymbol{w}^{(k)}(s)\,\frac{\lambda^k}{k!}. \end{aligned}\right. \tag{4.5}$$

I termini di indice zero negli sviluppi (4.5) individuano la soluzione banale delle equazioni non-lineari, che corrisponde al valore critico M_c di M.

I termini di indice uno sono invece quelli che individuano l'approssimazione lineare.

Cominciamo col precisare i termini di indice zero. Naturalmente $\boldsymbol{w}^{(0)}$ è identicamente nullo e tali sono anche $\psi_1^{(0)}$ e $\psi_2^{(0)}$; si è già osservato che invece

(12) Si vedano le Memorie citate nella annotazione (5).

(13) Si fa uso nelle (4.5), per ogni funzione $f(\lambda)$, della notazione seguente:

$$f^{(0)} = f(0), \qquad f^{(k)} = [\mathrm{d}^k f/\mathrm{d}\lambda^k]_{\lambda=0} \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

Va osservato che affinchè le serie di potenze (4.5) possano rappresentare delle soluzioni non banali è essenziale che a valori reali di λ corrispondano sempre valori di $M(\lambda)$ *maggiori* del valore critico M_c: di qui la ragione della posizione (4.4). In proposito si veda anche loc. cit. nella annotazione (4) (cfr. n. 2).

in corrispondenza alla soluzione banale la torsione è uguale a M/a_3. Si ha dunque

$$\psi_3^{(0)} = M_c/a_3 \,. \tag{4.6}$$

Le relazioni che si ottengono dalle (3.1), adattandole al nostro caso, per $\lambda = 0$, non bastano a determinare $\boldsymbol{i}_r^{(0)}$; bisogna far intervenire anche una ovvia conseguenza della (4.3) e le condizioni di ortonormalità degli $\boldsymbol{i}_h$. Sviluppi elementari dànno

$$\boldsymbol{i}_1^{(0)} = \boldsymbol{c}_1 \cdot \cos(\omega s) + \boldsymbol{c}_2 \cdot \sin(\omega s), \qquad \boldsymbol{i}_2^{(0)} = -\boldsymbol{c}_1 \cdot \sin(\omega s) + \boldsymbol{c}_2 \cdot \cos(\omega s), \tag{4.7}$$

assieme a $\boldsymbol{i}_3^{(0)} = \boldsymbol{c}_3$. Nelle (4.7) si è posto per brevità

$$\omega = M_c/a_3 = \psi_3^{(0)} \,. \tag{4.8}$$

Possiamo ora affrontare la approssimazione lineare, cioè il complesso di equazioni che permettono di determinare gli elementi di ordine uno negli sviluppi (4.5). Allo scopo converrà anche pensare la (3.4) scritta nella forma

$$a \cdot (\psi_1 \boldsymbol{i}_1 + \psi_2 \boldsymbol{i}_2) + a_3 \psi_3 \boldsymbol{i}_3 = (M_c + \lambda^2 m) \boldsymbol{c}_3 \,. \tag{4.9}$$

Derivando la (4.9) rispetto a λ e ponendo quindi $\lambda = 0$ si ottiene la relazione

$$a \cdot (\psi_1^{(1)} \boldsymbol{i}_1^{(0)} + \psi_2^{(1)} \boldsymbol{i}_2^{(0)}) + a_3 \, \psi_3^{(1)} \boldsymbol{i}_3^{(0)} + M_c \boldsymbol{i}_3^{(1)} = 0 \,. \tag{4.10}$$

Con processo analogo dalla (3.1), riferita a $k = 3$, si ottiene

$$\mathrm{d}\boldsymbol{i}_3^{(1)}/\mathrm{d}s = -\psi_1^{(1)} \boldsymbol{i}_2^{(0)} + \psi_2^{(1)} \boldsymbol{i}_1^{(0)} \,. \tag{4.11}$$

Che $\psi_3^{(1)}$ debba essere identicamente nulla segue subito dalla (4.10), quando si osservi che $\boldsymbol{i}_3^{(1)}$ è ortogonale a $\boldsymbol{i}_3^{(0)}$. Derivando poi la (4.10) rispetto ad s e tenendo conto della (4.11), si ottiene una relazione vettoriale equivalente alle due equazioni scalari

$$a \frac{\mathrm{d}\psi_1^{(1)}}{\mathrm{d}s} + (M_c - a\omega)\psi_2^{(1)} = 0, \qquad a \frac{\mathrm{d}\psi_2^{(1)}}{\mathrm{d}s} - (M_c - a\omega)\psi_1^{(1)} = 0,$$

che permettono la determinazione di $\psi_1^{(1)}$ e $\psi_2^{(1)}$ nella forma

$$\psi_1^{(1)} = B \cdot \sin(\mu s + \delta), \qquad \psi_2^{(1)} = -B \cdot \cos(\mu s + \delta), \tag{4.12}$$

dove B e δ sono delle costanti per ora indeterminate e μ abbrevia l'espressione $M_c \cdot \{(1/a) - (1/a_3)\}$.

La condizione al contorno (4.1) ha tra l'altro per conseguenza l'ortogonalità di $\boldsymbol{i}_3(0)$ a $\boldsymbol{c}_1$ e quindi, nella approssimazione lineare, la relazione

$$\boldsymbol{i}_3^{(1)}(0) \times \boldsymbol{c}_1 = 0 .$$

Attraverso la (4.10) questa finisce coll'imporre per δ un valore multiplo di π; si può scegliere addirittura zero, dato che un cambiamento di segno in $\psi_1^{(1)}$ e $\psi_2^{(1)}$ si può ancora ottenere attraverso una opportuna scelta di B.

Si ha dunque per ora

$$\psi_1^{(1)} = B \cdot \sin(\mu s), \qquad \psi_2^{(1)} = -B \cdot \cos(\mu s), \qquad \psi_3^{(1)} = 0. \tag{4.13}$$

Per ragioni di brevità converrà indicare con $\boldsymbol{j}_1(s)$ e $\boldsymbol{j}_2(s)$ i versori degli assi che si ottengono ruotando di $(\mu + \omega)s$ radianti nel verso positivo intorno a $\boldsymbol{c}_3$ gli assi di indici 1 e 2 rispettivamente. Dalla (4.10) si ha allora

$$\boldsymbol{i}_3^{(1)} = (aB/M_c)\boldsymbol{j}_2(s). \tag{4.14}$$

Ora $\boldsymbol{w}^{(1)}$ si può ottenere con una quadratura da una immediata conseguenza della (3.2):

$$\mathrm{d}\boldsymbol{w}^{(1)}/\mathrm{d}s = \boldsymbol{i}_3^{(1)} .$$

Se si ricordano anche le (4.1), (4.2) si ha

$$\boldsymbol{w}^{(1)} = (a^2B/M_c^2)(\boldsymbol{j}_1 - \boldsymbol{c}_1), \tag{4.15}$$

anzi, se non si vuole cadere nel caso banale $B = 0$, rimane in più imposto a $(\mu + \omega)L$, cioè a $(M_c/a)L$, di coincidere con un multiplo di 2π. Il caso di maggior interesse fisico corrisponde alla scelta

$$M_c = 2\pi a/L . \tag{4.16}$$

Ad essa converremo di attenerci per semplicità nel seguito. Resta così determinato il valore critico del modulo di $\boldsymbol{M}$.

Per esaurire l'approssimazione lineare rimane ormai solo da integrare il sistema di equazioni che si ottengono dalla (3.1), per $k=1,\ 2$, ponendovi $\lambda=0$ dopo derivazione rispetto a λ:

$$(4.17)\qquad \mathrm{d}\boldsymbol{i}_1^{(1)}/\mathrm{d}s=-\psi_2^{(1)}\boldsymbol{c}_3+\psi_3^{(0)}\boldsymbol{i}_2^{(1)},\qquad \mathrm{d}\boldsymbol{i}_2^{(1)}/\mathrm{d}s=\psi_1^{(1)}\boldsymbol{c}_3-\psi_3^{(0)}\boldsymbol{i}_1^{(1)}.$$

L'integrale generale delle (4.17) contiene 6 costanti indeterminate; la loro eliminazione coll'uso della condizione al contorno (4.3) e delle relazioni che tengono conto della ortonormalità degli $\boldsymbol{i}_k$ è elementare. Si ha in definitiva

$$(4.18)\qquad \boldsymbol{i}_1^{(1)}=(Ba/M_c)\cdot\sin(\mu s)\cdot\boldsymbol{c}_3,\qquad \boldsymbol{i}_2^{(1)}=-(Ba/M_c)\cdot\cos(\mu s)\cdot\boldsymbol{c}_3.$$

In queste, come nelle precedenti (4.13), (4.14), (4.15), interviene la costante indeterminata B.

L'esame delle equazioni che reggono la approssimazione lineare è così esaurito; se le sue conseguenze si potessero accettare incondizionatamente si dovrebbe concludere che, per ogni valore della coppia torcente superiore a quello critico, precisato dalla (4.16), esistono infinite soluzioni non banali, delle quali la generica corrisponde ad una particolare scelta della costante B nelle (4.13), (4.14), (4.15), (4.18).

Tale conclusione è simile a quella che si può ottenere trattando il caso di EULERO nell'ambito lineare [14], ma evidentemente contrasta coi risultati della teoria non-lineare dei nn. **1**, **2**, **3**.

È stato già osservato varie volte [15] che certe insufficienze della approssimazione lineare possono trovare un complemento nelle condizioni di compatibilità dei sistemi ausiliari successivi, si vuol dire dei sistemi di equazioni che legano i termini di grado maggiore di 1 negli sviluppi (4.5). L'esame dei sistemi ausiliari secondo e terzo, per il caso che ci interessa, è svolto nel prossimo n. **5**; tale esame conduce a precisare per la costante B il valore zero se $m\neq 0$, mentre B per $m=0$ rimane indeterminato. I risultati della approssimazione lineare vengono così completati e messi in linea con quelli della teoria non-lineare.

---

(14) Si veda ancora loc. cit. nella annotazione (4), n. 2.

(15) È così che nella teoria tridimensionale dei solidi elastici si può talvolta precisare lo spostamento rigido di insieme che la teoria classica lascia indeterminato. Si vedano le Memorie citate nella annotazione (5).

5. - Intervento dei sistemi ausiliari successivi.

La determinazione dei termini di grado 2 si persegue a mezzo di sviluppi simili a quelli del paragrafo precedente. Innanzi tutto per doppia derivazione della (4.9) rispetto λ si ottiene l'equazione

$$a\cdot(\psi_1^{(2)}\,\boldsymbol{i}_1^{\prime(0)} + \psi_2^{(2)}\,\boldsymbol{i}_2^{(0)}) + a_3\,\psi_3^{(2)}\,\boldsymbol{c}_3 + \\ + 2a\cdot(\psi_1^{(1)}\,\boldsymbol{i}_1^{(1)} + \psi_2^{(1)}\,\boldsymbol{i}_2^{(1)}) + a_3\,\psi_3^{(0)}\,\boldsymbol{i}_3^{(2)} = 2m\boldsymbol{c}_3, \tag{5.1}$$

e questa coll'intervento delle (4.13), (4.18) si trasforma nell'altra

$$a\cdot(\psi_1^{(2)}\,\boldsymbol{i}_1^{(0)} + \psi_2^{(2)}\,\boldsymbol{i}_2^{(0)}) + a_3\,\psi_3^{(2)}\,\boldsymbol{c}_3 + M_c\,\boldsymbol{i}_3^{(2)} = 2\{m - (a^2B^2/M_c)\}\boldsymbol{c}_3\,. \tag{5.2}$$

Conviene anche qui far intervenire una ovvia conseguenza della (3.1), riferita a $k=3$,

$$\mathrm{d}\boldsymbol{i}_3^{(2)}/\mathrm{d}s = -\psi_1^{(2)}\,\boldsymbol{i}_2^{(0)} + \psi_2^{(2)}\,\boldsymbol{i}_1^{(0)} - 2\psi_1^{(1)}\,\boldsymbol{i}_2^{(1)} + 2\psi_2^{(1)}\,\boldsymbol{i}_1^{(1)}. \tag{5.3}$$

Nel secondo membro della (5.3), come conseguenza delle (4.13), (4.18), la somma degli ultimi due termini è zero. Derivando allora la (5.2) e tenendo conto della (5.3) si constata che le due funzioni $\psi_1^{(2)}$ e $\psi_2^{(2)}$ sono legate dallo stesso sistema di equazioni che lega $\psi_1^{(1)}$ e $\psi_2^{(1)}$, cosicchè vanno precisate nella forma:

$$\psi_1^{(2)} = C\cdot\sin(\mu s), \qquad \psi_2^{(2)} = -C\cdot\cos(\mu s)\,. \tag{5.4}$$

Nelle (5.4) la C è una costante. La $\psi_3^{(2)}$ si può ricavare direttamente dalla (5.2) quando si osservi che, come conseguenza della $\boldsymbol{i}_3^2 = 1$, vale la relazione

$$\boldsymbol{i}_3^{(2)} \times \boldsymbol{c}_3 + [\boldsymbol{i}_3^{(1)}]^2 = 0.$$

Moltiplicando la (5.2) scalarmente per $\boldsymbol{c}_3$ si ottiene

$$\psi_3^{(2)} = \frac{1}{a_3}\left(2m - \frac{a^2B^2}{M_c}\right). \tag{5.5}$$

La (5.2) può essere ormai sostituita dall'altra

$$\boldsymbol{i}_3^{(2)} = (aC/M_c)\boldsymbol{j}_2 - (a^2B^2/M_c^2)\boldsymbol{c}_3, \tag{5.6}$$

e da questa, facendo intervenire una ovvia conseguenza della (3.2), si ottiene con una quadratura $\boldsymbol{w}^{(2)}$:

$$\boldsymbol{w}^{(2)} = (a^2C/M_c^2)\,(\boldsymbol{j}_1 - \boldsymbol{c}_1) - (a^2B^2/M_c^2)s\boldsymbol{c}_3; \tag{5.7}$$

e basta la (4.16) ad assicurare che le condizioni ai limiti sono soddisfatte da $\boldsymbol{w}^{(2)}$.

Formalmente un po' più complicata si presenta la determinazione di $\boldsymbol{i}_1^{(2)}$ ed $\boldsymbol{i}_2^{(2)}$. Conviene perciò introdurre alcune abbreviazioni: chiameremo F la costante

$$(2m/a_3) + (a^2B^2/M_c^2)\mu$$

ed indicheremo con $\boldsymbol{g}_1(s)$ e $\boldsymbol{g}_2(s)$ i versori degli assi che si ottengono ruotando gli assi di indice 1 e 2 nel verso positivo intorno a $\boldsymbol{c}_3$ dell'angolo $(2\mu + \omega)s$.

Con tali posizioni le equazioni che servono a determinare $\boldsymbol{i}_1^{(2)}$ ed $\boldsymbol{i}_2^{(2)}$ possono scriversi

$$\begin{cases} \mathrm{d}\boldsymbol{i}_1^{(2)}/\mathrm{d}s = \omega\boldsymbol{i}_2^{(2)} + C\cdot\cos(\mu s)\cdot\boldsymbol{c}_3 + F\boldsymbol{i}_2^{(0)} + (aB^2/M_c)\boldsymbol{g}_2 \\ \mathrm{d}\boldsymbol{i}_2^{(2)}/\mathrm{d}s = -\,\omega\boldsymbol{i}_1^{(2)} + C\cdot\sin(\mu s)\cdot\boldsymbol{c}_3 - F\boldsymbol{i}_1^{(0)} + (aB^2/M_c)\boldsymbol{g}_1\,. \end{cases} \tag{5.8}$$

La soluzione delle (5.8) che soddisfa anche alle conseguenze della (4.3) e delle relazioni di ortonormalità dei versori $\boldsymbol{i}_h$ è data da

$$\boldsymbol{i}_1^{(2)} = \left\{ a^2B^2/(2M_c^2) \right\}(\boldsymbol{g}_1 - \boldsymbol{i}_1^{(0)}) + Fs\boldsymbol{i}_2^{(0)} + (aC/M_c)\cdot\sin(\mu s)\cdot\boldsymbol{c}_3,$$

$$\boldsymbol{i}_2^{(2)} = -\left\{ a^2B^2/(2M_c^2) \right\}(\boldsymbol{g}_2 + \boldsymbol{i}_2^{(0)}) - Fs\boldsymbol{i}_1^{(0)} - (aC/M_c)\cdot\cos(\mu s)\cdot\boldsymbol{c}_3\,.$$

Non ci soffermeremo sui dettagli della soluzione del terzo sistema ausiliare perchè il processo è ormai meccanico: ad esempio vale la relazione

$$\begin{aligned} a\cdot(\psi_1^{(3)}\boldsymbol{i}_1^{(0)} + \psi_2^{(3)}\boldsymbol{i}_2^{(0)}) + a_3\psi_3^{(3)}\boldsymbol{c}_3 + 6\cdot(aBm/M_c)\boldsymbol{j}_2 +{}& \\ + 3aBFs\boldsymbol{j}_1 + 6\cdot(a^2BC/M_c)\boldsymbol{c}_3 + a_3\psi_3^{(0)}\boldsymbol{i}_3^{(3)} &= 0. \end{aligned} \tag{5.9}$$

Coll'introduzione di una costante arbitraria D e dell'abbreviazione

$$K = (3\mu B/M_c)\left\{ 2m - (a^2B^2/M_c) \right\},$$

le $\psi_h^{(3)}$ rimangono assegnate dalle

$$\psi_1^{(3)} = D\cdot\sin(\mu s) + Ks\cdot\cos(\mu s), \qquad \psi_2^{(3)} = -D\cdot\cos(\mu s) + Ks\cdot\sin(\mu s),$$

$$\psi_3^{(3)} = -3a^2BC/(a_3M_c).$$

Quindi, facendo uso della (5.9), si ottiene

$$\boldsymbol{i}_3^{(3)} = (a/M_c)(D - 6Bm/M_c)\boldsymbol{j}_2 - (6Bm/M_c)s\boldsymbol{j}_1 - 3(a^2BC/M_c^2)\boldsymbol{c}_3\,.$$

Una ovvia quadratura dà infine

$$\boldsymbol{w}^{(3)} = (a/M_c)^2(D - 12Bm/M_c)\boldsymbol{j}_1 + 6\cdot(amB/M_c^2)s\boldsymbol{j}_2 - \\ - 3(a^2BC/M_c^2)s\boldsymbol{c}_3 + \boldsymbol{W}, \tag{5.10}$$

dove $\boldsymbol{W}$ è un vettore costante arbitrario. La condizione al contorno (4.1) impone in particolare a $\boldsymbol{W}$ di essere parallelo a $\boldsymbol{c}_1$. Dunque la seconda condizione al contorno (4.2) non può essere soddisfatta se non è nullo il coefficiente di $s\boldsymbol{j}_2$ nel secondo membro della (5.10). Se ne conclude che deve valere la eguaglianza $mB = 0$ e quindi che *B deve essere nullo se non è tale m*, secondo quanto annunciato alla fine del n. precedente.

6. – Conclusione.

L'esame statico del comportamento di una trave elastica soggetta a torsione ha messo in rilievo un nuovo caso ([16]) di *incompatibilità* tra la teoria delle deformazioni elastiche finite e la sua approssimazione lineare.

Ci si può chiedere a conclusione quale sia il significato della incompatibilità. In proposito conviene riprendere le nostre considerazioni da un punto di vista un po' diverso. Invece di limitarci a priori a considerazioni statiche, pensiamo di ripetere il procedimento di approssimazioni successive partendo da una impostazione dinamica del problema (e quindi tenendo conto delle

---

([16]) Si vedano ancora le Memorie citate nella annotazione ([5]) ed anche: A. SIGNORINI, *Un semplice esempio di «incompatibilità» tra la Elastostatica classica e la teoria delle deformazioni elastiche finite*, Atti Accad. Naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (8) **8** (1950), 276-281. Un esempio di «incompatibilità» è anche presentato in: G. CAPRIZ, *Sopra le deformazioni elastiche finite di un solido tubolare*, Rend. Mat. e Appl. Roma (5) **15** (1956), 228-262.

forze di inerzia, ecc.), sempre però coll'intento di determinare, se possibile, una soluzione statica. Da questo punto di vista è ovvio che l'aver individuato, anche per $m \neq 0$, una soluzione statica dei primi due sistemi ausiliari, non basta ad assicurare la esistenza di una soluzione statica del problema non-lineare; ne rimane solo indicata *la esistenza di soluzioni dinamiche nelle quali le forze di inerzia sono infinitesime rispetto a λ almeno di ordine* 3. Non deve quindi sorprendere che possa concludersi negativamente la ricerca di soluzioni statiche del terzo sistema ausiliare.

In generale si deve dunque tenere presente la seguente avvertenza: perchè l'approssimazione lineare rappresenti con una certa fedeltà un fenomeno, retto a rigore da equazioni non lineari, è necessario che tutte le grandezze *essenziali* da pensarsi in esso come infinitesime siano infinitesime dello stesso ordine. In particolare vanno accettati con cautela alcuni dei risultati dello studio di problemi di stabilità, ottenuti nella approssimazione lineare.

Summary.

The problems of the stability of a rod subject to (i) **end thrust or** (ii) **twist are often treated in the linear approximation. This is partly misleading as the two problems appear then similar and one is lead to conclude that in both cases there are non-trivial solutions for any value of the load (or of the twisting couple) greater than critical. However the study of the problem** (ii) **in the non-linear domain shows that non-trivial solutions exist only in correspondence to the critical values of the twisting couple.**

The reason for this discrepancy is to be found in the fact that for the values of the twisting couple, which are greater than the first critical value, there exist dynamic solutions of the non-linear equations for which the inertial forces are infinitesimal of higher order. These solutions appear as static in the linear approximation.

The influence of the terms of higher order on the solution of the linear equations can be conveniently analyzed by using Signorini's method of the successive auxiliary systems (metodo dei sistemi ausiliari successivi**). This method allows the splitting in infinite successive steps of any problem of equilibrium in the field of non-linear elasticity: in the first step the solution of the classical linearized equations is required; the second step determines the correction of the second order, etc..**

It is found in our case — problem (ii) **— that the equations of the third auxiliary system are compatible with the existence of non-trivial solutions only in correspondence to the critical values of the twisting couple.**