Riv. Mat. Univ. Parma 8 (1957), 199-206

ENRICO BOMBIERI (*)

Sulle soluzioni intere dell' equazione $4x^3 = 27y^2 + N$. (**)

1. – In questa Nota dimostriamo il seguente

Teorema: *L'equazione*

$$(1)\qquad 4x^3 = 27y^2 + N \qquad (N \text{ intero}, \quad -22 \leqslant N \leqslant 80, \qquad N \neq 0, \quad N \neq 49)$$

ammette un numero finito di soluzioni intere (x, y).

Inoltre, *tali soluzioni intere vengono determinate tutte* (cfr. n. 4).

Problemi di questo tipo sono stati studiati da altri autori. Ad esempio: L. J. MORDELL [7] (1) ha dimostrato, servendosi di un teorema di A. THUE e della relazione che lega i due invarianti fondamentali di una forma binaria, che « se $Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$ (A, B, C, D interi) non ha fattori quadrati in x, allora l'equazione

$$Ey^2 = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D \qquad (A,\ B,\ C,\ D,\ E \text{ interi})$$

ha un numero finito di soluzioni intere (x, y) ». Il metodo usato tuttavia non si presta a trovare le soluzioni.

(*) Indirizzo: Corso Porta Nuova 10, Milano, Italia.

(**) Ricevuto il 18-III-1957. Accogliamo volentieri questo primo lavoro di E. BOMBIERI, ancora giovane studente liceale, e vivamente ci congratuliamo con lui (Annotazione redazionale).

(1) I numeri in neretto entro parentesi [ ] si riferiscono alla Bibliografia alla fine di questa Nota.

J. W. S. Cassels [2] ha determinato, per mezzo della teoria dei numeri algebrici, le soluzioni razionali (x, y) dell'equazione

$$y^2 = x^3 - D$$

per D intero e compreso in certi intervalli.

Il metodo da noi usato è indipendente da quelli di questi due Autori, ed esso si basa su alcuni risultati della Geometria dei numeri.

2. – Ci serviremo di un lemma noto che enunceremo nella forma seguente a noi utile, anche se essa non è la più generale.

Lemma 1 (H. F. Blichfeldt [1], H. Minkowski [5], C. A. Rogers [8]). Siano $\xi_s = \alpha_{1s} x_1 + \alpha_{2s} x_2 + \ldots + \alpha_{ns} x_n$ $(s = 1, 2, \ldots, n)$ n forme lineari a determinante

$$\Delta = \det \| \alpha_{rs} \|$$

non nullo. Di tali forme, m siano reali e le rimanenti $n - m = 2h$ siano complesse coniugate. Sia $\sigma_n(m)$ l'estremo inferiore dei numeri c tali che la disuguaglianza $| \xi_1 \xi_2 \ldots \xi_n | \leqslant c \cdot | \Delta |$ risulti verificata per almeno un punto $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ diverso da $(0, 0, \ldots, 0)$ e a coordinate intere. Sia ancora $f(x) \equiv a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$ un polinomio a coefficienti interi, con m radici reali e le rimanenti $n - m = 2h$ a coppie complesse coniugate, e sia D il suo discriminante. Allora, se $| D | < 1/\sigma_n^2(m)$ il polinomio $f(x)$ è riducibile.

Per ciò che riguarda $\sigma_n(m)$ sono noti i risultati seguenti che ci saranno utili:

(A) $$\sigma_3(3) = 1/7 \qquad \text{(H. Davenport [3] e [4])},$$

inoltre

(A′) se ξ_1, ξ_2, ξ_3 sono reali e $\xi_1 \xi_2 \xi_3$ non è equivalente a $\prod_{r=1}^{3} (x_1 + \theta_r x_2 + \theta_r^2 x_3)$, dove θ_1, θ_2, θ_3 sono le radici dell'equazione $\theta(x) \equiv x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0$, risulta

$$| \xi_1 \xi_2 \xi_3 | \leqslant | \Delta |/9 \qquad \text{(H. Davenport [3] e [4]; L. J. Mordell [6])},$$

e anche

(B) $$\sigma_3(1) = 1/\sqrt{23} \qquad \text{(H. Davenport [4]; L. J. Mordell [6])}.$$

D i m o s t r a z i o n e. Consideriamo il polinomio a n variabili

$$\xi_1 \xi_2 \dots \xi_n = a_0^{n-1}(x_1 + \lambda_1 x_2 + \dots + \lambda_1^{n-1} x_n) \dots (x_1 + \lambda_n x_2 + \dots + \lambda_n^{n-1} x_n),$$

dove $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sono le radici dell'equazione $f(x) = 0$.

Si ha $|\Delta| = \sqrt{|D|}$, come è facile vedere. Infatti

$$|D| = |a_0|^{2n-2} \cdot \prod_{r>s} |\lambda_r - \lambda_s|^2 \qquad (r, s = 1, 2, \dots, n),$$

$$|\Delta| = |a_0|^{n-1} \cdot |\det \| \lambda_r^s \| | \quad (r = 1, 2, \dots, n; \ s = 0, 1, \dots, n-1),$$

ma $\det \| \lambda_r^s \|$ è un determinante di VANDERMONDE e sviluppandolo esplicitamente ne deriva l'affermazione fatta.

Per la definizione di $\sigma_n(m)$ esisterà dunque un punto $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ a coordinate intere, diverso da $(0, 0, \dots, 0)$ e tale che

$$|\xi_1 \xi_2 \dots \xi_n| \leq \sqrt{|D|} \cdot \sigma_n(m);$$

e, se D soddisfa alla limitazione imposta nel Lemma, si ottiene $|\xi_1 \xi_2 \dots \xi_n| < 1$. Ma poichè $\xi_1 \xi_2 \dots \xi_n$ è sempre un numero intero, esisterà un s e un punto $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ a coordinate intere, e diverso da $(0, 0, \dots, 0)$ tale che

$$x_1 + \lambda_s x_2 + \lambda_s^2 x_3 + \dots + \lambda_s^{n-1} x_n = 0;$$

cioè almeno una radice dell'equazione $f(x) = 0$ è un numero algebrico di grado $\leq n-1$. Il polinomio $f(x)$ è dunque riducibile, e il Lemma 1 è dimostrato.

3. - L e m m a 2. *I seguenti quattro polinomi $\varphi_1(z)$, $\varphi_2(z)$, $\psi_1(z)$, $\psi_2(z)$ hanno le radici reali comprese negli intervalli per ciascuno di essi indicati:*

$$\begin{cases} \varphi_1(z) \equiv 4z^3 + 18z^2 - k/a^3 & (a \geq 3, \quad 1 \leq k \leq 80), \\ 0 < z_1 < 2/a, \quad -3/a^{3/2} < z_2 < -0{,}2/a^{3/2}, & -9/2 < z_3 < -(9/2) + (3/a); \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varphi_2(z) \equiv 4z^3 + 18z^2 + k/a^3 & (a \geq 1, \quad 1 \leq k \leq 22), \\ -(9/2) - (1/a^3) < z_1 < -9/2 & \text{(le altre due radici sono complesse);} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \psi_1(z) \equiv 4z^3 + 36z^2 + 81z - k/a^3 & (a \geq 1, \quad 1 \leq k \leq 80), \\ 0 < z_1 < 1/a^3 & \text{(le altre due radici sono complesse);} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varphi_2(z) \equiv 4z^3 + 36z^2 + 81z + k/a^3 & (a \geqslant 3, \quad 1 \leqslant k \leqslant 22), \\ -1/a^3 < z_1 < -1/(100\ a^3), & z_2,\ z_3 < -(9/2) + (3/a^{3/2})\,. \end{cases}$$

La dimostrazione è elementare: basta, per esempio, constatare che $\varphi_1(z)$ cambia di segno nel passaggio di z dal primo al secondo estremo di ciascuno dei tre intervalli.

Lemma 3. *Se nell'equazione* (1) x *e* y *sono interi, esistono due interi* a, c *tali che*

$$x = a^2 + c, \qquad y = |\,ac\,|\,. \tag{2}$$

Dimostrazione. Sia $4A^3 = 27B^2 + N$. L'equazione $x^3 - Ax + B = 0$ ha come discriminante $D = -N$. Essa è riducibile per le seguenti considerazioni:

1°) Se $-22 \leqslant N \leqslant -1$, in base al Lemma 1 e al risultato (B).

2°) Se $1 \leqslant N \leqslant 48$, in base al Lemma 1 e al risultato (A).

3°) Se $50 \leqslant N \leqslant 80$, in base al Lemma 1 e al risultato (A′). Infatti, $\theta(x)$ è irriducibile con discriminante -49 e l'equazione $x^3 - Ax + B = 0$ non può essere equivalente a $\theta(x)$ poichè altrimenti il suo discriminante sarebbe un multiplo intero di 49, e dunque è applicabile il risultato (A′).

Pertanto esistono degli interi A', B', C', tali che

$$x^3 - Ax + B = (x + A')(x^2 + B'x + C') =$$

$$= x^3 + (A' + B')\,x^2 + (A'B' + C')x + A'C',$$

da cui si ricava

$$A = A'^2 - C', \qquad B = A'C',$$

cioè il Lemma da dimostrare.

4. – A dimostrazione del Teorema del n. **1** proveremo che *le soluzioni intere dell'equazione* (1) *sono tutte e sole quelle della seguente tabella*:

N:	-4	4	5	13	32	32	40	68	77,
x:	-1	1	2	4	2	11	13	5	26,
y:	0	0	± 1	± 3	0	± 14	± 18	± 4	± 51.

Osserviamo che per il valore $N = 49$, che viene escluso dal Teorema del n. **1**, si presentano, per esempio, le soluzioni $x = 7$, $y = \pm 7$ alle quali non si perviene con il nostro procedimento.

D i m o s t r a z i o n e. Intanto per il Lemma 3 si possono fare le posizioni (2). Poniamo anche

$$a^2 = z \cdot |c|, \tag{3}$$

dove z è razionale positivo o nullo, ed esaminiamo separatamente i casi possibili che sono tutti e solo i seguenti:

1°)	$N > 0$,	$c \geqslant 3$,	4°)	$N < 0$,	$c \geqslant 1$,
2°)	$N > 0$,	$c < 0$,	5°)	$N < 0$,	$c \leqslant -4$,
3°)	$N > 0$,	$c = 0,\ 1,\ 2$,	6°)	$N < 0$,	$c = -1,\ -2,\ -3$.

C a s o 1°: $N > 0$, $c \geqslant 3$. L'equazione (1) in virtù delle (2) e (3) diventa

$$4(z + 1)^3 - 27z - N/c^3 = 0,$$

e ponendo $z = (1/2) + t$ risulta

$$4\,t^3 + 18\,t^2 - N/c^3 = 0.$$

Per il Lemma 2 le radici soddisfano alle limitazioni:

$$1/2 < z_1 < (1/2) + (2/c), \quad (1/2) - (3/c^{3/2}) < z_2 < 1/2 - (0{,}2/c^{3/2}), \quad z_3 < -4 + (3/c).$$

Poichè è $z \geqslant 0$ la radice z_3 è da scartare, e restano da esaminare le due radici z_1 e z_2. Per la (3), gli interi a e c dovranno verificare l'una o l'altra delle due limitazioni

$$c/2 < a^2 < (c/2) + 2, \quad (c/2) - (3/\sqrt{c}) < a^2 < (c/2) - (0{,}2/\sqrt{c}).$$

Essendo $c \geqslant 3$ deve essere

$$(c/2) - 1 \leqslant a^2 \leqslant (c/2) + 2, \tag{4}$$

e distinguiamo due eventualità:

(i) Sia c pari: $c = 2n$. È poi $a^2 = n + m$ onde, per la (4), risulta $-1 \leqslant m \leqslant 2$ e per le (2) risulta

$$x = 3n + m, \quad y^2 = 4n^3 + 4mn^2, \quad 1 \leqslant N = 4x^3 - 27y^2 = 36m^2n + 4m^3 \leqslant 80.$$

Se $m = -1$ i valori possibili per n sono 1 e 2, quindi si hanno le soluzioni:

$$N = 32, \quad x = 2, \quad y = 0; \qquad N = 68, \quad x = 5, \quad y = \pm 4.$$

Il valore $m = 0$ non conduce ad alcuna soluzione. Se $m = 1$ i valori possibili per n sono 0, 1, 2; ma dovendo anche essere $n + m = n + 1 = a^2$ risulta $n = 0$ e quindi si ha la soluzione

$$N = 4, \qquad x = 1, \qquad y = 0.$$

Il valore $m = 2$ non conduce ad alcuna soluzione.

(ii) Sia c dispari: $c = 2n + 1$. È poi $a^2 = n + m$ onde, per la (4), $-1 \leqslant m \leqslant 2$ e per le (2) risulta

$$x = 3n + m + 1, \quad y^2 = 4n^3 + 4(m + 1)n^2 + (4m + 1)n + m,$$

$$1 \leqslant N = (6m - 3)^2 n + 4(m + 1)^3 - 27m \leqslant 80.$$

Per $m = -1$ non si hanno soluzioni. Se $m = 0$ i valori possibili per n sono 0, 1, ..., 8, ma $n + m = n = a^2$ e quindi necessariamente è $n = 0, 1, 4$ da cui le soluzioni

$$N = 4, \ x = 1, \ y = 0; \quad N = 13, \ x = 4, \ y = \pm 3; \quad N = 40, \ x = 13, \ y = \pm 18.$$

Se $m = 1$, è analogamente $n = 0, 1, ..., 8$, ma $n + m = n + 1 = a^2$ quadrato, onde risulta necessariamente $n = 0, 3, 8$, da cui le soluzioni

$$N = 5, \quad x = 2, \quad y = \pm 1; \qquad N = 32, \quad x = 11, \quad y = \pm 14;$$

$$N = 77, \quad x = 26, \quad y = \pm 51.$$

Per $m = 2$ non si hanno soluzioni poichè allora $4x^3 - 27y^2 = 27(3n + 2)$ e questo porta $n = 0$, $N = 0$.

Caso 2°: $N > 0$, $c < 0$. Si avrà, per la (3), $z \geqslant 0$ e quindi $4(z-1)^3 - 27z - N/c^3 = 0$, e se $z = 4 + t$ si ha $4t^3 + 36t^2 + 81t - N/c^3 = 0$. Per il Lemma 2 necessariamente z è limitata nell'intervallo $4 < z < 4 + (1/|c|^3)$ da cui $4|c| < a^2 < 4|c| + 1/c^2$, e poichè $|c| \geqslant 1$ non ci sono soluzioni.

Caso 3°: $N > 0$, $c = 0, 1, 2$. Per $c = 2$ si ha $x = a^2 + 2$, $|y| = 2|a|$; per $c = 1$ si ha $x = a^2 + 1$, $|y| = |a|$; per $c = 0$ si ha $x = a^2$, $y = 0$. Un semplice esame mostra che le eventuali soluzioni coincidono con altre trovate in precedenza.

Caso 4°: $N < 0$, $c \geqslant 1$. Per la (3) e il Lemma 2 e posto $z = (1/2) + t$, si ha $t < -9/2$, cioè $z < -4$, e poichè $z \geqslant 0$ si ha un assurdo.

Caso 5°: $N < 0$, $c \leqslant -4$. Analogamente, per la (3), facendo la sostituzione $z = 4 + t$ e applicando il Lemma 2, vediamo che z deve soddisfare ad una delle due seguenti limitazioni:

$$4 - (1/|c|^3) < z < 4 - \{1/(100|c|^3)\}, \qquad z < -(1/2) + (3/|c|^{3/2}),$$

e, poichè $|c| \geqslant 4$, la seconda limitazione è da escludere, essendo $z \geqslant 0$. Dalla prima limitazione deriva

$$4|c| - (1/c^2) < a^2 < 4|c| - \{1/(100c^2)\}$$

ed è evidente che non vi sono soluzioni.

Caso 6°: $N < 0$, $c = -1, -2, -3$. Per $c = -3$ è $x = a^2 - 3$, $|y| = 3|a|$; per $c = -2$ è $x = a^2 - 2$, $|y| = 2|a|$; per $c = -1$ è $x = a^2 - 1$, $|y| = |a|$. Un semplice esame mostra che si ha una sola soluzione, e precisamente per $c = -1$, $a = 0$, cioè

$$N = -4, \qquad x = -1, \qquad y = 0 .$$

Avendo esaurito tutte le possibilità, il nostro Teorema è dunque completamente dimostrato.

Bibliografia.

1. H. F. Blichfeldt, *A new upper bound to the minimum value of the sum of linear homogeneous forms*, Monaths. Math. Phys. **43** (1936), 410-414.

2. J. W. S. Cassels, *The rational solutions of the diophantine equation* $y^2 = x^3 - D$, Acta Math. **82** (1950), 243-273.

3. H. Davenport, *On the product of three homogeneous linear forms* (II), Proc. London Math. Soc. (2) **44** (1938), 412-431.

4. H. Davenport, *Note on the product of three homogeneous linear forms*, J. London Math. Soc. **16** (1941), 98-101.

5. H. Minkowski, **Geometrie der Zahlen**. B.G. Teubner, Leipzig 1910.

6. L. J. Mordell, *The product of n homogeneous linear forms*, Univ. Roma, Ist. Naz. Alta Mat., Rend. Mat. Appl. (5) **10** (1951), 12-23.

7. L. J. Mordell, *Note on the integer solutions of the equation* $Ey^2 = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$, Messenger Math. **51** (1921-22), 169-171.

8. C. A. Rogers, *The product of n real homogeneous linear forms*, Acta Math. **82** (1950), 185-208.