Riv. Mat. Univ. Parma 8 (1957), 215-221

LUIGI TANZI CATTABIANCHI (*)

Su le costanti pluriderivazionali e su le variabili pluriderivazionali indipendenti. (**)

1. – Introduzione.

Nella presente Nota stabilisco alcune proprietà delle « costanti pluriderivazionali » e delle « variabili pluriderivazionali indipendenti » (1), enti che sono stati così definiti (2):

Dato un pluriderivatore

$$\mathfrak{D} \equiv X_1(x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + X_n(x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial}{\partial x_n},$$

i cui coefficienti $X_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, X_n(x_1, \ldots, x_n)$ siano definiti in un certo campo R_n,

si chiamano *costanti pluriderivazionali per* $\mathfrak{D}$, *nel campo* R_n (3), le funzioni $z(x_1, \ldots, x_n)$ tali che sia

$$\mathfrak{D}z(x_1, \ldots, x_n) = 0, \qquad (x_1, \ldots, x_n) \in R_n;$$

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università, Parma, Italia.
(**) Ricevuto il 10-II-1957.
(1) Tali proprietà costituiranno poi una naturale premessa per l'estensione alle pluriderivate di noti teoremi sulle derivate, argomento di cui mi occuperò in prossimi lavori.
(2) A. MAMBRIANI, *La pluriderivazione e una classificazione delle equazioni differenziali*, Riv. Mat. Univ. Parma **6** (1955), 321-348. Cfr., in particolare, pp. 332-335.
(3) Od anche *costanti* $\mathfrak{D}$*-pluriderivazionali nel campo* R_n, od ancora *costanti per il pluriderivatore* $\mathfrak{D}$ *nel campo* R_n.

si chiamano *variabili pluriderivazionali indipendenti per* $\mathfrak{D}$, *nel campo* R_n (4), le funzioni $z(x_1, \ldots, x_n)$ tali che sia

$$\mathfrak{D}z(x_1, \ldots, x_n) = 1, \qquad (x_1, \ldots, x_n) \in R_n .$$

Queste ultime funzioni saranno indicate brevemente col simbolo

$$(x_1, \ldots, x_n)_{\mathfrak{D}} . \tag{1}$$

Mi limito qui a considerare il caso della biderivazione, ma risulterà chiaramente che le considerazioni fatte valgono in generale per la pluriderivazione.

2. - Considerazioni preliminari.

Si dirà che un biderivatore

$$\mathfrak{D} \equiv X(x, y)\frac{\partial}{\partial x} + Y(x, y)\frac{\partial}{\partial y},$$

con i coefficienti $X(x, y)$ e $Y(x, y)$ reali ed univoci in un certo campo R chiuso e ad interno non vuoto, è un *biderivatore regolare nel campo* R, quando sono verificate le seguenti ipotesi:

1°) i coefficienti $X(x, y)$ e $Y(x, y)$ sono continui in R, con $X(x, y) \neq 0$ in R (5);

2°) il rapporto $Y(x, y)/X(x, y)$ soddisfa in R alla condizione di LIPSCHITZ rispetto ad y, uniformemente rispetto ad x.

Sotto tali ipotesi l'equazione differenziale ordinaria

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Y(x, y)}{X(x, y)} \tag{2}$$

(4) Od anche *variabili* $\mathfrak{D}$-*pluriderivazionali indipendenti nel campo* R_n, od ancora *variabili indipendenti per il pluriderivatore* $\mathfrak{D}$ *nel campo* R_n.

(5) Oppure con $Y(x, y) \neq 0$ in R. L'ipotesi che uno dei coefficienti sia diverso da zero in R si può sostituire, manifestamente, con l'altra, meno restrittiva,

$$|X(x, y)| + |Y(x, y)| > 0 \quad \text{in} \quad R.$$

soddisfa, in R, al teorema di esistenza ed unicità: le linee integrali $y = \gamma(x, c)$ della (2) solcano allora tutto il campo R in guisa che per ogni punto di R ne passa una ed una sola.

Sia poi $c = \omega(x, y)$ l'uguaglianza ottenuta risolvendo rispetto a c la $y = \gamma(x, c)$ (6).

Per comodità le linee integrali della (2) si diranno anche *linee caratteristiche del biderivatore regolare* $\mathfrak{D}$ considerato (o, brevemente, *caratteristiche di* $\mathfrak{D}$).

3. – Le costanti biderivazionali.

3.1. – Consideriamo un biderivatore $\mathfrak{D}$ regolare in un campo R (cfr. n. **2**). Sappiamo (7) che *l'espressione generale delle costanti* $\mathfrak{D}$*-biderivazionali* è data da

$$\Omega(\omega(x, y)), \qquad (x, y) \in R, \tag{3}$$

dove $\Omega(t)$ è una funzione derivabile arbitraria di t e $\omega(x, y)$ è la funzione introdotta nel n. precedente.

Ogni costante per un biderivatore regolare $\mathfrak{D}$ *assume lungo ciascuna caratteristica di* $\mathfrak{D}$ *un valore costante.* Infatti, se $\overline{\Omega} = \overline{\Omega}(\omega(x, y))$ è una di queste costanti biderivazionali, poichè $\omega(x, y)$ assume un valore costante lungo ogni linea caratteristica di $\mathfrak{D}$ (cfr. n. **2**), anche $\overline{\Omega}$ assumerà un valore costante lungo ciascuna di tali linee.

Esistono infinite costanti, per un biderivatore regolare $\mathfrak{D}$, *che lungo una prefissata caratteristica di* $\mathfrak{D}$ *assumono un prefissato valore.* Infatti, se $\bar{c} = \omega(x, y)$ è l'equazione di una caratteristica e k è una data costante, le dette infinite costanti biderivazionali sono individuate dalle infinite funzioni $\Omega(t)$ tali che sia $\Omega(\bar{c}) = k$ (8).

3.2. – Teorema I. *Dato in un campo* R *un biderivatore regolare* $\mathfrak{D}$, *se* x_0 *è ascissa di punti interni ad* R, *esiste sempre una ed una sola costante* $\mathfrak{D}$*-biderivazionale che per* $x = x_0$ *sia eguale ad una prefissata funzione derivabile* $f(y)$.

(6) Conviene tenere presente per il seguito che, in R, si ha $y = \gamma(x, \omega(x, y))$, $c = \omega(x, \gamma(x, c))$ ed anche, scrivendo y al posto di c, $y = \omega(x, \gamma(x, y))$.

(7) Cfr. loc. cit. in (2), p. 332, nel caso $n = 2$.

(8) Ad esempio, nel caso semplicissimo $\Omega(t) = \lambda t + \mu$, con λ e μ indeterminate, risulta $\lambda\bar{c} + \mu = k$, equazione soddisfatta da infinite coppie λ e μ.

Infatti, supponiamo che $\Omega(\omega(x, y))$ verifichi l'affermazione del teorema, cioè si abbia $\Omega(\omega(x_0, y)) = f(y)$, ed anche $\Omega(\omega(x_0, \gamma(x_0, y))) = f(\gamma(x_0, y))$, ossia [cfr. annotazione (6)] $\Omega(y) = f(\gamma(x_0, y))$. Pertanto, se esiste una costante $\mathfrak{D}$-biderivazionale soddisfacente al teorema, ne esiste una sola data da

$$\Omega(\omega(x, y)) = f(\gamma(x_0, \omega(x, y))) . \tag{4}$$

D'altra parte la funzione che figura al secondo membro di (4) soddisfa proprio il teorema in quanto è esattamente $\gamma(x_0, \omega(x_0, y)) = y$ [cfr. annotazione (6)].

Ad esempio, consideriamo, nel semipiano $x > 0$, il biderivatore (regolare) $x \dfrac{\partial}{\partial x} + y \dfrac{\partial}{\partial y}$. Qui è $\omega(x, y) = y/x$ e, fissata una funzione derivabile $f(y)$, la costante, per tale biderivatore, che per $x = x_0$ è eguale a $f(y)$ è data da

$$\Omega(y/x) = f(x_0 y/x) .$$

4. – Le variabili biderivazionali indipendenti.

4.1. – Sappiamo (9) che per un biderivatore

$$\mathfrak{D} \equiv X(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + Y(x, y) \frac{\partial}{\partial y}$$

regolare in un campo R (cfr. n. 2), l'espressione generale delle variabili $\mathfrak{D}$-biderivazionali indipendenti [che, in conformità di (1), indicheremo col simbolo $(x, y)_{\mathfrak{D}}$] è data da

$$(x, y)_{\mathfrak{D}} = \int_{x_0}^{x} \frac{dt}{X(t, y(t, \omega(x, y)))} + \Omega(\omega(x, y)), \qquad (x, y) \in R, \tag{5}$$

dove x_0 è l'ascissa di un punto di R e $\Omega(\omega(x, y))$ è l'espressione generale (3) delle costanti biderivazionali per $\mathfrak{D}$.

Al variare della funzione $\Omega(t)$ la (5) ci dà le infinite funzioni che si possono assumere come variabili biderivazionali indipendenti per $\mathfrak{D}$: in particolare, per $\Omega(t) \equiv 0$ si ha la variabile biderivazionale indipendente per $\mathfrak{D}$ annullantesi per $x = x_0$.

(9) Cfr. loc. cit. in (2), pp. 333-334, nel caso $n = 2$.

4.2. – Dal Teorema I (n. **3.2**) discende il seguente.

Corollario. *Dato in un campo R un biderivatore regolare $\mathfrak{D}$, se x_0 è ascissa di punti interni ad R, esiste sempre una ed una sola variabile $\mathfrak{D}$-biderivazionale indipendente che per $x = x_0$ sia eguale ad una prefissata funzione derivabile $f(y)$.*

Tale variabile $\mathfrak{D}$-biderivazionale indipendente ha l'espressione

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dt}{X(t,\ \gamma(t,\ \omega(x,\ y)))} + f(\gamma(x_0,\ \omega(x,\ y))),$$

la quale per $x = x_0$ è uguale a $f(\gamma(x_0,\ \omega(x_0,\ y))) = f(y)$.

Facendo seguito all'esempio indicato nel n. **3.2**, la variabile biderivazionale indipendente, per il biderivatore $x\dfrac{\partial}{\partial x} + y\dfrac{\partial}{\partial y}$, che per $x = x_0$ è uguale ad una prefissata funzione derivabile $f(y)$ è data da

$$\log|x/x_0| + f(x_0\, y/x).$$

4.3. – Facciamo ora alcune osservazioni.

a) *Ogni variabile biderivazionale indipendente per un biderivatore regolare $\mathfrak{D}$, lungo ciascuna linea Γ caratteristica di $\mathfrak{D}$, è una funzione continua e derivabile della x, con derivata continua e sempre diversa da zero, e pertanto è sempre crescente oppure sempre decrescente lungo ciascuna linea Γ.* Infatti, essendo una linea Γ individuata da un'equazione $y = \gamma(x,\ \bar{c})$, con $\bar{c}$ costante conveniente, da (5) si ha

$$(x,\ \gamma(x,\ \bar{c}))_{\mathfrak{D}} = \int_{x_0}^{x} \frac{dt}{X(t,\ \gamma(t,\ \bar{c}))} + \Omega(\bar{c}); \tag{6}$$

tale funzione è continua e derivabile e la sua derivata

$$\frac{d}{dx}(x,\ \gamma(x,\ \bar{c}))_{\mathfrak{D}} = \frac{1}{X(x,\ \gamma(x,\ \bar{c}))} \tag{7}$$

è continua e sempre diversa da zero su Γ.

b) *Se $(x_1,\ y_1)$ e $(x_2,\ y_2)$ sono due punti di una linea Γ caratteristica di un biderivatore regolare $\mathfrak{D}$, la differenza*

$$(x_2,\ y_2)_{\mathfrak{D}} - (x_1,\ y_1)_{\mathfrak{D}}$$

[sempre diversa da zero per quanto si è osservato in a)] *è indipendente dalla particolare variabile $\mathfrak{D}$-biderivazionale scelta.* Infatti, essendo Γ individuata come in precedenza, si ha

$$\omega(x_1, y_1) = \omega(x_2, y_2) = \bar{c}, \qquad \text{onde} \qquad \Omega(\omega(x_1, y_1)) - \Omega(\omega(x_2, y_2)) = 0,$$

e da (5) risulta

$$(x_2, y_2)_{\mathfrak{D}} - (x_1, y_1)_{\mathfrak{D}} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dt}{X(t, \gamma(t, \bar{c}))},$$

il che prova l'asserto.

4.4. – Teorema II. *Dato, in un campo R, un biderivatore regolare $\mathfrak{D}$ e una funzione $f(x, y)$ differenziabile in un punto (a, b) interno ad R, si ha*

$$\lim_{\substack{(x,\, y) \to (a,\, b) \\ \Gamma}} \frac{f(x, y) - f(a, b)}{(x, y)_{\mathfrak{D}} - (a, b)_{\mathfrak{D}}} = [\mathfrak{D} f(x, y)]_{(a,\, b)}, \tag{8}$$

dove Γ è la linea caratteristica di $\mathfrak{D}$ passante per il punto (a, b) e $(x, y)_{\mathfrak{D}}$ è una qualsiasi variabile biderivazionale indipendente per $\mathfrak{D}$ [la scrittura $(x, y) \underset{\Gamma}{\to} (a, b)$ esprime che il punto (x, y) tende, muovendosi su Γ, al punto (a, b)].

Dimostrazione. Sia $y = \gamma(x, \bar{c})$ l'equazione di Γ. La funzione composta

$$\varphi(x) = f(x, \gamma(x, \bar{c}))$$

risulta derivabile e, essendo $\gamma(a, \bar{c}) = b$, si ha

$$\varphi'(a) = f'_x(a, b) + \gamma'_x(a, \bar{c}) \cdot f'_y(a, b),$$

da cui, avendosi, per la (2),

$$y'(a) = \gamma'_x(a, \bar{c}) = Y(a, b)/X(a, b),$$

risulta

$$X(a, b) \cdot \varphi'(a) = X(a, b) \cdot f'_x(a, b) + Y(a, b) \cdot f'_y(a, b) = [\mathfrak{D} f(x, y)]_{(a,\, b)}. \tag{9}$$

Ne segue, tenuto conto di (7) e di (9),

$$\lim_{\substack{(x,\ y)\to(a,\ b)\\ \Gamma}} \frac{f(x,\ y)-f(a,\ b)}{(x,\ y)_{\mathfrak{D}}-(a,\ b)_{\mathfrak{D}}}=$$

$$=\lim_{x\to a}\left\{\frac{f(x,\ y(x,\ \bar{c}))-f(a,\ \gamma(a,\ \bar{c}))}{x-a}\cdot\frac{x-a}{(x,\ y(x,\ \bar{c}))_{\mathfrak{D}}-(a,\ \gamma(a,\ \bar{c}))_{\mathfrak{D}}}\right\}=$$

$$=\varphi'(a)\cdot X(a,\ b)=[\mathfrak{D}f(x,\ y)]_{(a,\ b)}\,.$$