

GIANFRANCO CAPRIZ (*)

A proposito di una classificazione dei problemi di stabilità elastica. (**)

In questa breve Nota riprendo, con intenti un po' differenti, le considerazioni di un mio più esteso lavoro ⁽¹⁾. Faccio uso dei simboli là intervenuti senza speciale richiamo o riferimento, e, naturalmente, mi baso sui risultati già ottenuti.

Considero qui un secondo esempio di trave soggetta a torsione, però vincolata in un certo modo. Ciò mi permette di saggiare il valore di una classificazione dei problemi di stabilità elastica, di recente proposta nei limiti di una teoria linearizzata ⁽²⁾. Mi sembra di dover concludere che una tale classificazione non è completamente esauriente, proprio per l'importanza che hanno gli elementi non lineari nei problemi di stabilità.

I. — Onde evitare alcune difficoltà incontrate nella trattazione statica ⁽³⁾ di certi problemi di stabilità, H. ZIEGLER ha proposto, nelle Memorie citate nella annotazione ⁽²⁾, una classificazione dei problemi di stabilità in *conservativi*

(*) Indirizzo: 30 Greenfield Road, Stafford, Inghilterra.

(**) Ricevuto il 7-XI-1957.

⁽¹⁾ G. CAPRIZ, *Alcune osservazioni sulla instabilità di una trave sollecitata a torsione*, Riv. Mat. Univ. Parma **8** (1957), 145-160.

⁽²⁾ Si veda: H. ZIEGLER, *Knickung gerader Stäbe unter Torsion*, Z. Angew. Math. Physik **3** (1952), 96-119; ed anche: H. ZIEGLER, *Die Stabilitätskriterien der Elastomechanik*, Ing.-Arch. **20** (1952), 49-56; H. ZIEGLER, *Linear elastic stability*, Z. Angew. Math. Physik **4** (1953), 89-121, 167-185. La classificazione è stata suggerita da una osservazione di A. PFLÜGER nel Volume: A. PFLÜGER, **Stabilitätsprobleme der Elastostatik**, J. Springer, Berlin 1950 (cfr. pag. 67).

⁽³⁾ Cioè nella trattazione che si basa su criteri di non unicità della soluzione — come nel classico esempio di EULERO — o del non esser positiva definita l'energia potenziale totale, al modo usato con tanto successo da TIMOSHENKO.

o *non conservativi* in dipendenza dalle proprietà della sollecitazione attiva e vincolare. Egli ha poi suggerito cautela nell'uso dei risultati ottenuti a mezzo di una trattazione statica dei problemi classificati come non conservativi ed ha auspicato una generale applicazione di più rigorosi criteri dinamici di stabilità. Va qui insistito però sul fatto che le ricerche di H. ZIEGLER sono basate su una teoria linearizzata.

Il caso di EULERO rientra fra i problemi conservativi; invece il caso della trave libera soggetta a torsione è classificato nella seconda categoria. Le differenze messe in luce tra i due casi nel lavoro citato nella annotazione ⁽¹⁾ sembrano così avvalorare la classificazione. In realtà però i problemi di stabilità (anche se ci si limita alla considerazione di quelli relativi alle travi elastiche) hanno aspetti più vari di quanto può suggerire una divisione in due sole categorie.

Ciò risulterà evidente dall'esempio presentato in questa Nota. Si considera qui ancora una trave (costituita da materiale omogeneo, isotropo e perfettamente elastico, ed avente la forma di un cilindro circolare retto nella configurazione di riferimento) soggetta a torsione. Si suppone però che essa sia incastrata ad un estremo [ad esempio, in modo che A coincida con O ed $\mathbf{i}_1(O)$, $\mathbf{i}_2(O)$, $\mathbf{i}_3(O)$ rispettivamente con \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 , \mathbf{e}_3] e vincolata all'altro da un dispositivo che consente arbitrari spostamenti a B , ma mantiene la tangente ad l in B parallela all'asse x_3 . Le reazioni derivanti da tale dispositivo equivalgono ad una coppia il cui momento M_v deve essere parallelo al piano (x_1, x_2) ; il momento della coppia attiva M_a applicata a B è supposto invece ancora orientato come l'asse di indice 3.

Prima di procedere nella nostra analisi è conveniente insistere sul fatto che i risultati del paragrafo 2 del lavoro citato nella annotazione ⁽¹⁾ assicurano l'esistenza di soluzioni statiche non banali del problema della torsione di una trave libera, almeno in corrispondenza al valore critico della coppia torcente. Il caso qui in esame (certo appartenente alla categoria dei conservativi) si distingue ancora più nettamente dal caso di EULERO in quanto per esso non esistono soluzioni non banali per valori nè maggiori, nè uguali al valore di solito indicato come critico per il momento della coppia torcente attiva; ma ne esistono per valori minori. Ciò, naturalmente, finchè si pensi solo al primo « modo » di instabilità.

2. - Per provare quanto abbiamo affermato basta applicare ancora una volta le proprietà raccolte nel paragrafo 1 del lavoro citato nella annotazione ⁽¹⁾. Quando, come qui, la sollecitazione esterna si riduce a due coppie applicate ad A e B , le più semplici configurazioni non banali consentite dai vincoli sono quelle nelle quali l si dispone lungo un unico giro di elica; si ricordi infatti che

i vincoli impongono il parallelismo delle tangenti ad l in A e B . In corrispondenza ad ognuna di tali configurazioni il modulo $|\mathbf{M}_a + \mathbf{M}_v|$ del momento della coppia applicata a B eguaglia il valore di solito indicato come critico, nelle circostanze qui in esame, per il modulo del momento della sola coppia attiva, precisamente $2\pi a/L$. Però il componente attivo del momento, \mathbf{M}_a , ha per modulo $(2\pi a \cos\beta)/L$, un valore cioè sempre minore di $2\pi a/L$; mentre il componente reattivo, \mathbf{M}_v , ha per modulo $(2\pi a \sin\beta)/L$. Ne segue in particolare che esiste una configurazione non banale, del resto ovvia, anche quando \mathbf{M}_a è nullo (4).

Più interessante è forse giungere, in base ai risultati ora ottenuti, alla previsione delle conseguenze di un esperimento ideale. Immaginiamo di disporre la trave in modo che l sia rettilinea, di aumentare gradualmente M_a fino a poco sopra il valore $2\pi a/L$ e di disturbare quindi la trave dalla posizione banale. È da prevedere che la trave debba di conseguenza « saltare » verso la sola configurazione non banale compatibile col valore scelto di M_a : precisamente quella nella quale la direttrice si dispone secondo due completi giri di elica e β è di poco maggiore di 30° .

Anzi è da pensare che anche se ci si fosse limitati ad aumentare M_a dal valore zero ad un valore inferiore a $2\pi a/L$, si sarebbe potuto ottenere un definitivo allontanamento della trave dalla configurazione banale disponendo opportunamente dell'atto di moto iniziale.

Insomma nei criteri di stabilità, dedotti da una più completa trattazione dinamica, i carichi critici devono finire coll'essere legati, *in certi casi* all'atto di moto iniziale, anche se la sollecitazione è conservativa. Interessante sarebbe stabilire in generale quando (come nel caso di EULERO) una tale dipendenza non ci sia; ma la classificazione dei casi di instabilità in conservativi o meno è insufficiente a questo riguardo.

(4) Questi risultati sfuggono completamente ad una teoria lineare, nella quale il caso in esame appare del tutto simile a quello di EULERO. Naturalmente le prime difficoltà derivanti da conclusioni che si potrebbero affrettatamente trarre dai risultati della teoria lineare si incontrerebbero nell'esame del terzo sistema ausiliare successivo; ciò in analogia a quanto osservato nel paragrafo 6 del lavoro citato nella annotazione (1).

S u m m a r y .

An example is given of an elastic rod subject to twist for which the moment of the active twisting couple in the simplest non-trivial configurations is less than the one usually accepted as critical.

To the Author this result, together with other ones obtained in a previous paper, seem to indicate the necessity for a classification of the problems of elastic stability more complex than the one suggested by H. Ziegler as a conclusion of a wide analysis on the subject of linear elastic stability.