Riv. Mat. Univ. Parma 9 (1958), 13-19

T. MANACORDA (*)

Sulla propagazione di onde ordinarie di discontinuità in un filo dotato di viscosità interna. (**)

1. - In una Nota di diversi anni fa (¹) G. LAMPARIELLO ha mostrato che in un fluido newtoniano non possono propagarsi onde ordinarie (nel senso di HADAMARD) di discontinuità. Un risultato questo che, pur non escludendo del tutto la possibilità di fenomeni ondosi nei fluidi newtoniani, appare sorprendente, onde lo stesso Autore tenne a sottolineare che un filo perfettamente elastico mobile in un mezzo resistente con resistenza lineare, poteva benissimo essere sede di onde ordinarie.

Rimaneva da esaminare l'influenza sulla propagazione delle onde di una viscosità interna (²). In questa breve Nota il problema è affrontato nella sua maggiore generalità sempre però nell'ambito di quei solidi che possono convenientemente rappresentarsi con lo schema dei fili perfettamente flessibili. Più precisamente, mentre non si esclude che il moto avvenga in un mezzo resistente con resistenza genericamente non lineare, si suppone:

a) la tensione τ del filo funzione a priori generica dell'allungamento unitario ε, di $\dot{\varepsilon}$ e della temperatura θ;

b) il moto accompagnato da una propagazione di calore, genericamente non lineare.

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università, Parma, Italia.

(**) Pervenuto il 28-VI-1958.

(¹) G. LAMPARIELLO, *Sull'impossibilità di propagazioni ondose nei fluidi viscosi*, Atti Accad. Naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (6) **13** (1931), 688-691.

(²) Di tipo solido: M. REINER, **Rheology**, Handbuch d. Physik, Vol. VI (1958), cfr. pp. 434-550.

Sarà possibile provare, non ostante il doppio intervento della dipendenza del moto da $\dot{\varepsilon}$ e della propagazione del calore, l'esistenza di una classe di onde ordinarie trasversali, la cui velocità di propagazione dipende dai valori locali della tensione e si riduce alla espressione consueta per piccole deformazioni a partire da uno stato normale di riferimento. Ciò in accordo con quanto trovato da N. Cristescu (3) nel caso, invero particolare, di vibrazioni lineari isoterme di un filo hookeano dotato di viscosità interna lineare.

2. – Indico brevemente con S un filo, con A e B i suoi estremi nella configurazione attuale C, con μ la densità attuale, con s $(0 \leqslant s \leqslant l)$ l'ascissa curvilinea dei suoi punti P misurata positivamente a partire da A, sempre sulla configurazione attuale, ed infine con τ la tensione.

Insieme penso ad una configurazione di riferimento C_* a temperatura uniforme θ_*, convenientemente scelta tra tutte quelle possibili per S, indicando con P_* il corrispondente di P in C_* e con σ la sua ascissa curvilinea misurata positivamente a partire da A_*. Indico poi con

$$\varepsilon = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\sigma} - 1 \tag{2.1}$$

l'allungamento unitario nella trasformazione $C_* \rightarrow C$ e con $\boldsymbol{s} = P - P_*$ lo spostamento.

Non volendo escludere che il moto del filo possa avvenire in un mezzo resistente, ammetto che, se $\boldsymbol{v} = \dot{P}$ è la velocità dei punti di S in C e $\mathfrak{R}(v)$ una funzione mai negativa del suo modulo, il vettore $-\mu\ \mathfrak{R}(v)\ \boldsymbol{v}$ stia a rappresentare la forza che a causa di tale resistenza si esercita su S per unità di lunghezza attuale. Indicando infine con $\mu \boldsymbol{F}$ l'ulteriore forza ripartita, le equazioni indefinite di moto in forma locale si scrivono

$$\mu \boldsymbol{a} = \mu \boldsymbol{F} + \frac{\partial}{\partial s} \tau \boldsymbol{T} - \mu\, \mathfrak{R}(v)\, \boldsymbol{v}\,. \tag{2.2}$$

A queste vanno naturalmente aggiunte le condizioni al contorno e iniziali.

---

(3) N. Cristescu, *Les discontinuitées dans le mouvement du fil parfaitement flexible et viscoélastique*, Rev. Univ. C.I. Parhon Politech. Bucuresti **1** (1952), 68-71.

Conviene porre le (2.2) in forma sostanziale. A questo scopo non c'è che da osservare che è

$$T = \frac{\partial P}{\partial s} = \frac{1}{1+\varepsilon}\frac{\partial P}{\partial \sigma} \tag{2.3}$$

e, se μ_* indica la densità nello stato di riferimento, $\mu_* = (1+\varepsilon)\mu$, per ottenere subito

$$\mu_* \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = \mu_* \boldsymbol{F} + \frac{\partial}{\partial \sigma}\left(\frac{\tau}{1+\varepsilon}\frac{\partial P}{\partial \sigma}\right) - \mu_* \mathfrak{R}(v)\,\boldsymbol{v}\,. \tag{2.4}$$

3. – Quando non si possano, o si vogliano, trascurare le variazioni di temperatura nel filo, occorre aggiungere alle (2.4) l'equazione della propagazione del calore. Indicherò con $\theta = \theta(\sigma, t)$ la temperatura attuale dei punti di S, con θ_e la temperatura esterna, con γ uno scalare positivo (funzione eventualmente di θ e σ) e con u l'energia interna del filo per unità di lunghezza in C. Ammetto anche che la quantità di calore assorbita dall'esterno, nell'unità di tempo, dal generico elemento del filo, sia rappresentata da $-h\,\mathrm{d}\sigma$, con $h = h(\theta - \theta_e, \sigma)$ funzione regolare dei suoi argomenti, identicamente nulla per $\theta = \theta_e$, e col segno di $\theta - \theta_e$ per $\theta \neq \theta_e$. Ricorderò infine che la potenza della tensione per ogni trasformazione infinitesima a partire dalla configurazione attuale e per unità di lunghezza in C_* è data da $-\tau\,\partial\varepsilon/\partial t$.

Ciò premesso, il primo principio della termodinamica, unito alla ipotesi classica che il flusso di calore nel filo sia proporzionale a $-\partial\theta/\partial s$, conduce agevolmente all'equazione, in forma molecolare,

$$\frac{\partial}{\partial \sigma}\frac{\gamma}{1+\varepsilon}\frac{\partial \theta}{\partial \sigma} - h(\theta - \theta_e, \sigma) = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} - \tau\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}\,, \tag{3.1}$$

che va opportunamente completata dalle condizioni iniziali e al contorno.

Posto

$$\vartheta = \theta - \theta_*\,, \qquad \vartheta_e = \theta_e - \theta_*\,,$$

la (3.1) si trasforma in

$$\frac{\partial}{\partial \sigma}\frac{\gamma}{1+\varepsilon}\frac{\partial \vartheta}{\partial \sigma} - h(\vartheta - \vartheta_e, \sigma) = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} - \tau\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}\,. \tag{3.2}$$

4. – Volendo procedere oltre per il nostro scopo, converrà adattare al caso in esame le condizioni di compatibilità cinematica di HUGONIOT-HADAMARD.

Sia φ una qualunque funzione scalare o vettoriale definita in tutti i punti P di S, continua, ma le cui derivate prime subiscano una discontinuità attraverso un punto M del filo. Sia M_* il punto corrispondente ad M in C_*, e σ_* la sua ascissa curvilinea. In generale, σ_* è da ritenere funzione del tempo, e posto

$$a = \dot{\sigma}_*, \tag{4.1}$$

naturalmente dirò a la velocità (scalare) di propagazione della discontinuità, mentre

$$\dot{M}_* = \dot{\sigma}_* \boldsymbol{T}_*$$

ne è la velocità vettoriale.

Considerando φ quale funzione di σ e t, poichè il suo differenziale è continuo attraverso M_*, se con $\Delta\, \partial\varphi/\partial\sigma$, $\Delta\, \partial\varphi/\partial t$ si indicano le discontinuità delle derivate di φ attraverso M_*, si ha

$$\Delta \frac{\partial\varphi}{\partial\sigma}\, \mathrm{d}\sigma + \Delta \frac{\partial\varphi}{\partial t}\, \mathrm{d}t = 0, \tag{4.2}$$

e perciò, posto

$$\Delta \frac{\partial\varphi}{\partial\sigma} = \lambda, \tag{4.3}$$

si ottiene

$$\Delta \frac{\partial\varphi}{\partial t} = - a\lambda\,. \tag{4.4}$$

Analogamente, per una funzione ψ continua con le sue derivate prime attraverso M, ma che ha discontinua qualcuna delle derivate seconde, si ottiene

$$\Delta \frac{\partial^2\psi}{\partial\sigma^2} = \lambda, \qquad \Delta \frac{\partial^2\psi}{\partial\sigma\, \partial t} = - a\lambda, \qquad \Delta \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = \lambda a^2. \tag{4.5}$$

5. – Converrà ormai fare qualche ipotesi sulla dipendenza di τ dalla deformazione. Ammetterò che, subordinatamente ad una conveniente scelta di C_*, τ sia, per ogni σ, una funzione di ε, $\dot{\varepsilon}$ e ϑ,

$$\tau = \tau(\sigma;\ \varepsilon,\ \dot{\varepsilon},\ \vartheta)\,. \tag{5.1}$$

In tale ipotesi la (2.4), eseguendo le derivate, si scrive

$$\mu_* \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = \mu_* \boldsymbol{F} - \mu_* \mathfrak{R}(v)\, \boldsymbol{v} + \frac{\tau}{1+\varepsilon} \frac{\partial^2 P}{\partial \sigma^2} + \tag{5.2}$$
$$+ \frac{1}{1+\varepsilon} \left\{ \left(\frac{\partial \tau}{\partial \varepsilon} - \frac{\tau}{1+\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial \sigma} + \frac{\partial \tau}{\partial \vartheta} \frac{\partial \vartheta}{\partial \sigma} + \frac{\partial \tau}{\partial \dot{\varepsilon}} \frac{\partial \dot{\varepsilon}}{\partial \sigma} \right\} \frac{\partial P}{\partial \sigma}\,,$$

mentre l'equazione del calore (3.2) dà

$$\frac{1}{1+\varepsilon} \left\{ \gamma \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \sigma^2} + \frac{\partial \gamma}{\partial \sigma} + \frac{\partial \gamma}{\partial \vartheta} \frac{\partial \vartheta}{\partial \sigma} - \frac{\gamma}{1+\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \sigma} \frac{\partial \vartheta}{\partial \sigma} \right\} - h(\vartheta - \vartheta_e,\ \sigma) = \tag{5.3}$$
$$= \left(\frac{\partial u}{\partial \varepsilon} - \tau \right) \dot{\varepsilon} + \frac{\partial u}{\partial \dot{\varepsilon}} \ddot{\varepsilon} + \frac{\partial u}{\partial \vartheta} \frac{\partial \vartheta}{\partial t}\,.$$

A queste due equazioni vanno aggiunte le condizioni che direttamente si ottengono dalla identità

$$(1+\varepsilon)^2 = \left(\frac{\partial P}{\partial \sigma} \right)^2,$$

che, derivata rispetto a σ, tenuto conto della (2.3), dà

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \sigma} = \boldsymbol{T} \times \frac{\partial^2 P}{\partial \sigma^2}\,, \tag{5.4}$$

mentre, derivata rispetto al tempo, fornisce

$$\dot{\varepsilon} = \boldsymbol{T} \times \frac{\partial^2 P}{\partial t\, \partial \sigma} = \boldsymbol{T} \times \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \sigma}\,. \tag{5.5}$$

Cerchiamo ora se sia possibile la propagazione di un'onda di discontinuità per la quale, attraverso M, si mantengano continui lo spostamento, ε e ϑ con le loro derivate prime, ma non tutte le derivate seconde. In tali condizioni, presupponendosi la continuità delle forze ripartite, le (5.2) e (5.3) conducono alle condizioni di compatibilità dinamica

$$\mu^* \Delta \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = \frac{\tau}{1+\varepsilon} \Delta \frac{\partial^2 P}{\partial \sigma^2} + \frac{1}{1+\varepsilon} \frac{\partial \tau}{\partial \dot{\varepsilon}} \Delta \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \sigma \, \partial t} \frac{\partial P}{\partial \sigma}, \tag{5.6}$$

$$\frac{\gamma}{1+\varepsilon} \Delta \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \sigma^2} = \frac{\partial u}{\partial \dot{\varepsilon}} \Delta \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2}. \tag{5.7}$$

Al tempo stesso, detto $\boldsymbol{\lambda}$ il vettore caratteristico della discontinuità delle derivate di P, la (5.4) implica

$$\boldsymbol{T} \times \boldsymbol{\lambda} = 0, \tag{5.8}$$

e, in accordo con questa, la (5.5) dà [cfr. (4.5)],

$$\boldsymbol{T} \times \Delta \frac{\partial^2 P}{\partial \sigma \, \partial t} = - a\boldsymbol{T} \times \boldsymbol{\lambda} = 0 \,. \tag{5.9}$$

Indichiamo poi con λ_ε e λ_ϑ rispettivamente i parametri caratteristici della discontinuità di ε e ϑ. Le (5.6) e (5.7) diventano allora

$$\begin{gathered} \left(\frac{\tau}{1+\varepsilon} - \mu^* a^2\right) \boldsymbol{\lambda} = \frac{\partial \tau}{\partial \dot{\varepsilon}} \lambda_\varepsilon a \boldsymbol{T} \\ \frac{\gamma}{1+\varepsilon} \lambda_\vartheta = \frac{\partial u}{\partial \dot{\varepsilon}} \lambda_\varepsilon a^2. \end{gathered} \tag{5.10}$$

Dalla prima si ottiene, separatamente, in base alla (5.8),

$$\mu_* a^2 = \frac{\tau}{1+\varepsilon}, \qquad \lambda_\varepsilon = 0, \tag{5.11}$$

dopo di che la $(5.10)_2$ importa che anche λ_ϑ sia identicamente nulla, mentre la $(5.11)_1$ precisa per $|a|$ il valore positivo

$$|a| = \sqrt{\tau / \{ \mu^* (1+\varepsilon) \}}.$$

Sono dunque possibili onde del tipo considerato, che si propagano con velocità variabile con le condizioni fisiche del filo, e corrispondenti a un vettore di propagazione ortogonale in ogni punto alla tangente attuale.

6. – Se in particolare, come nel caso esaminato dal CRISTESCU [4], il filo è linearmente elastico viscoso, $\partial\tau/\partial\varepsilon$ e $\partial\tau/\partial\dot{\varepsilon}$ [così come $\partial u/\partial\dot{\varepsilon}$] si riducono a delle costanti. Ma poichè, come mostrano le (5.10), questi coefficienti non intervengono nella determinazione di a, il risultato finale non può essere diverso.

Prendiamo poi in particolare in esame le vibrazioni di un filo, della classe qui considerata, teso tra due punti fissi, A_* e B_*, in assenza di forze attive ripartite. Conviene allora scegliere quale configurazione di riferimento la configurazione di equilibrio normale, per la quale il filo assume la configurazione rettilinea $A_* B_*$.

In tali condizioni, detta τ_0 la tensione (costante) nello stato di riferimento, per la tensione linearizzata $\bar{\tau}$ si ha

$$\bar{\tau} = \tau_0 + k\varepsilon + \nu t_s \dot{\varepsilon} \qquad (k,\ \nu,\ t_s \text{ costanti}), \tag{6.1}$$

in cui t_s indica il tempo di rilassamento caratteristico del filo in esame. Per piccole vibrazioni attorno alla configurazione normale di equilibrio si ha allora approssimativamente

$$a^2 = \tau\,(1 + \varepsilon)/\mu_* \tag{6.2}$$

e perciò, se τ_0 è abbastanza grande rispetto a $k\varepsilon$, ed anche rispetto a $\nu t_s \dot{\varepsilon}$, a si riduce alla espressione classica

$$|\,a\,| = \sqrt{\tau_0/\mu_*}\,. \tag{6.3}$$

---

[4] N. CRISTESCU, loc. cit. in [3].