Riv. Mat. Univ. Parma 9 (1958), 21-28

DIONISIO GALLARATI (*)

Una proprietà caratteristica della varietà di C. Segre prodotto di una retta per un S_p. (**)

1. – In questa Nota estendo un risultato ottenuto in un mio precedente lavoro (1), dimostrando il seguente teorema: *Se una V_{p+1} differenziabile appartenente allo spazio S_r, con $r \geqslant 2p+1$, non è un cono e non si compone di spazi lineari S_{p+1}, e se i suoi S_{p+1} tangenti sono incidenti a $p+2$ rette congiunte a $p+1$ a $p+1$ da un S_{2p+1}, gli S_{p+1} tangenti di V_{p+1} incontrano ∞^p rette, ed anzi V_{p+1} è la $S_p - V_{p+1}^{p+1}$ razionale normale che al modo di C. Segre rappresenta le coppie di punti estratti da una retta e da un S_p*, e cioè il luogo delle rette che congiungono le coppie di punti corrispondenti in una omografia tra due S_p sghembi.

2. – Sia dapprima V_{p+1} una varietà differenziabile, non cono e non composta di spazi lineari S_{p+1}, appartenente allo spazio proiettivo S_{2p+1} e non ad uno spazio inferiore, avente tutti gli S_{p+1} tangenti appoggiati a $p+2$ rette $a_0, a_1, \ldots, a_{p+1}$ congiunte a $p+1$ a $p+1$ da un S_{2p+1}.

L'ipotesi che V_{p+1} non sia un cono implica che queste rette appartengano all'S_{2p+1} che contiene V_{p+1}: in caso contrario, infatti, una almeno di esse avrebbe in comune con l'S_{2p+1} contenente V_{p+1} soltanto un punto; e per questo punto passerebbero tutti gli S_{p+1} tangenti di V_{p+1}.

(*) Indirizzo: Istituto Matematico della Università, Genova, Italia.

(**) Ricevuto il 15-XI-1958.

(1) D. GALLARATI, *Una proprietà caratteristica della varietà cubica a tre dimensioni dello spazio S_5*, Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino **17** (1957-58), 1-14.

Assumiamo il $(2p + 2)$-edro $A_0, A_1, \ldots, A_{2p+1}$ di riferimento per le coordinate proiettive ed omogenee x_i dei punti di S_{2p+1} in modo tale che $a_i \equiv A_{2i}A_{2i+1}$ $(i = 0, 1, \ldots, p)$; e supponiamo che $L(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{2p+1})$ ed $M(\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_{2p+1})$ siano due punti di a_{p+1}. Si vede subito che è lecito supporre $\lambda_{2i} = \mu_{2i+1} = 1$, $\lambda_{2i+1} = \mu_{2i} = 0$ $(i = 0, 1, \ldots, p)$. Per ciò basta osservare che l'ipotesi che a_{p+1} sia sghemba con l'S_{2p-1} che contiene le rette $a_0, a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_p$ assicura che $\Delta_i = \lambda_{2i}\mu_{2i+1} - \lambda_{2i+1}\mu_{2i} \neq 0$, ed operare l'omografia non degenere:

$$\left\{\begin{aligned} \varrho x'_{2i} &= (\mu_{2i+1} x_{2i} - \mu_{2i} x_{2i+1})/\Delta_i \\ \varrho x'_{2i+1} &= -(\lambda_{2i+1} x_{2i} - \lambda_{2i} x_{2i+1})/\Delta_i \end{aligned}\right. \qquad (i = 0, 1, \ldots, p).$$

Ciascuno dei $\binom{p+1}{2}$ S_{2p-3}: $x_{2i} = x_{2i+1} = x_{2j} = x_{2j+1} = 0$ è segato da ogni S_{p+1} tangente di V_{p+1} secondo un S_{p-2}; e quindi il cono che proietta V_{p+1} da uno di questi S_{2p-3} ha dimensione $2p$ (²). Pertanto, se V_{p+1} è data mediante le equazioni parametriche:

$$(1) \qquad x_0 : x_1 : \ldots : x_{2p+1} = 1 : u_0 : \theta_2(u_0, u_1, \ldots, u_p) : \ldots : \theta_{2p+1}(u_0, u_1, \ldots, u_p),$$

con $\theta_l(u_0, u_1, \ldots, u_p)$ funzioni continue insieme alle derivate prime in un campo assegnato, dovranno le quattro funzioni $\theta_{2i}, \theta_{2i+1}, \theta_{2j}, \theta_{2j+1}$ (per ogni coppia di indici $i \geqslant 0$, $j \geqslant 0$; $\theta_0 = 1$, $\theta_1 = u_0$) essere proporzionali a quattro funzioni di due soli parametri essenziali.

In particolare $1, u_0, \theta_{2i}, \theta_{2i+1}$ $(i \geqslant 1)$ devono essere proporzionali a funzioni di due soli parametri; e cioè $u_0, \theta_{2i}, \theta_{2i+1}$ devono essere funzioni di due parametri. Sono allora possibili due casi:

1°) una delle due funzioni $\theta_{2i}, \theta_{2i+1}$ è funzione di u_0 e dell'altra; ad esempio $\theta_{2i+1} = \theta_{2i+1}(u_0, \theta_{2i})$;

2°) una delle due funzioni $\theta_{2i}, \theta_{2i+1}$ dipende solamente da u_0; ad esempio $\theta_{2i} = \theta_{2i}(u_0)$.

(²) F. Severi e B. Segre, *L'inviluppo di un sistema più volte infinito di curve piane*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) **8** (1930), 173-193. D. Gallarati, *Alcune osservazioni sopra le varietà i cui spazi tangenti si appoggiano irregolarmente a spazi assegnati*, Atti Accad. Naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (8) **20** (1956), 193-199.

Possiamo supporre che per i primi k valori dell'indice i si verifichi il 2° caso, per gli altri il 1° caso. V_{p+1} potrà essere rappresentata con equazioni della forma:

$$x_0 : x_1 : \ldots : x_{2p+1} = \tag{2}$$

$$= 1 : u_0 : \theta_2(u_0) : \theta_3 : \ldots : \theta_{2k}(u_0) : \theta_{2k+1} : \theta_{2k+2} : \theta_{2k+3}(u_0, \theta_{2k+2}) : \ldots : \theta_{2p} : \theta_{2p+1}(u_0, \theta_{2p}) .$$

I secondi membri delle (2) dipendono soltanto da u_0, θ_3, θ_5, ..., θ_{2k+1}, θ_{2k+2}, ..., θ_{2p}; e pertanto queste funzioni, che sono esattamente $p+1$, devono essere funzionalmente indipendenti, perchè altrimenti le (2) rappresenterebbero una V_q con $q \leqslant p$. Potremo allora assumere u_0, θ_3, θ_5, ..., θ_{2k+1}, θ_{2k+2}, ..., θ_{2p} come nuovi parametri — che seguiteremo a chiamare u_0, u_1, ..., u_p — e scrivere le equazioni di V_{p+1} nella forma:

$$x_0 : x_1 : \ldots : x_{2p+1} = 1 : u_0 : \theta_2(u_0) : u_1 : \theta_4(u_0) : u_2 : \ldots : \theta_{2k}(u_0) : u_k :$$

$$: u_{k+1} : \theta_{2k+3}(u_0, u_{k+1}) : \ldots : u_p : \theta_{2p+1}(u_0, u_p) .$$

Se $k \geqslant 1$ queste equazioni rappresentano un cono di vertice $A_3A_5 \ldots A_{2k+1}$; sarà dunque $k = 0$, e V_{p+1}:

$$x_0 : x_1 : \ldots : x_{2p+1} = \tag{3}$$

$$= 1 : u_0 : u_1 : \theta_3(u_0, u_1) : u_2 : \theta_5(u_0, u_2) : \ldots : u_i : \theta_{2i+1}(u_0, u_i) : \ldots : u_p : \theta_{2p+1}(u_0, u_p) .$$

Si vede facilmente che gli S_{p+1} tangenti di una V_{p+1} rappresentabile con equazioni della forma (3) incontrano le rette $A_{2i}A_{2i+1}$ $(i \geqslant 1)$: infatti le coordinate x_0, x_1, ..., x_{2i-1}, x_{2i+2}, ..., x_{2p+1} sono funzioni dei parametri u_0, u_1, ..., u_{i-1}, u_{i+1}, ..., u_p e cioè di p parametri soltanto, sicchè è solo $p+2$ la dimensione del cono che proietta V_{p+1} dalla retta $A_{2i}A_{2i+1}$.

Resta ancora da imporre che gli S_{p+1} tangenti di V_{p+1} si appoggino alle rette A_0A_1 ed LM.

3. – La condizione necessaria e sufficiente affinchè tutti gli S_{p+1} tangenti della V_{p+1} di equazioni (3) si appoggino alla retta A_0A_1 è che le funzioni $\theta_3(u_0, u_1)$, $\theta_5(u_0, u_2)$, ..., $\theta_{2i+1}(u_0, u_i)$, ..., $\theta_{2p+1}(u_0, u_p)$ siano integrali di un'equazione differenziale della forma:

$$\varrho(u_0,\ u_1,\ \dots,\ u_p)\left[X-\sum_1^p{}_i\, u_i\,\frac{\partial X}{\partial u_i}\right]+\sigma(u_0,\ u_1,\ \dots,\ u_p)\,\frac{\partial X}{\partial u_0}=0 \tag{4}$$

nella funzione incognita X (ϱ e σ funzioni non entrambe identicamente nulle).

Esaminiamo dapprima il caso $\varrho\sigma\equiv 0$. Se $\varrho(u_0,\ u_1,\ \dots,\ u_p)\equiv 0$, la (4) si riduce a $\partial X/\partial u_0=0$; e V_{p+1}:

$$x_0 : x_1 : \dots : x_{2p+1} = 1 : u_0 : u_1 : \theta_3(u_1) : u_2 : \theta_5(u_2) : \dots : u_p : \theta_{2p+1}(u_p)\,. \tag{5}$$

Se $\sigma(u_0,\ u_1,\ \dots,\ u_p)\equiv 0$, la (4) diventa $X-\sum_1^p{}_i u_i\cdot(\partial X/\partial u_i)=0$, e quindi $\theta_{2i+1}(u_0,\ u_i)$ è un integrale dell'equazione differenziale $X-u_i\cdot(\partial X/\partial u_i)=0$, che dà subito $\theta_{2i+1}=u_i\,\varphi_{2i+1}(u_0)$; e V_{p+1}:

$$x_0 : x_1 : \dots : x_{2p+1} = 1 : u_0 : u_1 : u_1\,\varphi_3(u_0) : u_2 : u_2\,\varphi_5(u_0) : \dots : u_p : u_p\,\varphi_{2p+1}(u_0) \tag{6}$$

è una serie semplicemente infinita di spazi S_p incidenti alle rette $a_0,\ a_1,\ \dots,\ a_p$.

Sia ora $\varrho\sigma\neq 0$. La (4), ponendovi $X=\theta_{2i+1}(u_0,\ u_i)$, dà:

$$\varrho(u_0,\ u_1,\ \dots,\ u_p)\left[\theta_{2i+1}(u_0,\ u_i)-u_i\,\frac{\partial\theta_{2i+1}}{\partial u_i}\right]+\sigma(u_0,\ u_1,\ \dots,\ u_p)\,\frac{\partial\theta_{2i+1}}{\partial u_0}=0 \tag{7}$$

$$(i=1,\ 2,\ \dots,\ p)\,.$$

Non può essere, per qualche valore di i,

$$\theta_{2i+1}(u_0,\ u_i)-u_i\,\frac{\partial\theta_{2i+1}}{\partial u_i}=\frac{\partial\theta_{2i+1}}{\partial u_0}=0\,;$$

in tal caso, infatti, si avrebbe $\theta_{2i+1}(u_0,\ u_i)=k_i u_i$ (con k_i costante) e V_{p+1} apparterrebbe all'S_{2p} di equazione $x_{2i+1}=k_i\,x_{2i}$, contro le ipotesi. La (7) implica pertanto che la funzione $\tau=-\sigma/\varrho$ sia funzione delle sole due variabili u_0, u_i ($i=1,\ 2,\ \dots,\ p$), e cioè addirittura della sola variabile u_0. Ne segue che le p funzioni $\theta_{2i+1}(u_0,\ x)$ sono integrali dell'equazione differenziale

$$X-x\,\frac{\partial X}{\partial x}=\tau(u_0)\,\frac{\partial X}{\partial u_0}\,,$$

il cui integrale generale è $X = x\Omega[M(u_0)/x]$, ove Ω è simbolo di funzione arbitraria ed $M(u_0) = \exp \int \tau^{-1}(u_0)\, du_0$. Si ha dunque per V_{p+1} la rappresentazione:

$$x_0 : x_1 : \ldots : x_{2p+1} =$$

$$= 1 : u_0 : u_1 : u_1\Omega_3[M(u_0)/u_1] : u_2 : u_2\Omega_5[M(u_0)/u_2] : \ldots : u_p : u_p\Omega_{2p+1}[M(u_0)/u_p];$$

od anche, ponendo $u_i/M(u_0) = u_i^*$ $(i = 0, 1, \ldots, p)$,

$$x_0 : x_1 : \ldots : x_{2p+1} = \alpha(u_0^*) : u_0^* : u_1^* : u_1^*\Omega_3(1/u_1^*) : \ldots : u_p^* : u_p^*\Omega_{2p+1}(1/u_p^*),$$

e cioè una rappresentazione della forma:

$$x_0 : x_1 : \ldots : x_{2p+1} = u_0 : \xi_1(u_0) : u_1 : \xi_3(u_1) : \ldots : u_p : \xi_{2p+1}(u_p)\,. \tag{8}$$

Poichè le (5) rientrano come caso speciale nelle (8) si ha intanto che: *esistono in S_{2p+1} due famiglie di V_{p+1}, non coni e non composte di spazi lineari S_{p+1}, aventi gli S_{p+1} tangenti appoggiati a $p+1$ rette indipendenti $a_0, a_1, \ldots, a_p$. Una prima famiglia, dipendente da p funzioni arbitrarie di una sola variabile, è costituita da tutte le serie semplicemente infinite di spazi S_p incidenti alle rette a_i; una seconda famiglia, dipendente da $p+1$ funzioni arbitrarie di una sola variabile, è costituita dalle V_{p+1} della forma* (8).

4. – Cerchiamo ora la condizione cui devono soddisfare le funzioni θ_2, θ_3, ..., θ_{2p+1} affinchè la V_{p+1} di equazioni (1) abbia tutti gli spazi S_{p+1} tangenti appoggiati alla retta LM, ove $L(1, 0, 1, 0, \ldots, 1, 0)$, $M(0, 1, 0, 1, \ldots, 0, 1)$.

Operiamo in S_{2p+1} l'omografia non degenere di equazioni:

$$X_0 : X_1 : \ldots : X_{2p+1} =$$

$$= x_0 : x_1 : x_2 - x_0 : x_3 - x_1 : \ldots : x_{2i} - x_0 : x_{2i+1} - x_1 : \ldots : x_{2p} - x_0 : x_{2p+1} - x_1,$$

che trasforma V_{p+1} nella V_{p+1}^*:

$$X_0 : X_1 : \ldots : X_{2p+1} =$$

$$= 1 : u_0 : \theta_2 - 1 : \theta_3 - u_0 : \ldots : \theta_{2i} - 1 : \theta_{2i+1} - u_0 : \ldots : \theta_{2p} - 1 : \theta_{2p+1} - u_0,$$

ed L, M nei punti $L^*(1, 0, 0, \ldots, 0)$ $M^*(0, 1, 0, \ldots, 0)$.

Si vede subito che affinchè gli S_{p+1} tangenti di V^*_{p+1} siano tutti incidenti alla retta L^*M^*, e cioè affinchè tutti gli S_{p+1} tangenti di V_{p+1} siano incidenti alla retta LM, è necessario e sufficiente che le funzioni $\theta_{2i}-1$, $\theta_{2i+1}-u_0$ $(i=1, 2, \ldots, p)$ siano $2p$ integrali (linearmente indipendenti) di un'equazione differenziale della forma:

$$\lambda X + \lambda_0 \frac{\partial X}{\partial u_0} + \lambda_1 \frac{\partial X}{\partial u_1} + \ldots + \lambda_p \frac{\partial X}{\partial u_p} = 0\,. \tag{9}$$

Se V_{p+1} ha equazioni della forma (6), risulta: $\theta_{2i}=u_i$, $\theta_{2i+1}=u_i\,\varphi_{2i+1}(u_0)$; e la (9), ponendovi $X=u_i-1$ fornisce $\lambda\cdot(u_i-1)+\lambda_i=0$ $(i=1, \ldots, p)$. Ne segue che affinchè gli S_{p+1} tangenti di V_{p+1} siano tutti appoggiati alla retta $a_{p+1}\equiv LM$ è necessario e sufficiente che le p funzioni $u_i\,\varphi_{2i+1}(u_0)-u_0$ siano integrali di un equazione differenziale della forma

$$\varrho(u_0, u_1, \ldots, u_p)\left[X-\sum_1^p{}_i\,(u_i-1)\frac{\partial X}{\partial u_i}\right]+\sigma(u_0, u_1, \ldots, u_p)\frac{\partial X}{\partial u_0}=0\,. \tag{10}$$

Ponendo, nella (10), $X=u_i\,\varphi_{2i+1}(u_0)-u_0$, si ha:

$$\varrho[-u_0+\varphi_{2i+1}(u_0)]+\sigma\left[u_i\frac{d\varphi_{2i+1}}{du_0}-1\right]=0\,. \tag{11}$$

Poichè i coefficienti ϱ, σ che compaiono nella (11) non sono entrambi nulli, risulta, per ogni coppia di indici i, j $(i\geqslant 1,\ j\geqslant 1)$:

$$\begin{vmatrix} u_0-\varphi_{2i+1}(u_0) & u_i\cdot(d\varphi_{2i+1}/du_0)-1 \\ u_0-\varphi_{2j+1}(u_0) & u_j\cdot(d\varphi_{2j+1}/du_0)-1 \end{vmatrix}=0,$$

ossia:

$$[\varphi_{2i+1}(u_0)-\varphi_{2j+1}(u_0)]-u_i\frac{d\varphi_{2i+1}}{du_0}[u_0-\varphi_{2j+1}(u_0)]+u_j\frac{d\varphi_{2j+1}}{du_0}[u_0-\varphi_{2i+1}(u_0)]=0,$$

uguaglianza che deve sussistere identicamente rispetto ad u_0, u_i, u_j. Deve allora essere $\varphi_{2i+1}(u_0)=\varphi_{2j+1}(u_0)=u_0$; e V_{p+1}:

$$x_0:x_1:\ldots:x_{2p+1}=1:u_0:u_1:u_0u_1:u_2:u_0u_2:\ldots:u_p:u_0u_p$$

è la varietà di C. Segre: $V_{p+1}=S_1\times S_p$.

5. – In modo simile si riconosce che condizione necessaria e sufficiente affinchè tutti gli S_{p+1} tangenti di una V_{p+1} di equazioni (8) si appoggino alla retta LM, è che le p funzioni $\xi_{2i+1}(u_i) - \xi_1(u_0)$ siano integrali di un'equazione differenziale della forma:

$$\varrho(u_0, u_1, \ldots, u_p)\left[X - \sum_1^p{}_k (u_k - u_0)\frac{\partial X}{\partial u_k}\right] + \sigma(u_0, u_1, \ldots, u_p)\sum_0^k{}_j \frac{\partial X}{\partial u_j} = 0 . \tag{12}$$

Ponendo, nella (12), $X = \xi_{2i+1}(u_i) - \xi_1(u_0)$, si ottiene:

$$\varrho\left[\xi_{2i+1}(u_i) - \xi_1(u_0) - (u_i - u_0)\frac{d\xi_{2i+1}}{du_i}\right] + \sigma\left[\frac{d\xi_{2i+1}}{du_i} - \frac{d\xi_1}{du_0}\right] = 0;$$

e perchè ϱ e σ non sono entrambi nulli si ha, per ogni coppia di indici $i, j \geqslant 1$,

$$\begin{vmatrix} \xi_{2i+1}(u_i) - u_i\dfrac{d\xi_{2i+1}}{du_i} - \left[\xi_1(u_0) - u_0\dfrac{d\xi_1}{du_0}\right] & \dfrac{d\xi_{2i+1}}{du_i} - \dfrac{d\xi_1}{du_0} \\ \xi_{2j+1}(u_j) - u_j\dfrac{d\xi_{2j+1}}{du_j} - \left[\xi_1(u_0) - u_0\dfrac{d\xi_1}{du_0}\right] & \dfrac{d\xi_{2j+1}}{du_j} - \dfrac{d\xi_1}{du_0} \end{vmatrix} = 0,$$

ossia:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \dfrac{d\xi_1}{du_0} & \dfrac{d\xi_{2i+1}}{du_i} & \dfrac{d\xi_{2j+1}}{du_j} \\ \xi_1 - u_1\dfrac{d\xi_1}{du_0} & \xi_{2i+1} - u_i\dfrac{d\xi_{2i+1}}{du_i} & \xi_{2j+1} - u_j\dfrac{d\xi_{2j+1}}{du_j} \end{vmatrix} = 0 .$$

Ma quest'identità può sussistere solamente in due casi (³):

1°) se sono nulli tutti i complementi algebrici di una delle tre colonne del determinante primo membro;

2°) se esistono tre *costanti* τ_1, τ_2, τ_3 tali che le tre funzioni $\xi_1(x)$, $\xi_{2i+1}(x)$ $\xi_{2j+1}(x)$ siano integrali dell'equazione differenziale

$$\tau_1 + \tau_2\frac{d\omega}{dx} + \tau_3\cdot\left(\omega - x\frac{d\omega}{dx}\right) = 0 . \tag{13}$$

(³) Cfr. loc. cit. in (¹), n. 5.

Nel primo caso, supposto ad esempio

$$\left\| \begin{matrix} 1 & d\xi_1/du_0 & \xi_1 - u_0\cdot(d\xi_1/du_0) \\ 1 & d\xi_{2i+1}/du_i & \xi_{2i+1} - u_i\cdot(d\xi_{2i+1}/du_i) \end{matrix} \right\| = 0 ,$$

e cioè $d\xi_1/du_0 = d\xi_{2i+1}/du_i$, $\xi_1 - u_0\cdot(d\xi_1/du_0) = \xi_{2i+1} - u_i\cdot(d\xi_{2i+1}/du_i)$, esistono due costanti l, m tali che $\xi_1(u_0) = lu_0 + m$, $\xi_{2i+1}(u_i) = lu_i + m$, e V_{p+1} appartiene all'S_{2p} di equazione $x_1 - x_{2i+1} = l\cdot(x_0 - x_{2i})$.

Nel secondo caso, se $\tau_3 = 0$ si ha subito $\xi_1(u_0) = hu_0 + k_1$, $\xi_{2i+1}(u_i) = hu_i + k_i$, $\xi_{2j+1}(u_j) = hu_j + k_j$ con h, k_1, k_i, k_j costanti, e V_{p+1} appartiene all'S_{2p-1} di equazioni $(x_1 - hx_0)/k_1 = (x_{2i+1} - hx_{2i})/k_i = (x_{2j+1} - hx_{2j})/k_j$.

Se $\tau_3 \neq 0$ la (13) fornisce $\omega(x) = h\cdot\{x - (\tau_2/\tau_3)\} - (\tau_1/\tau_3)$, con h costante; e quindi ancora V_{p+1} appartiene ad un S_{2p-1}.

6. – Per giungere al teorema enunciato basta osservare che una V_{p+1} con gli S_{p+1} tangenti appoggiati a $p+2$ rette $a_0, a_1, \ldots, a_{p+1}$ congiunte a $p+1$ a $p+1$ da un S_{2p+1}, la quale non sia composta di spazi lineari S_{p+1} nè di coni, appartiene ad un S_{2p+1} contenente $a_0, a_1, \ldots, a_p$.

Che lo spazio S_r in cui V_{p+1} è immersa contenga le $p+2$ rette a_i è conseguenza immediata dell'ipotesi che V_{p+1} non sia composta di coni; riesce dunque $r \geqslant 2p+1$. Ma non può essere $r > 2p+1$, perchè altrimenti la proiezione di V_{p+1} da un generico S_{r-2p-2} di S_r sopra un S_{2p+1} sarebbe una V^*_{p+1} di S_{2p+1} avente tutti gli S_{p+1} tangenti appoggiati a $p+2$ rette generiche; onde V^*_{p+1}, e quindi la stessa V_{p+1}, sarebbe la varietà di C. SEGRE prodotto di una retta per un S_p.