Riv. Mat. Univ. Parma 9 (1958), 67-85

CARMELO LONGO (*)

Rappresentazione degli elementi del secondo ordine di una quadrica.

1. - Introduzione.

La rappresentazione degli elementi differenziali del secondo ordine di una quadrica Q, oggetto principale della presente Nota, è il primo esempio di rappresentazione e di studio dell'insieme di tali elementi appartenenti ad una varietà V_2 topologicamente non equivalente al piano proiettivo.

Gli E_2 del piano proiettivo, studiati da G. GHERARDELLI [4] (¹) da J. G. SEMPLE [7] e da E. BOMPIANI [2], [3], si rappresentano su varietà $V^{(E_2 \subset S_2)}$ birazionalmente equivalenti a rigate le cui generatrici sono incidenti due varietà invarianti rispetto al gruppo di collineazioni della $V^{(E_2 \subset S_2)}$ in sè, isomorfo al gruppo proiettivo del piano. Ciò segue dal fatto che nel pennello di E_2 di un piano per un dato E_1 vi sono due E_2 invarianti per proiettività: l'E_2 di flesso e l'E_2 irregolare o cuspidale. Questa circostanza non sussiste nel caso degli $E_2 \subset Q$ per un dato E_1 (non asintotico), essendoci in tal caso un solo E_2 invariante dato dall'elemento irregolare (²). È questa circostanza che nella determinazione delle coordinate e nello studio delle varietà rappresentative degli $E_2 \subset Q$ implica maggiori difficoltà rispetto al caso degli $E_2 \subset S_2$ e dà quindi interesse alla presente ricerca.

(*) Prof. str. della Università di Parma. Indirizzo: Istituto di Matematica, Università, Parma, Italia.

(¹) I numeri in parentesi [ ] si riferiscono alla Bibliografia posta alla fine del lavoro.

(²) Una circostanza del tutto analoga si presenta per gli E_3 del piano per un dato E_2; da ciò, penso, derivi la ragione che non ha ancora permesso di dare la rappresentazione degli E_3 del piano, se non per particolari sottoinsiemi.

Da quanto precede si ha che le varietà $V^{(E_2 \subset Q_2)}$ sono anch'esse birazionalmente equivalenti a rigate le cui generatrici si appoggiano ad una varietà $V^{(E_1 \subset Q_2)}$ rappresentativa degli $E_1 \subset Q$.

Per questo determino anzitutto (n. **3**) le coordinate di un $E_1 \subset Q$ e caratterizzo (n. **4**) le varietà $V^{(E_1 \subset Q)}$, ed osservo (n. **5**) che i modelli che così si ottengono non sono esauriti dai modelli che si ottengono considerando le $V^{(E_1 \subset Q)}$ come varietà subordinate dei vari modelli $V^{(E_1 \subset S_3)}$ (3).

Determinate poi (n. **6**) le coordinate di un $E_2 \subset Q$, prima del breve studio (n. **9**) delle varietà $V^{(E_2 \subset Q)}$, ho creduto opportuno approfondire più ampiamente lo studio degli $E_2 \subset Q$ e di dato centro, sia perchè i fatti geometrici che si presentano in questo caso illustrano la struttura della $V^{(E_2 \subset Q)}$, ponendo in evidenza le differenze che si presentano dal caso degli $E_2 \subset S_2$, sia perchè il caso presenta interesse per se stesso, essendo equivalente allo studio degli E_2 di una calotta σ_2^2 (di S_3), caso che incidentalmente ed in modo non completo si trova già trattato in un lavoro di J. G. SEMPLE [7]. Inoltre già la rappresentazione degli $E_2 \subset \sigma_2^2$ pone in rilievo i due pennelli di E_2 asintotici messi per la prima volta in evidenza da E. BOMPIANI [1].

2. – Rappresentazione dei punti e degli elementi differenziali di una quadrica.

Siano (λ^1, λ^2) e (μ^1, μ^2) rispettivamente le coordinate omogenee di due rette proiettive.

Come è noto, la varietà *prodotto* delle due rette

$$
(2.1) \qquad \begin{cases} x^0 = \xi^{11} = \lambda^1 \mu^1, \qquad x^1 = \xi^{21} = \lambda^2 \mu^1, \\ \qquad\qquad x^2 = \xi^{12} = \lambda^1 \mu^2, \qquad x^3 = \xi^{22} = \lambda^2 \mu^2, \end{cases}
$$

è la quadrica Q (di S_3)

$$
(2.2) \qquad x^0 x^3 - x^1 x^2 = 0 .
$$

Viceversa, ogni quadrica (non singolare) Q di un S_3 proiettivo (complesso) si può rappresentare mediante le equazioni (2.1).

(3) F. SEVERI [8] per $r = 2$ ed E. MARTINELLI [6] per $r \geqslant 3$ hanno studiato e determinato la base (minima) per le varie dimensioni delle varietà $V^{(E_1 \subset S_r)}$. La conoscenza di tale base permette di dimostrare che la $V^{(E_1 \subset Q)}$ è linearmente equivalente al doppio della varietà $V^{(E_1 \subset S_2)}$ e della varietà degli E_1 (di S_3) con centro su una data retta.

Ovviamente, se si considera un S_3 proiettivo reale e le sue proiettività reali, la quadrica Q deve essere di tipo iperbolico: in tal caso anche le rette $\{\lambda\}$ e $\{\mu\}$ sono reali.

Le proiettività

$$(2.3)\qquad \begin{cases} \bar{\lambda}^\alpha = a^\alpha_{.\beta}\,\lambda^\beta, & \operatorname{Det}(a^\alpha_{.\beta}) = A \neq 0, \\ \bar{\mu}_\alpha = b^\alpha_{.\beta}\,\mu^\beta, & \operatorname{Det}(b^\alpha_{.\beta}) = B \neq 0 \end{cases} \qquad (\alpha,\ \beta = 1,\ 2)$$

inducono nello S_3 una proiettività che trasforma Q in sè e quindi fanno passare dalla rappresentazione (2.1) ad una rappresentazione equivalente; e viceversa.

Siano

$$(2.4)\qquad \lambda^\alpha = \lambda^\alpha(t), \qquad \mu^\alpha = \mu^\alpha(t),$$

funzioni del parametro (uniformizzante) t, definite in uno stesso intervallo ed ivi differenziabili di classe $s \geqslant 1$.

Sostituendo le (2.4) nelle (2.1) si ottengono le funzioni

$$(2.5)\qquad x^i = x^i(t) \qquad (i = 0,\ 1,\ 2,\ 3)$$

che per $t = t_0$ definiscono un elemento differenziale appartenente a Q. Viceversa, ogni tale elemento ammette una rappresentazione del tipo (2.4).

Si ottengono rappresentazioni (2.4) equivalenti per i seguenti cambiamenti ammissibili:

1) cambiamento del parametro (uniformizzante) t in un altro parametro uniformizzante $\bar{t}$,

$$(2.6)\qquad t = t(\bar{t});$$

2) cambiamenti dei fattori di proporzionalità sia nelle λ^α sia nelle μ^α, ossia del tipo

$$(2.7)\qquad \bar{\lambda}^\alpha = \varrho_1\,\lambda^\alpha, \qquad \bar{\mu}^\alpha = \varrho_2\,\mu^\alpha;$$

3) cambiamenti del tipo (2.3).

3. - Coordinate degli E_1 appartenenti a Q.

Indicate con $u^{ik} = -u^{ki}$ le *coordinate della tangente* all'elemento (2.5) e posto

$$p^{ik} = x^{[i} \frac{dx^{k]}}{dt} = x^i \frac{dx^k}{dt} - x^k \frac{dx^i}{dt}, \tag{3.1}$$

si ha

$$X u^{ik} = p^{ik}. \tag{3.2}$$

Se z_{ik} sono le coordinate di una generica retta z, posto

$$(z,\ p) = z_{ik}\ p^{ik}, \qquad (z,\ u) = z_{ik}\ u^{ik},$$

il fattore di proporzionalità X si può esprimere mediante l'espressione

$$X = (z,\ p)/(z,\ u)\,. \tag{3.3}$$

Per $X \neq 0$, le (2.5) determinano un elemento regolare, mentre per $X = 0$ si ha un elemento non regolare, corrispondentemente al fatto che, supposte le (2.5) analitiche, esse determinano rispettivamente un ramo lineare o non lineare.

Ciò premesso, posto

$$P^{12} = X\varLambda = \lambda^{[1} \frac{d\lambda^{2]}}{dt}, \qquad P^{34} = XM = \mu^{[1} \frac{d\mu^{2]}}{dt} \tag{3.4}$$

e tenuto conto delle (2,4), si verifica facilmente che per le coordinate u^{ik} della tangente si ha:

$$\begin{cases} u^{01} = (\mu^1)^2 \varLambda, & u^{02} = (\lambda^1)^2 M, \qquad u^{03} = \mu^1 \mu^2 \varLambda + \lambda^1 \lambda^2 M, \\ u^{23} = (\mu^2)^2 \varLambda, & u^{13} = (\lambda^2)^2 M, \qquad u^{12} = -\mu^1 \mu^2 \varLambda + \lambda^1 \lambda^2 M\,. \end{cases} \tag{3.5}$$

Quindi: *Un E_1 appartenente alla quadrica Q,* (2.2), *individua ed è individuato dalle coordinate*

$$\lambda^1,\ \lambda^2; \qquad \mu^1,\ \mu^2; \qquad \varLambda,\ M\,. \tag{3.6}$$

Le coordinate λ e μ individuano il *centro*, le coordinate Λ, M individuano la *tangente* avente le (3.5) come coordinate plükeriane.

In particolare si osservi che $\Lambda = 0$ ($M = 0$) caratterizza gli E_1 della schiera di generatrici $\lambda = \lambda^1/\lambda^2 = \text{cost.}$ ($\mu = \text{cost.}$).

Determiniamo come si alterino le coordinate (3.6) per i cambiamenti ammissibili.

Dal significato stesso delle dette coordinate segue che esse sono indipendenti dai cambiamenti (2.6) del parametro t.

D'altra parte ciò si verifica immediatamente osservando che dalle (3.3) e (3.4) segue

$$(3.7) \qquad \overline{X} = \left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\bar{t}}\right)_0 X, \qquad \overline{P}^{12} = \left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\bar{t}}\right)_0 P^{12}, \qquad \overline{P}^{34} = \left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\bar{t}}\right)_0 P^{34},$$

le quali implicano l'invarianza di Λ e M e quindi delle (3.5).

Per cambiamenti (2.7) si ha

$$(3.8) \qquad \overline{X} = \varrho_1^2\,\varrho_2^2\,X, \qquad \overline{P}^{12} = \varrho_1^2\,P^{12}, \qquad \overline{P}^{34} = \varrho_2^2\,P^{34},$$

ne segue, tenuto conto delle (3.7),

$$(3.9) \qquad \overline{\Lambda} = \Lambda/\varrho_2^2, \qquad \overline{M} = M/\varrho_1^2\,.$$

Osservato poi che oltre ai cambiamenti detti sono ammissibili anche i cambiamenti

$$\bar{u}^{ik} = \sigma\,u^{ik},$$

segue che il gruppo di coordinate (3.6) è *equivalente* al gruppo

$$(3.10) \qquad \varrho_1\,\lambda^1,\ \varrho_1\,\lambda^2; \qquad \varrho_2\,\mu^1,\ \varrho_2\,\mu^2; \qquad (\sigma/\varrho_2^2)\Lambda,\ (\sigma/\varrho_1^2)M$$

od anche

$$(3.10') \qquad \varrho_1\,\lambda; \qquad \varrho_2\,\mu; \qquad \sigma\,\varrho_1^2\,\Lambda,\ \sigma\,\varrho_2^2\,M\,.$$

Infine, tenuto conto dei cambiamenti (2.3), si ha che il gruppo di coordinate (3.6) è anche equivalente al gruppo

$$(3.11) \qquad a^{\alpha}_{\cdot\beta}\,\lambda^{\beta}; \qquad b^{\alpha}_{\cdot\beta}\,\mu^{\beta}; \qquad A\Lambda,\ BM,$$

ciò che conferma quanto già si è osservato sul significato geometrico di $\Lambda = 0$ (ovvero $M = 0$).

Quindi: *Un* E_1 *appartenente alla quadrica* Q, (2.2), *è individuato dal gruppo di coordinate* (3.6) *equivalente ai gruppi* (3.10) *e* (3.11). *Le coordinate* (3.6) *individuano le coordinate* (2.1) *del centro e le coordinate* (3.5) *della tangente dell'*E_1.

4. - Varietà rappresentativa degli $E_1 \subset Q$.

Dalla legge di trasformazione (3.10) o (3.10′) delle coordinate (3.6) di un $E_1 \subset Q$, segue che le varietà $V^{(E_1 \subset Q)}$, birazionalmente equivalenti tra loro, e rappresentanti l'insieme $\infty^3 \{E_1;\ Q\}$ degli $E_1 \subset Q$, hanno equazioni parametriche

$$\zeta = \Lambda^{l_1} M^{l_2} (\lambda)^{2l_2+p} (\mu)^{2l_1+q} \qquad (l_1 + l_2 = l)\,. \tag{4.1}$$

Si verifica subito infatti che, fissati l, p, q, le espressioni (4.1) sono omogenee di gradi l, $l+p$, $l+q$ rispettivamente nei fattori arbitrari σ, ϱ_1, ϱ_2 che compaiono nelle (3.10′).

Tra le varietà subordinate alla varietà $V_3^{(E_1 \subset Q)}$ (4.1) segnaliamo le seguenti:

1) *Varietà* $V_1 = V(P)$ *degli* E_1 *di dato centro*: supposto $P \equiv O_0(1, 0, 0, 0)$ $(\lambda^2 = \mu^2 = 0)$, questa è rappresentata dalle equazioni

$$\zeta = \Lambda^{l_1} M^{l_2}.$$

2) *Varietà* $V_1 = V(g;\ g)$ *degli* E_1 *di una generatrice*: supposto $\lambda^2 = 0$, $\lambda^1 = 1$, $\Lambda = 0$, $M = 1$, essa è rappresentata da

$$\zeta = (\mu)^q.$$

3) *Varietà* $V_1 = V(g_1;\ g_2)$ *degli* E_1 *con centri su una generatrice* g_1 *e tangenti alle generatrici* g_2 *dell'altro regolo*: supposto $\lambda^2 = 0$, $\lambda^1 = 1$, $M = 0$, $\Lambda = 1$, essa è rappresentata da

$$\zeta = (\mu)^{2l+q}.$$

4) *Varietà* $V_2 = V(\sum_1)$ *degli* E_1 *di un regolo*: supposto $\Lambda = 0$, $M = 1$, essa è rappresentata da

$$\zeta = (\lambda)^{2l+p} (\mu)^q .$$

Questa, come è evidente, è un modello birazionalmente equivalente alla quadrica.

5) *Varietà* $V_2 = V(g)$ *degli* E_1 *con centri su una data generatrice*: supposto $\lambda^2 = 0$, $\lambda^1 = 1$, si ha

$$\zeta = \Lambda^{l_1} M^{l_2} (\mu)^{2l_2+q} .$$

Tenute presenti le espressioni precedenti delle dette varietà, è subito visto che, se si vuole corrispondenza biunivoca tra l'insieme $\{E_1;\, Q\}$ ed i punti della varietà rappresentativa (4.1), si deve avere $l \geqslant 1$, $p \geqslant 1$, $q \geqslant 1$: pertanto il modello minimo si ottiene per

$$l = p = q = 1 .$$

Per tale modello la varietà V_3 ha le equazioni

$$\text{(4.2)} \qquad \begin{cases} \xi^{\alpha;\, \beta_1 \beta_2 \beta_3} = \Lambda\, \lambda^{\alpha}\, \mu^{\beta_1}\, \mu^{\beta_2}\, \mu^{\beta_3} \\ \eta^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3;\, \beta} = M\, \lambda^{\alpha_1}\, \lambda^{\alpha_2}\, \lambda^{\alpha_3}\, \mu^{\beta} \end{cases} \qquad (\alpha,\ \alpha_i,\ \beta,\ \beta_i = 1,\ 2) .$$

Si ha perciò una V_3 rigata luogo delle rette congiungenti punti corrispondenti di due modelli della quadrica, $V(\Sigma_1)$ e $V(\Sigma_2)$, rappresentanti rispettivamente gli E_1 di ciascuno dei due regoli Σ_1 e Σ_2.

Si dimostra facilmente che il modello (4.2) ha ordine $d = 22$ ed appartiene ad un S_{15}.

Osservazione. In generale si dimostra che il modello (4.1) appartiene ad un S_N con

$$\text{(4.3)} \qquad N = (l+1)\{(p+1)(q+1) + l(p+q+2) + (2/3)l(l-1)\} - 1,$$

ed ha ordine

$$\text{(4.4)} \qquad d = 2l(2l^2 + 3lp + 3lq + 3pq) .$$

5. – La varietà degli $E_1 \subset Q$ come varietà subordinata della varietà degli $E_1 \subset S_3$.

Ricordiamo che, indicati con $x = (x^i)$ e con $u = (u^{ik})$ rispettivamente le coordinate del centro e della tangente di un E_1 di S_3, soddisfacenti quindi alle condizioni di appartenenza $[x, u] = 0$, le varietà V_5 rappresentanti l'insieme dei detti E_1 sono date da

$$\xi = (x)^m (u)^n, \qquad [x, u] = 0 . \tag{5.1}$$

La base di dimensione 3 della precedente varietà è costituita dalle tre varietà [**6**, p. 933]:

1) varietà $V_3^{(1)} = ([\overset{*}{1}, 3]_3)_3$ degli E_1 con centro su una data retta;

2) varietà $V_3^{(2)} = ([0, \overset{*}{3}]_2)_3$ degli E_1 con tangente per un dato punto;

3) varietà $V_3^{(3)} = ([1, \overset{*}{2}]_2)_3$ degli E_1 di un dato piano.

Per la varietà $V_3^{(E_1 \subset Q)}$ si ha quindi l'equivalenza lineare

$$V_3^{(E_1 \subset Q)} \equiv a_i\, V_3^{(i)},$$

dalla quale, intersecando con le varietà $([0, \overset{*}{2}]_1)_2$ (E_1 con centro su un piano e tangente per un suo punto), $([\overset{*}{0}, 3]_2)_2$ (E_1 con dato centro), $([\overset{*}{1}, 2]_2)_2$ (E_1 con centri su una data retta ed appartenenti ad un dato piano), duali rispettivamente delle varietà $V_3^{(i)}$ (e costituenti la base di dimensione $k = 2$), si ottiene $a_1 = 2$, $a_2 = 0$, $a_3 = 2$ e perciò

$$V_3^{(E_1 \subset Q)} = 2([\overset{*}{1}, 3]_3)_3 + 2([1, \overset{*}{2}]_2)_3, \tag{5.2}$$

la quale ci afferma che se Q degenera in due piani la $V_3^{(E_1 \subset Q)}$ degenera nelle due varietà degli E_1 dei due piani e nella varietà, contata due volte, degli E_1 con centro sulla retta comune ai due piani.

Osservato che, considerato il modello (5.1), le due varietà $V_3^{(1)}$ e $V_3^{(3)}$ hanno rispettivamente gli ordini $d^{(1)} = n^2(3m + 2n)$ e $d^{(3)} = 3mn(m + n)$, dalla (5.2) segue per l'ordine d della $V_3^{(E_1 \subset Q)}$,

$$d = 2n(2n^2 + 3m^2 + 6mn),$$

che si ottiene dalla (4.4) per $l = n$, $p = q = m$.

Quindi, i modelli (5.2) che si ottengono dalla varietà (5.1) non esauriscono i modelli (4.1).

6. - Coordinate degli $E_2 \subset Q$.

Ricordiamo anzitutto le coordinate di un E_2 di S_r.
Ho dimostrato [**5**, p. 361] che

Un E_2 di S_3 è determinato dal sistema di coordinate

$$x^i; \qquad u^{ik}; \qquad X, \ U_i, \qquad\qquad (i, k = 0, 1, 2, 3), \tag{6.1}$$

insieme alle condizioni di appartenenza: 1) $[x, u] = 0$ *del punto x alla retta u;* 2) $[u, U]$ *della retta u al piano di coordinate U_i; ove il gruppo* (6.1) *si ritenga equivalente al gruppo*

$$\varrho x^i, \qquad \sigma u^{ik}, \qquad \nu \frac{\varrho^2}{\sigma} X, \qquad \nu \frac{\sigma^2}{\varrho} U_i, \tag{6.1'}$$

con ϱ, σ, ν fattori arbitrari indipendenti non nulli.

Le x^i sono le coordinate del centro x dell'E_2, le u^{ik} quelle della tangente, X ha l'espressione (3.3); inoltre, rappresentato l'elemento con le (2.5) e posto

$$\pi_i = \frac{1}{2} \left| x^j, \quad \frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}t}, \quad \frac{\mathrm{d}^2 x^l}{\mathrm{d}t^2} \right| \tag{6.2}$$

(con i, j, k, l permutazione della stessa classe di 0, 1, 2, 3), si ha

$$\pi_i = X^2 \, U_i \, . \tag{6.3}$$

Si verifica facilmente che, posto

$$P^{ik} = \lambda^{[i} \frac{\mathrm{d}\lambda^{k]}}{\mathrm{d}t} \qquad (i, k = 1, 2, 3, 4; \qquad \lambda^3 = \mu^1, \ \lambda^4 = \mu^2), \tag{6.4}$$

$$H = 2\left(P^{12} \frac{\mathrm{d}P^{24}}{\mathrm{d}t} - P^{34} \frac{\mathrm{d}P^{12}}{\mathrm{d}t}\right) \tag{6.5}$$

per un $E_2 \subset Q$, rappresentato quindi dalle (2.4), si ha

$$\begin{cases} \pi_0 = \lambda^2 \mu^2 H - P^{12} P^{34} P^{24} \\ \pi_1 = - \lambda^1 \mu^2 H - P^{12} P^{34} P^{41} \\ \pi_2 = - \lambda^2 \mu^1 H - P^{12} P^{34} P^{32} \\ \pi_3 = \lambda^1 \mu^1 H - P^{12} P^{34} P^{13} \, . \end{cases} \tag{6.6}$$

Si osservi che le P^{ik}, potendo essere considerate come coordinate di una retta per il punto (λ^i) $(i = 1, 2, 3, 4)$, soddisfano le condizioni

$$(6.7) \qquad \lambda^i \widehat{P^{kj}} = 0, \qquad P^{12} \widehat{P^{34}} = 0 .$$

Tenute presenti le (3.4), in generale si ha

$$(6.8) \qquad P^{ik} = X\, L^{ik} \qquad (L^{12} = \Lambda,\ L^{34} = M) .$$

Inoltre per le (6.3), posto

$$(6.9) \qquad H = X^2\, U,$$

segue:

$$(6.10) \qquad \begin{cases} U_0 = \lambda^2 \mu^2\, U - \Lambda M X\, L^{24} \\ U_1 = - \lambda^1 \mu^2\, U - \Lambda M X\, L^{41} \\ U_2 = - \lambda^2 \mu^1\, U - \Lambda M X\, L^{32} \\ U_3 = \lambda^1 \mu^1\, U - \Lambda M X\, L^{13}, \end{cases}$$

ove le $L^{ik} = - L^{ki}$ soddisfano, per le (6.7), alle condizioni:

$$(6.11) \qquad \begin{cases} \lambda^1 L^{32} + \lambda^2 L^{13} = \mu^1 \Lambda, & \lambda^1 L^{42} + \lambda^2 L^{14} = \mu^2 \Lambda \\ \mu^1 L^{14} + \mu^2 L^{31} = \lambda^1 M, & \mu^1 L^{24} + \mu^2 L^{32} = \lambda^2 M, \end{cases}$$

le quali implicano la condizione quadratica

$$(6.11') \qquad \Lambda\, M + L^{13} L^{42} + L^{14} L^{23} = 0 .$$

Qa quanto ricordato all'inizio e da quanto successivamente esposto segue che

Un E_2 appartenente alla quadrica Q, (1.2), *ammette le coordinate*

$$(6.12) \qquad \lambda^1, \lambda^2; \qquad \mu^1, \mu^2; \qquad \Lambda, M; \qquad X, U_i,$$

ove le U_i sono determinate dalle (6.10), *con le L^{ik} soddisfacenti le condizioni* (6.11) .

Sia dall'equivalenza tra i due gruppi di coordinate (3.6), (3.10) ed i gruppi (6.1), (6.1′), sia con calcolo diretto, si dimostra che il gruppo di coordinate (6.12) è equivalente al gruppo

$$(6.12') \qquad \varrho_1 \lambda; \qquad \varrho_2 \mu; \qquad \sigma\varrho_2^{-2} A, \ \sigma\varrho_1^{-2} M; \qquad \nu\sigma^{-1} \varrho_1^2 \varrho_2^2 X, \ \nu\sigma^2 \varrho_1^{-1} \varrho_2^{-1} U_i,$$

od anche

$$(6.12'') \qquad \varrho_1 \lambda; \qquad \varrho_2 \mu; \qquad \sigma\varrho_1^2 A, \ \sigma\varrho_2^2 M; \qquad \nu\varrho_1^3 \varrho_2^3 X, \ \nu\sigma^3 \varrho_1^6 \varrho_2^6 U_i .$$

Inoltre per cambiamenti del tipo (2.3) segue che il gruppo (6.12) è equivalente anche al gruppo

$$(6.12''') \qquad a^{\alpha}_{.\beta} \lambda^{\beta}; \qquad b^{\alpha}_{.\beta} \mu^{\beta}; \qquad AA, \ BM; \qquad X, \ a^{j}_{.i} U_j$$

con

$$(6.13) \qquad (a^{j}_{.i}) = \begin{pmatrix} a^2_{.2} b^2_{.2} & a^2_{.1} b^2_{.2} & a^2_{.2} b^2_{.1} & a^2_{.1} b^2_{.1} \\ a^1_{.2} b^2_{.2} & a^1_{.1} b^2_{.2} & a^1_{.2} b^2_{.1} & a^1_{.1} b^2_{.1} \\ a^2_{.2} b^1_{.2} & a^2_{.1} b^1_{.2} & a^2_{.2} b^1_{.1} & a^2_{.1} b^1_{.1} \\ a^1_{.2} b^1_{.2} & a^1_{.1} b^1_{.2} & a^1_{.2} b^1_{.1} & a^1_{.1} b^1_{.1} \end{pmatrix} .$$

Per l'E_2 individuato dalle coordinate (6.12) il *centro* ha le coordinate (2.1), la *tangente* ha le coordinate (3.5) ed il *piano* dell'E_2 ha l'equazione

$$(6.14) \qquad U\,(\lambda^2 \mu^2 x^0 - \lambda^1 \mu^2 x^1 - \lambda^2 \mu^1 x^2 + \lambda^1 \mu^1 x^3) -$$
$$- 2AMX\,(L^{24} x^0 + L^{41} x^1 + L^{32} x^2 + L^{13} x^3) = 0,$$

appartenendo, quindi, al fascio determinato dal piano tangente a Q nel centro dell'E_2 e dal piano

$$L^{24} x^0 + L^{41} x^1 + L^{32} x^2 + L^{13} x^3 = 0,$$

il quale, in conseguenza delle (6.11), passa per la tangente all'E_2 ma è *distinto* dal detto piano tangente a Q.

Osservazione. Si verifica che per i cambiamenti ammissibili il parametro U che compare nelle (6.9) e (6.10) si trasforma secondo la seguente legge:

$$(6.15) \qquad \overline{U} = \nu\sigma^2 \varrho_1^{-2} \varrho_2^{-2} AB\,(U + \nu AM) .$$

Da questa, od anche direttamente, si potrebbe dedurre la legge di trasformazione delle singole L^{ik}.

La (6.12′) e la (6.15) pongono in evidenza i seguenti ***sottoinsiemi*** (di E_2) ***invarianti***:

1) Sottoinsieme degli ∞^3 E_2 *non regolari*, caratterizzati da $X = 0$: per questi si può prendere $U = 1$, ed inoltre tale sottoinsieme si può identificare con l'insieme degli $E_1 \subset Q$.

2) Sottoinsieme degli $\infty^3 E_2$ *asintotici* (ossia con E_1 asintotico): si dividono in due schiere caratterizzate rispettivamente da $\Lambda = 0$, ovvero $M = 0$. Un tale E_2 è individuato dalle coordinate

$$\lambda; \qquad \mu; \qquad X,\ U.$$

3) Ciascuna schiera di E_2 asintotici comprende infine un sottoinsieme ∞^2 di E_2 *inflessionali* caratterizzati rispettivamente da $\Lambda = U = 0$, ovvero $M = U = 0$. Ciascuno di questi sottoinsiemi si può identificare con gli E_1 di una schiera di generatrici.

7. - $E_2 \subset Q$ e di dato centro.

Ha particolare interesse la totalità degli ∞^2 $E_2 \subset Q$ e di dato centro, poichè essa coincide con la totalità degli E_2 appartenenti ad una data *calotta del secondo ordine*, σ_2^2, di S_3.

Con le notazioni introdotte, supposto che il centro sia il punto $O_0(1, 0, 0, 0)$, i detti E_2 si ottengono per $\lambda^2 = \mu^2 = 0$ ($\lambda^1 = \mu^1 = 1$) e quindi per essi dalle (6.11) e (6.10) si ottiene rispettivamente

$$L^{24} = 0, \qquad L^{32} = \Lambda, \qquad L^{14} = M,$$

$$U_0 = 0, \qquad U_1 = \Lambda M^2 X, \qquad U_2 = -\Lambda^2 MX, \qquad U_3 = U - \Lambda MX L^{13}.$$

Considerate le proiettività

$$\bar{\lambda} = \alpha\lambda/(1 - \theta_1\lambda), \qquad \bar{\mu} = \beta\mu/(1 - \theta_2\mu) \tag{7.1}$$

che mutano la σ_2^2 in sè, e posto $U_0 = \mathfrak{U}$, per i detti E_2 si può assumere il gruppo di coordinate

$$\Lambda,\ M; \qquad X,\ \mathfrak{U}, \tag{7.2}$$

equivalente al gruppo

$$\sigma\alpha A,\ \sigma\beta M; \qquad \nu X,\ \nu\sigma^3\alpha\beta\{\mathfrak{A}-2AMX(\theta_1 A-\theta_2 M)\}. \tag{7.2'}$$

Alle stesse coordinate (7.2) si può pervenire con gli stessi metodi già adoperati nel caso di E_2 aventi lo stesso centro ed appartenenti ad un piano.

Per questo basta osservare che, considerato un piano affine di coordinate (affini) $\lambda=\lambda^2/\lambda^1$, $\mu=\mu^2/\mu^1$, un $E_2\subset Q$ e di centro O_0 è individuato da una curva

$$f(\lambda,\mu)=\varphi_1(\lambda,\mu)+\varphi_2(\lambda,\mu)+\ldots=0, \tag{7.3}$$

con le φ_h forme di grado h.

Quindi, posto

$$\varphi_1=a_1\lambda+a_2\mu, \qquad A=\varphi_2(a_2,-a_1),$$

si possono assumere [**2**, pp. 82-90] come coordinate dell'E_2

$$a_1,\ a_2; \qquad A; \qquad \text{od anche} \qquad \sigma a_1,\ \sigma a_2; \qquad \sigma^3 A. \tag{7.4}$$

Mentre, però, nel caso del piano gli E_2, (7.2), vanno considerati rispetto al gruppo delle trasformazioni

$$\bar\lambda=\bar\lambda(\lambda,\mu), \qquad \bar\mu=\bar\mu(\lambda,\mu)$$

centro-affini, nel caso attuale le precedenti trasformazioni appartengono al gruppo più ampio delle trasformazioni puntuali per le quali è unito il punto $\lambda=\mu=0$ ed inoltre sono unite le direzioni (per esso) $\lambda=0$ e $\mu=0$. Ed è appunto la considerazione di questo gruppo che implica la trasformazione

$$\bar A=\alpha\beta\sigma^3\{A+a_1a_2\,(\theta_1a_1+\theta_2a_2)\}$$

del parametro A, mentre nel piano è invariante la condizione $A=0$, rappresentante elementi di flesso.

La (7.3) rappresenta una corrispondenza tra le due rette $\{\lambda\}$ e $\{\mu\}$ nell'intorno dei punti corrispondenti $O(\lambda=0)$ e O' $(\mu=0)$: poichè le coordinate (7.4) hanno senso solo per a_1, a_2 non ambedue nulli, si vengono così a considerare corrispondenze nelle quali almeno uno dei due punti O ed O' è semplice.

Se si vogliono considerare anche corrispondenze nelle quali ambedue i punti O ed O' sono doppi (o di diramazione) e si vogliono escludere le corrispondenze *localmente degeneri*, conviene rappresentare la corrispondenza (7.3) nella forma parametrica

$$\lambda = \lambda(t), \qquad \mu = \mu(t), \tag{7.5}$$

con t parametro uniformizzante $[\lambda(0) = \mu(0) = 0]$.

Posto

$$\mathrm{d}\lambda/\mathrm{d}t = XA, \qquad \mathrm{d}\mu/\mathrm{d}t = XM, \tag{7.6}$$

$$H = \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}^2\mu}{\mathrm{d}t^2} - \frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}^2\lambda}{\mathrm{d}t^2}\right) = \frac{1}{2}X^2\mathfrak{A} \qquad (\mathfrak{A} = A\cdot\mathrm{d}M - M\cdot\mathrm{d}A), \tag{7.6'}$$

sulla quadrica Q (o calotta)

$$x^0 = 1, \qquad x^1 = \lambda, \qquad x^2 = \mu, \qquad x^3 = \lambda\mu$$

la corrispondenza (7.5) ha come immagine una curva avente (in O_0) la *tangente*

$$M\,x^1 - A\,x^2 = 0, \qquad x^3 = 0 \tag{7.7}$$

ed appartenente al *piano*

$$AMX\,(Mx^1 - Ax^2) + \mathfrak{A}x^3 = 0\,. \tag{7.8}$$

Osservato che: 1) posto $\overline{A} = \sigma A$, $\overline{M} = \sigma M$, dalle (7.6) segue $\overline{X} = X/\sigma$ e dalle (7.6′) o (7.8) segue $\overline{\mathfrak{A}} = \sigma^2\mathfrak{A}$; 2) posto $t = t(\overline{t})$, segue che $\dfrac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}\overline{t}} = \dfrac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t}\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\overline{t}}$, $\dfrac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\overline{t}} = \dfrac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}t}\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\overline{t}}$, $\overline{H} = \left(\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\overline{t}}\right)^3 H$; si ha che alle coordinate (7.2) si possono sostituire le coordinate equivalenti

$$\sigma A,\ \sigma M; \qquad \nu\sigma^{-1}X,\ \nu\sigma^2\mathfrak{A}\,.$$

Considerati, infine, i cambiamenti proiettivi (7.1) rispettivamente su λ e su μ, si riottiene il gruppo di coordinate (7.2′).

Per $AMX \neq 0$ la corrispondenza (7.5) è rappresentata su Q da un E_2 regolare, ed è perciò approssimabile da una proiettività, non degenere; per $AM = 0$ si ha approssimazione mediante proiettività degeneri; infine per $X = 0$ la corrispondenza è rappresentata da un elemento *non* regolare.

Si osservi ancora che per $X \neq 0$, posto $X = 1$, da (7.6) e (7.6′) segue $A = a_2$, $M = -a_1$, $H = A/2$.

8. - Rappresentazione degli $E_2 \subset Q$ e di dato centro.

Tenuta presente l'equivalenza tra i due gruppi di coordinate (7.2) e (7.2') segue che gli ∞^2 $E_2 \subset Q$ e di dato centro, o E_2 di una calotta del 2° ordine, σ_2^2, si rappresentano biunivocamente nei punti della rigata R_2^5 di S_6:

$$(8.1) \qquad \begin{cases} \xi_1 = X\Lambda^4, \quad \xi_2 = X\Lambda^3 M, \quad \xi_3 = X\Lambda^2 M^2, \quad \xi_4 = X\Lambda M^3, \quad \xi_5 = XM^4, \\ \eta_1 = \mathfrak{Ql}\Lambda, \qquad \eta_2 = \mathfrak{Ql}M, \end{cases}$$

che, in forma abbreviata, scriveremo anche

$$(8.2) \qquad \xi = X(\Lambda, M)^4 \qquad \eta = \mathfrak{Ql}(\Lambda, M),$$

luogo delle rette congiungenti punti corrispondenti in una data proiettività tra la direttrice rettilinea $\mathfrak{C}^1$ ($\xi_i = 0$) ed una direttrice $\mathfrak{C}^4$ ($\eta = 0$).

La direttrice $\mathfrak{C}^1$ rappresenta E_2 *non* regolari. Le due generatrici

$$g_\lambda\ (M = 0;\ \xi_2 = \ldots = \xi_5 = 0,\ \eta_2 = 0), \qquad g_\mu\ (\Lambda = 0;\ \xi_1 = \ldots = \xi_4 = 0,\ \eta_1 = 0)$$

rappresentano rispettivamente i due pennelli di E_2 asintotici; i punti Ω_1 ($M = \mathfrak{Ql} = 0$), Ω_2 ($\Lambda = \mathfrak{Ql} = 0$) appartenenti rispettivamente a g_λ e a g_μ rappresentano i due E_2 inflessionali.

La direttrice $\mathfrak{C}^4$ si può sostituire con un'altra qualsiasi direttrice $\overline{\mathfrak{C}}^4$ per i punti Ω_1, Ω_2.

Si ha:

La geometria degli E_2 di una calotta di σ_2^2 di S_3, rispetto al gruppo delle proiettività di S_3 che mutano in sè la σ_2^2, equivale alla geometria di una R_2^5 di S_6 rispetto al gruppo proiettivo (di S_6) che muta in sè la R_2^5 lasciando invarianti la direttrice rettilinea, due generatrici, e due punti rispettivamente su queste.

9. - Varietà rappresentativa degli $E_2 \subset Q$.

Tenute presenti le coordinate (6.12) di un E_2 appartenente alla quadrica Q, (2.2), segue che le equazioni parametriche di una varietà $V_4^{(E_2 \subset Q)}$, rappresentante mediante i suoi punti l'insieme ∞^4 degli $E_2 \subset Q$, debbono essere del tipo

$$(9.1) \qquad \zeta = X^{p_1} (U_i)^{p_2} \Lambda^{q_1} M^{q_2} (\lambda)^{h_1} (\mu)^{h_2}.$$

Queste, per l'equivalenza tra i gruppi (6.12) e (6.12′) o (6.12″), debbono soddisfare le seguenti *condizioni di omogeneità* nei prametri (arbitrari e non nulli) ϱ_i, σ, ν:

1) omogeneità di grado n in ν, da cui

$$p_1 + p_2 = n;$$

2) omogeneità di grado s in σ, da cui

$$q_1 + q_2 + 3p_2 = s;$$

3) omogeneità di gradi r_1, r_2 rispettivamente nei parametri ϱ_1, ϱ_2, da cu,

$$3p_1 + 6p_2 + 2q_1 + h_1 = r_1, \qquad 3p_1 + 6p_2 + 2q_2 + h_2 = r_2 .$$

Inoltre le coordinate ζ, (9.1), non possono essere tutte indipendenti dovendo tra esse sussistere relazioni derivanti dalle relazioni (6.11).

Per la biunivocità tra l'insieme degli E_2 ed i punti della V_4, si deve avere

$$n \geqslant 1, \qquad q_1 + q_2 \geqslant 1, \qquad h_1,\ h_2 \geqslant 1,$$

da cui segue che il *modello minimo* si ottiene per

$$p = 1, \qquad s = 4, \qquad r_1 = r_2 = 12 .$$

Per esso si hanno perciò le equazioni parametriche

$$(9.2)\quad \begin{cases} \xi^{l;\ \alpha_1 \dots \alpha_{1+2l};\ \beta_1 \dots \beta_{9-2l}} = X \Lambda^{4-l}\, M^l\, \lambda^{\alpha_1} \dots \lambda^{\alpha_{1+2l}}\, \mu^{\beta_1} \dots \mu^{\beta_{9-2l}} \\ \eta_i^{l_1;\ \alpha_1 \dots \alpha_{4+2l_1};\ \beta_1 \dots \beta_{6-2l_1}} = (U_i)\, \Lambda^{1-l_1}\, M^{l_1}\, \lambda^{\alpha_1} \dots \lambda^{\alpha_{4+2l_1}}\, \mu^{\beta_1} \dots \mu^{\beta_{6-2l_1}} \\ (l = 0,\ 1,\ \dots\ 4; \qquad l_1 = 0,\ 1; \qquad \alpha_i,\ \beta_i = 1,\ 2) . \end{cases}$$

Determiniamo ora le relazioni alle quali debbono soddisfare le coordinate (9.2) come conseguenza delle relazioni (6.11).

Moltiplicando, per esempio, le prime due relazioni (6.11) per $\lambda^{\alpha_1}\lambda^{\alpha_2}\lambda^{\alpha_3}\mu^{\beta_1} \dots \mu^{\beta_6} X \Lambda^2 M$, tenuto conto delle (6.10) e delle (9.2), si hanno le relazioni lineari:

$$(9.3)\quad \begin{cases} \eta_0^{0;\ 1\alpha_1\alpha_2\alpha_3;\ \beta_1 \dots \beta_6} + \eta_1^{0;\ 2\alpha_1\alpha_2\alpha_3;\ \beta_1 \dots \beta_6} = \xi^{1;\ \alpha_1 \dots \alpha_3;\ 2\beta_1 \dots \beta_6} \\ \eta_2^{0;\ 1\alpha_1\alpha_2\alpha_3;\ \beta_1 \dots \beta_6} + \eta_3^{0;\ 2\alpha_1\alpha_2\alpha_3;\ \beta_1 \dots \beta_6} = -\,\xi^{1;\ \alpha_1 \dots \alpha_3;\ 1\beta_1 \dots \beta_6} . \end{cases}$$

In modo del tutto analogo si ottengono i seguenti gruppi di relazioni lineari:

$$(9.3')\qquad \begin{cases} \eta_0^{0;\ \alpha_1 \dots \alpha_4;\ 1\beta_1 \dots \beta_5} + \eta_2^{0;\ \alpha_1 \dots \alpha_1;\ 2\beta_1 \dots \beta_5} = -\ \xi^{2;\ 2\alpha_1 \dots \alpha_4;\ \beta_1 \dots \beta_5} \\ \eta_1^{0;\ \alpha_1 \dots \alpha_4;\ 1\beta_1 \dots \beta_5} + \eta_3^{0;\ \alpha_1 \dots \alpha_4;\ 2\beta_1 \dots \beta_5} = \quad \xi^{2;\ 1\alpha_1 \dots \alpha_4;\ \beta_1 \dots \beta_5}, \end{cases}$$

$$(9.4)\qquad \begin{cases} \eta_0^{1;\ 1\alpha_1 \dots \alpha_5;\ \beta_1 \dots \beta_4} + \eta_1^{1;\ 2\alpha_1 \dots \alpha_5;\ \beta_1 \dots \beta_4} = \quad \xi^{2;\ \alpha_1 \dots \alpha_5;\ 2\beta_1 \dots \beta_4} \\ \eta_2^{1;\ 1\alpha_1 \dots \alpha_5;\ \beta_1 \dots \beta_4} + \eta_3^{1;\ 2\alpha_1 \dots \alpha_5;\ \beta_1 \dots \beta_4} = -\ \xi^{2;\ \alpha_1 \dots \alpha_5;\ 1\beta_1 \dots \beta_4}, \end{cases}$$

$$(9.4')\qquad \begin{cases} \eta_0^{1;\ \alpha_1 \dots \alpha_6;\ 1\beta_1\beta_2\beta_3} + \eta_2^{1;\ \alpha_1 \dots \alpha_6;\ 2\beta_1\beta_2\beta_3} = -\ \xi^{3;\ 2\alpha_1 \dots \alpha_6;\ \beta_1\beta_2\beta_3} \\ \eta_1^{1;\ \alpha_1 \dots \alpha_6;\ 1\beta_1\beta_2\beta_3} + \eta_3^{1;\ \alpha_1 \dots \alpha_6;\ 2\beta_1\beta_2\beta_3} = \quad \xi^{3;\ 1\alpha_1 \dots \alpha_6;\ \beta_1\beta_2\beta_3}. \end{cases}$$

Sostituendo nelle precedenti relazioni le (9.2), si verifica, viceversa, che esse implicano le (6.11), e per questo, anzi, basta che siano soddisfatte le (9.3) e (9.3′), ovvero (9.4) e (9.4′).

Le precedenti relazioni lineari *non* sono però tutte indipendenti. Si verifica infatti facilmente che gli spazi determinati rispettivamente dalle relazioni (9.3) e (9.3′) s'intersecano nello spazio determinato dalle relazioni

$$(9.5)\qquad \eta_0^{0;\ 1\alpha_1\alpha_2\alpha_3;\ 1\beta_1 \dots \beta_5} + \eta_1^{0;\ 2\alpha_1\alpha_2\alpha_3;\ 1\beta_1 \dots \beta_5} + \eta_2^{0;\ 1\alpha_1 \dots \alpha_3;\ 2\beta_1 \dots \beta_5} + \eta_3^{0;\ 2\alpha_1\alpha_2\alpha_3;\ 2\beta_1 \dots \beta_5} = 0.$$

Ed analogamente gli spazi determinati dalla relazione (9.4) o (9.4′) s'intersecano nello spazio determinato dalle relazioni

$$(9.6)\qquad \eta_0^{1;\ 1\alpha_1 \dots \alpha_5;\ 1\beta_1\beta_2\beta_3} + \eta_1^{1;\ 2\alpha_1 \dots \alpha_5;\ 1\beta_1 \dots \beta_5} + \\ + \eta_2^{1;\ 1\alpha_1 \dots \alpha_5;\ 2\beta_1\beta_2\beta_3} + \eta_3^{1;\ 2\alpha_1\alpha_2\alpha_3;\ 2\beta_1 \dots \beta_5} = 0.$$

È subito visto, infine, che le relazioni (9.5) e (9.6) sono indipendenti e che all'infuori di esse non si hanno altre relazioni comuni a due qualsiasi dei gruppi (9.3), (9.3′), (9.4), (9.4′).

Siamo ora in grado di determinare la dimensione δ dello spazio di appartenenza della varietà (9.2).

Per questo si osservi che: 1) il numero delle coordinate ξ è dato da $2\cdot(2\cdot 10 + 4\cdot 8) + 6\cdot 6 = 140$; 2) quello delle η è dato da $2\cdot 4\cdot 5\cdot 7 = 280$; 3) il numero delle relazioni (9.3) o (9.4′) è dato da $2\cdot 4\cdot 7 = 56$; 4) quello delle relazioni (9.3′) o (9.4) è dato da $2\cdot 5\cdot 6 = 60$; 5) quello delle relazioni (9.5) o (9.6) è dato da $4.6 = 24$. Ne segue:

$$\delta = 140 + 280 - 2\cdot(56 + 60 - 24) - 1 = 235.$$

Determiniamo ora l'ordine del modello minimo (9.2). Per questo cominciamo con il determinare i caratteri proiettivi di alcune varietà subordinate.

1) Varietà V_2 degli E_2 cuspidali con centro su una data generatrice. Posto, per esempio, $\mu^2 = X = 0$ $(U = 1)$, si ha una V_2 le cui equazioni parametriche sono date da:

$$\eta_1 = \Lambda\,(\lambda)^5, \qquad \eta_2 = M\,(\lambda)^7$$

e si ha perciò una rigata $V_2^{12} \subset S_{13}$.

2) Varietà V_2 degli E_2 con centro su una generatrice g e tangente le generatrici dell'altra schiera.

Posto, per esempio, $\mu^2 = \Lambda = 0$ $(M = 1)$, si ha una V_2 di equazioni parametriche

$$\xi = X\,(\lambda)^9, \qquad \eta = U\,(\lambda)^7$$

e perciò una rigata $V_2^{16} \subset S_{17}$.

3) Varietà V_3 degli E_2 con centro su una generatrice. Posto, per esempio, $\mu^2 = 0$ $(\mu^1 = 1)$ la V_3 ha le equazioni parametriche

$$\xi = X\Lambda^{4-l}\,M^l\,(\lambda)^{1+2l}, \qquad \eta = (U_i)\,\Lambda^{1-l_1}\,M^{l_1}\,(\lambda)^{4+2l_1}.$$

Intersecando con l'iperpiano $\xi^{0;\,2} = X\Lambda^4(\lambda^2) = 0$, e tenuto conto delle varietà precedentemente determinate, segue che si ha una $V_3^{81} \subset S_{43}$.

4) Varietà V_3 degli E_2 cuspidali $X = 0$ $(U = 1)$.

Si ha il modello degli $E_1 \subset Q$ rappresentato da

$$\eta_1 = \Lambda\,(\lambda)^5\,(\mu)^7, \qquad \eta_2 = M\,(\lambda)^7\,(\mu)^5$$

e perciò (n. 4) una $V_3^{214} \subset S_{95}$.

5) Varietà V_3 degli E_2 asintotici di una schiera. Posto $\Lambda = 0$ $(M = 1)$, si ha una V_3 di equazioni parametriche

$$\xi = X\,(\lambda)^9\,(\mu), \qquad \eta = U\,(\lambda)^7\,(\mu)^5$$

e perciò una $V_3^{140} \subset S_{69}$.

S'intersechi ora la $V_4^{(E_2 \subset Q)}$ con l'iperpiano $\xi^{0;\,2;\,2\,\dots\,2} = 0$. Ne segue che per l'ordine d della V_4 si ha:

$$d = 214 + 4 \cdot 140 + 10 \cdot 81 = 1584\,.$$

Quindi: *Il modello minimo della varietà degli* $E_2 \subset Q$ *è una varietà* $V_4^{1584} \subset \subset S_{235}$.

Bibliografia.

1. E. Bompiani, *Determinazioni proiettivo-differenziali relative ad una superficie dello spazio ordinario*, Atti Accad. Torino (1924).

2. E. Bompiani, *Geometria degli elementi differenziali*, Ist. Mat. Univ. Roma, Roma 1955 (ed. policopiata).

3. E. Bompiani, *Rappresentazione di elementi differenziali del piano proiettivo*, Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino **16** (1956-57), 55-82.

4. G. Gherardelli, *Sul modello minimo della varietà degli elementi differenziali del 2° ordine del piano proiettivo*, Rend. Accad. Italia (6) **10** (1941), 821-828.

5. C. Longo, *Gli elementi differenziali del 2° ordine di* S_r, Rend. Mat. Appl. Roma (5) **13** (1955), 335-372.

6. E. Martinelli, *Sulla varietà delle faccette p-dimensionali di* S_r, Mem. Acc. Italia **12** (1941), 917-945.

7. J. G. Semple, *Some investigations in the geometry of curve and surface elements*, Proc. London Math. Soc. (3) **4** (1954), 24-49.

8. F. Severi, *I fondamenti della geometria numerativa*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) **29** (1940), 154-242.

9. F. Severi, **Serie, sistemi di equivalenza e corrispondenze algebriche sulle varietà algebriche.** Vol. I, Cremonese, Roma 1942.