Riv. Mat. Univ. Parma 9 (1958), 95-112

LETTERIO TOSCANO (*)

Polinomi associati alle funzioni del cilindro parabolico. (**)

Introduzione.

In precedenti lavori (¹) mi sono occupato dei polinomi

$$G_0(x) = 1, \qquad G_1(x) = x, \qquad G_n(x) - x\, G_{n-1}(x) + n\, G_{n-2}(x) = 0$$

e dei più generali

$$G_{0,\nu}(x) = 1, \qquad G_{1,\nu}(x) = x, \qquad G_{n,\nu}(x) - x\, G_{n-1,\nu}(x) + (n + \nu)\, G_{n-2,\nu}(x) = 0.$$

I primi furono introdotti da N. NIELSEN con la relazione

$$h_0(x)\, H_n(x) - H_0(x)\, h_n(x) = e^{x^2/2}\, G_{n-1}(x), \tag{1}$$

che li lega ai polinomi e alle funzioni di HERMITE:

$$H_{2n}(x) = (-1)^n \frac{(2n)!}{n!\, 2^n}\, {}_1F_1(-n;\ 1/2;\ x^2/2),$$

$$H_{2n+1}(x) = (-1)^n \frac{(2n+1)!}{n!\, 2^n}\, x\, {}_1F_1(-n;\ 3/2;\ x^2/2),$$

$$h_{2n}(x) = (-1)^n\, n!\, 2^n\, x\, {}_1F_1(-n + 1/2;\ 3/2;\ x^2/2),$$

$$h_{2n+1}(x) = (-1)^{n+1}\, n!\, 2^n\, {}_1F_1(-n - 1/2;\ 1/2;\ x^2/2)\ .$$

(*) Indirizzo: Via Placida 85, Messina, Italia.
(**) Ricevuto il 24-III-1958.
(¹) L. TOSCANO: *Polinomi associati a polinomi classici*, Riv. Mat. Univ. Parma **4** (1953), 387-402; *Formule di riduzione tra funzioni e polinomi classici*, Riv. Mat. Univ. Parma **6** (1955), 117-140.

I secondi polinomi sono stati da me studiati per ν intero positivo con la relazione

$$h_\nu(x)\, H_{n+\nu}(x) - H_\nu(x)\, h_{n+\nu}(x) = \nu\,!\, e^{x^2/2}\, G_{n-1,\nu}(x)\,. \tag{2}$$

E, stabilite varie proprietà e la loro espressione con i polinomi di HERMITE, sono pervenuto alle formule di riduzione

$$\left\{\begin{aligned} &H_\nu(x)\, h_{n+\nu}(x) = h_\nu(x)\, H_{n+\nu}(x) - \\ &\qquad - e^{x^2/2} \sum_0^{\leq (n-1)/2} {}_r\, (-1)^r \binom{n-r-1}{r} (\nu+r)\,!\, H_{n-2r-1}(x), \end{aligned}\right. \tag{3}$$

$$\left\{\begin{aligned} &H_\nu(x)\, h_{n+\nu}(x) = h_\nu(x)\, H_{n+\nu}(x) - \\ &\qquad - (-i)^{n-1}\, \nu\,!\, e^{x^2/2} \sum_0^{\leq (n-1)/2} {}_r \binom{n-r-1}{r} \binom{n+\nu}{r} r\,!\, H_{n-2r-1}(ix), \end{aligned}\right. \tag{4}$$

$$\left\{\begin{aligned} &H_\nu(tx)\, h_{n+\nu}(tx) = h_\nu(tx)\, H_{n+\nu}(tx) - \\ &-\nu\,!\, e^{t^2x^2/2} \sum_0^{\leq (n-1)/2} {}_r\, (-1)^r \binom{n-r-1}{r} r\,!\, t^{n-2r-1} P_r^{(-r+n+\nu,\,-r-\nu-1)}(-t^2)\, H_{n-2r-1}(x), \end{aligned}\right. \tag{5}$$

essendo $i^2 = -1$ e $P_r^{(\alpha,\,\beta)}(x)$ polinomio di JACOBI.

Ho ancora osservato che i $G_{n,\nu}(x)$ si possono considerare pure per ν intero negativo, e si ha:

$$\left\{\begin{aligned} &G_{n,-\varrho}(x) = i^{\varrho-1}\, H_{\varrho-1}(-ix)\, H_{n-\varrho+1}(x) && (1 \leqslant \varrho \leqslant n+1) \\ &G_{n,-n-\sigma-2}(x) = i^n\, G_{n,\sigma}(-ix) && (\sigma \geqslant 0)\,. \end{aligned}\right. \tag{6}$$

Con questo lavoro estendo la ricerca al caso ν reale qualsiasi, che associa i polinomi $G_{n,\nu}(x)$ alle funzioni del cilindro parabolico

$$\begin{aligned} D_\nu(x) = &\left\{ \Gamma(1/2)/\Gamma((1-\nu)/2) \right\} 2^{\nu/2}\, e^{-x^2/4}\, {}_1F_1(-\nu/2;\ 1/2;\ x^2/2) + \\ &+ \left\{ \Gamma(-1/2)/\Gamma(-\nu/2) \right\} 2^{(\nu-1)/2}\, e^{-x^2/4}\, x\, {}_1F_1((1-\nu)/2;\ 3/2;\ x^2/2). \end{aligned}$$

Stabilisco dapprima un gruppo di relazioni che conducono dalle funzioni del cilindro parabolico ai polinomi $G_{n,\nu}(x)$. Delle quali una sola mi risulta conosciuta, incidentalmente notata da HAHN [2] in ricerche sulle equazioni differenziali.

Poi, applicando alcuni risultati su quelle funzioni, pervengo a notevoli sviluppi in serie di polinomi $G_{n,\nu}(x)$ e a nuove relazioni dei polinomi di HERMITE con le funzioni di HERMITE o con i polinomi $G_{n,\nu}(x)$.

La ricerca completa i miei due precedenti lavori citati e porta ancora un contributo allo studio dei polinomi e delle funzioni di HERMITE.

I polinomi $G_{n,\nu}(x)$ e le funzioni del cilindro parabolico.

1. – I polinomi $G_{n,\nu}(x)$ sono di grado n in x. Per $\nu = -1$ si identificano con quelli di HERMITE $H_n(x)$, per $\nu = 0$ con gli associati $G_n(x)$ di NIELSEN, per $\nu = -n-1$ con gli $\mathcal{H}_n(x) = i^n H_n(-ix) = (-i)^n H_n(ix)$.

La loro rappresentazione con un determinante, la relazione di sviluppo di $\Delta_n(x) = G_{n,\nu}^2(x) - G_{n-1,\nu}(x)\,G_{n+1,\nu}(x)$, quella della derivata prima rispetto a x, l'equazione differenziale di 2° ordine cui soddisfano, già stabilite per ν intero positivo, sono chiaramente valide anche per ν reale qualsiasi. Qui riportiamo le relazioni

$$G_{n,\nu}(x) = \sum_{0}^{\leq n/2}{}_r\,(-1)^r \binom{n-r}{r}\binom{\nu+r}{r}\, r!\, H_{n-2r}(x), \tag{7}$$

$$\begin{cases} G_{n,\nu}(x) = (-i)^n \displaystyle\sum_{0}^{\leq n/2}{}_r \binom{n-r}{r}\binom{n+\nu+1}{r}\, r!\, H_{n-2r}(ix) = \\ \qquad = \displaystyle\sum_{0}^{\leq n/2}{}_r\,(-1)^r \binom{n-r}{r}\binom{n+\nu+1}{r}\, r!\, \mathcal{H}_{n-2r}(x). \end{cases} \tag{8}$$

2. – Per ν reale qualsiasi i polinomi $G_{n,\nu}(x)$ si possono associare alle funzioni del cilindro parabolico. Valgono le relazioni:

$$\begin{cases} D_{n+\nu+1}(x)\, D_\nu(-x) + (-1)^n D_{n+\nu+1}(-x)\, D_\nu(x) = \\ \qquad = \left\{ \sqrt{2\pi}/\Gamma(-\nu) \right\} G_{n,\nu}(x) \qquad (\nu \neq 0,\ 1,\ 2, \ldots), \end{cases} \tag{9}$$

---

[2] W. HAHN: *Über Orthogonalpolynome mit drei Parametern*, Deutsche Math. **5** (1940), 273-278; *Über lineare Differentialgleichungen, deren Lösungen einer Rekursionsformel genügen*, Math. Nachr. Berlin **4** (1951), 1-11.

$$(10)\qquad D_{n+\nu+1}(x)\,D_{-\nu-1}(ix) - i^{n+1}\,(\nu+1,\ n+1)\,D_{-n-\nu-2}(ix)\,D_\nu(x) = e^{-(\nu+1)\pi i/2}\,G_{n,\nu}(x),$$

$$(11)\qquad D_{n+\nu+1}(x)\,D_{-\nu-1}(-ix) - (-i)^{n+1}\,(\nu+1,\ n+1)\,D_{-n-\nu-2}(-ix)\,D_\nu(x) = e^{(\nu+1)\pi i/2}\,G_{n,\nu}(x),$$

$$(12)\qquad D_{n+\nu+1}(-x)\,D_{-\nu-1}(ix) - (-i)^{n+1}\,(\nu+1,\ n+1)\,D_{-n-\nu-2}(ix)\,D_\nu(-x) = (-1)^n\,e^{(\nu+1)\pi i/2}\,G_{n,\nu}(x),$$

$$(13)\qquad D_{n+\nu+1}(-x)\,D_{-\nu-1}(-ix) - i^{n+1}(\nu+1,\ n+1)\,D_{-n-\nu-2}(-ix)\,D_\nu(-x) = (-1)^n\,e^{-(\nu+1)\pi i/2}\,G_{n,\nu}(x),$$

$$(14)\qquad D_{-n-\nu-2}(ix)\,D_{-\nu-1}(-ix) + (-1)^n\,D_{-n-\nu-2}(-ix)\,D_{-\nu-1}(ix) = (-i)^n\left\{\sqrt{2\pi}/\Gamma(n+\nu+2)\right\}G_{n,\nu}(x)\quad (\nu \neq -n-2,\ -n-3,\ldots).$$

Esse estendono la (2), che si può riottenere tenendo presente le relazioni

$$D_n(x) = e^{-x^2/4}\,H_n(x),\quad D_{-n-1}(ix) = \left\{(-i)^{n+1}/n!\right\}e^{-x^2/4}\left[h_n(x) + i\sqrt{\pi/2}\,H_n(x)\right].$$

Per la dimostrazione delle (9), (10), (11) occorre provare che i loro primi membri soddisfano la stessa relazione di ricorrenza di $G_{n,\nu}(x)$, per la (14) che soddisfa a quella di $\left\{(-i)^n/\Gamma(n+\nu+2)\right\}G_{n,\nu}(x)$. E inoltre occorre calcolare gli stessi primi membri per $n=0$ e $n=1$, applicando noti risultati sui Wronskiani di due funzioni del cilindro parabolico appartenenti alla stessa equazione differenziale [3]. Le (12) e (13) si ottengono dalle (11) e (10) sostituendo x con $-x$.

---

[3] F. G. Tricomi, **Funzioni ipergeometriche confluenti**, Cremonese, Roma 1954 (cfr. pag. 222).

Sviluppi fondamentali in serie di polinomi $G_{n,\nu}(x)$.

1. – Nella (10) sostituiamo n con $n + r$, notiamo che

$$(\nu + 1,\ n + r + 1) = (-1)^r r!\,(\nu + 1,\ n + 1)\binom{-n-\nu-2}{r},$$

moltiplichiamo per $t^r/r!$ e sommiamo rispetto ad r da 0 a ∞. Si ha

$$D_{-\nu-1}(ix)\sum_0^\infty{}_r\,(t^r/r!)\,D_{n+r+\nu+1}(x) -$$

$$- i^{n+1}(\nu + 1,\ n + 1)\,D_\nu(x)\sum_0^\infty{}_r\binom{-n-\nu-2}{r}(-it)^r D_{-n-r-\nu-2}(ix) =$$

$$= e^{-(\nu+1)\pi i/2}\sum_0^\infty{}_r\,(t^r/r!)\,G_{n+r,\nu}(x)\,.$$

E poichè

$$\sum_0^\infty{}_r\,(t^r/r!)\,D_{n+r+\nu+1}(x) = e^{xt/2-t^2/4}\,D_{n+\nu+1}(x-t),$$

$$\sum_0^\infty{}_r\binom{-n-\nu-2}{r}(-it)^r D_{-n-r-\nu-2}(ix) = e^{xt/2-t^2/4}\,D_{-n-\nu-2}(ix-it),$$

si ottiene lo sviluppo

$$(15)\quad \begin{cases} \displaystyle\sum_0^\infty{}_r\,(t^r/r!)\,G_{n+r,\nu}(x) = e^{(\nu+1)\pi i/2}\,e^{xt/2-t^2/4}\,[D_{-\nu-1}(ix)\,D_{n+\nu+1}(x-t) - \\ \qquad\qquad - i^{n+1}(\nu+1,\ n+1)\,D_\nu(x)\,D_{-n-\nu-2}(ix-it)]\,. \end{cases}$$

Per ν intero positivo segue in particolare

$$(16)\quad \sum_0^\infty{}_r\,(t^r/r!)\,G_{n+r,\nu}(x) = (1/\nu!)\,e^{-(x-t)^2/2}\,[h_\nu(x)\,H_{n+\nu+1}(x-t) - H_\nu(x)\,h_{n+\nu+1}(x-t)]\,,$$

che per i polinomi di NIELSEN ($\nu = 0$) ci dà lo sviluppo

$$(17)\quad \sum_0^\infty{}_r\,(t^r/r!)\,G_{n+r}(x) = e^{-(x-t)^2/2}\,[h_0(x)\,H_{n+1}(x-t) - h_{n+1}(x-t)]\,,$$

analogo al noto

$$\sum_0^\infty {}_r\,(t^r/r\,!)\; H_{n+r}(x) = e^{xt-t^2/2}\, H_n(x-t)\,.$$

Dai due precedenti, con la (1), si può dedurre il corrispondente per la funzione di HERMITE. Infatti

$$\sum_0^\infty {}_r\,(t^r/r\,!)\; h_{n+r}(x) = h_0(x) \sum_0^\infty {}_r\,(t^r/r\,!)\; H_{n+r}(x) - e^{x^2/2} \sum_0^\infty {}_r\,(t^r/r\,!)\; G_{n+r-1}(x),$$

e per i precedenti si conclude lo sviluppo

$$\sum_0^\infty {}_r\,(t^r/r\,!)\; h_{n+r}(x) = e^{xt-t^2/2}\, h_n(x-t)\,. \tag{18}$$

Esso è stato già da me trovato per $n = 0$ con altro procedimento nel primo lavoro citato in [1].

Dalla (15) per ν intero minore di -1 seguono altri sviluppi particolari che lasciamo all'interesse del lettore.

2. – Dalla (9), per $r \geqslant n$, si ha

$$D_{r-n+\nu+1}(x)\, D_\nu(-x) + (-1)^{r-n}\, D_{r-n+\nu+1}(-x)\, D_\nu(x) = [\sqrt{2\pi}/\Gamma(-\nu)]\; G_{r-n,\nu}(x)\,.$$

Mentre per $0 \leqslant r \leqslant n-2$ è

$$D_\nu(-x)\, D_{r-n+\nu+1}(x) + (-1)^{r-n}\, D_\nu(x)\, D_{r-n+\nu+1}(-x) =$$

$$= [\sqrt{2\pi}/\Gamma(n-r-\nu-1)]\; G_{n-r-2,\; r-n+\nu+1}(-x)\,.$$

Allora

$$D_\nu(-x) \sum_0^\infty {}_r\,(t^r/r\,!)\; D_{r-n+\nu+1}(x) + (-1)^n\, D_\nu(x) \sum_0^\infty {}_r\,[(-t)^r/r\,!]\; D_{r-n+\nu+1}(-x) =$$

$$= \sqrt{2\pi} \sum_0^{n-2} {}_r \left\{ t^r/[r\,!\; \Gamma(n-r-\nu-1)] \right\} G_{n-r-2\,,r-n+\nu+1}(-x) +$$

$$+ [\sqrt{2\pi}/\Gamma(-\nu)] \sum_n^\infty {}_r\,(t^r/r\,!)\; G_{r-n,\nu}(x)\,.$$

Sommando le prime due serie note, si ottiene

$$\sqrt{2\pi}\sum_0^{n-2}{}_r \frac{t^r}{r!\,(-\nu,\ n-r-1)} G_{n-r-2,\ r-n+\nu+1}(-x) + \sqrt{2\pi}\sum_n^{\infty}{}_r \frac{t^r}{r!} G_{r-n,\nu}(x) =$$

$$= \Gamma(-\nu)\, e^{xt/2-t^2/4}[D_\nu(-x)\, D_{\nu-n+1}(x-t) + (-1)^n D_\nu(x)\, D_{\nu-n+1}(t-x)].$$

D'altra parte valgono le

$$\Gamma(-\nu)\, D_\nu(-x) = e^{\nu\pi i}\,\Gamma(-\nu)\, D_\nu(x) + \sqrt{2\pi}\, e^{(\nu+1)\pi i/2} D_{-\nu-1}(ix),$$

$$D_{\nu-n+1}(t-x) = e^{(\nu-n+1)\pi i} D_{\nu-n+1}(x-t) +$$

$$+ [\sqrt{2\pi}/\Gamma(n-\nu-1)]\, e^{(\nu-n+2)\pi i/2} D_{n-\nu-2}(ix-it).$$

E sostituendo nella precedente si perviene allo sviluppo

$$(19)\quad \left\{\begin{aligned} &\sum_n^{\infty}{}_r (t^r/r!)\, G_{r-n,\nu}(x) = e^{(\nu+1)\pi i/2}\, e^{xt/2-t^2/4}\,[D_{-\nu-1}(ix)\, D_{\nu-n+1}(x-t) + \\ &\qquad + \{ i^{n+1}/(-\nu,\ n-1)\} D_\nu(x)\, D_{n-\nu-2}(ix-it)] - \\ &\qquad - \sum_0^{n-2}{}_r \frac{t^r}{r!\,(-\nu,\ n-r-1)} G_{n-r-2,\ r-n+\nu+1}(-x). \end{aligned}\right.$$

Per ν intero positivo maggiore o uguale a $n-1$, posto $\nu = n+s-1$ $(s \geqslant 0)$, si ha in particolare

$$(20)\quad \left\{\begin{aligned} &\sum_n^{\infty}{}_r (t^r/r!)\, G_{r-n,\, n+s-1}(x) = \\ &= [1/(n+s-1)!]\, e^{-(x-t)^2/2}\,[h_{n+s-1}(x)\, H_s(x-t) - H_{n+s-1}(x)\, h_s(x-t)] - \\ &\qquad - \sum_0^{n-2}{}_r \frac{t^r}{r!\,(-n-s+1,\ n-r-1)} G_{n-r-2,\ r+s}(-x), \end{aligned}\right.$$

e da questo per $n=1$ segue

$$(21)\quad \sum_1^{\infty}{}_r (t^r/r!)\, G_{r-1,\, s}(x) = (1/s!)\, e^{-(x-t)^2/2}\,[h_s(x)\, H_s(x-t) - H_s(x)\, h_s(x-t)].$$

Sempre dalla (19), per $\nu = -1$, si ha

$$(22)\quad \begin{cases} \sum_{n}^{\infty}{}_r (t^r/r!)\, H_{r-n}(x) = \left\{1/(n-1)!\right\} i^n e^{x^2/2} \left[h_{n-1}(ix - it) - \right. \\ \left. \qquad - h_0(ix)\, H_{n-1}(ix - it)\right] - \sum_{0}^{n-2}{}_r \dfrac{t^r}{r!\,(n-r-1)!}\, G_{n-r-2,\, r-n}(-x), \end{cases}$$

e facendo ancora $n = 1$ si ottiene

$$(23)\qquad \sum_{1}^{\infty}{}_r (t^r/r!)\, H_{r-1}(x) = ie^{x^2/2} \left[h_0(ix - it) - h_0(ix)\right].$$

Questo sviluppo si può ancora scrivere nella forma

$$\sum_{1}^{\infty}{}_r \left\{(-1)^{r-1} t^r/r!\right\} \mathcal{H}_{r-1}(x) = e^{-x^2/2} \left[h_0(x) - h_0(x - t)\right],$$

e dal confronto con (21) per $s = 0$ seguono

$$\sum_{1}^{\infty}{}_r \left\{(-1)^{r-1} t^r/r!\right\} \mathcal{H}_{r-1}(x) = e^{-xt + t^2/2} \sum_{1}^{\infty}{}_r (t^r/r!)\, G_{r-1}(x),$$

$$\sum_{1}^{\infty}{}_r (t^r/r!)\, G_{r-1}(x) = e^{xt - t^2/2} \sum_{1}^{\infty}{}_r \left\{(-1)^{r-1} t^r/r!\right\} \mathcal{H}_{r-1}(x).$$

Intanto

$$e^{-xt + t^2/2} = e^{ix\, it - (it)^2/2} = \sum_{0}^{\infty}{}_r \left\{(it)^r/r!\right\} H_r(ix),$$

$$e^{xt - t^2/2} = \sum_{0}^{\infty}{}_r (t^r/r!)\, H_r(x).$$

Risalendo con sostituzione, prodotto alla CAUCHY e confronto, si deducono le due relazioni

$$(24)\qquad \mathcal{H}_n(x) = \sum_{0}^{n}{}_r (-1)^r \binom{n+1}{r+1} G_r(x)\, \mathcal{H}_{n-r}(x),$$

$$(25)\qquad G_n(x) = \sum_{0}^{n}{}_r (-1)^r \binom{n+1}{r+1} \mathcal{H}_r(x)\, H_{n-r}(x).$$

Questa ultima è stata già da me assegnata per altra via nel primo lavoro citato in [1].

3. – Si consideri lo sviluppo di MEHLER generalizzato [4]

$$\sum_0^\infty{}_r\,(t^r/r!)\,H_r(x)\,D_{r+\nu+1}(y) =$$

$$= (1-t^2)^{-(\nu+2)/2}\,e^{x^2/4-(x-ty)^2/\{4(1-t^2)\}}\,D_{\nu+1}((y-tx)/\sqrt{1-t^2}) \qquad (|t|<1).$$

Da esso seguono

$$\sum_0^\infty{}_r\,(t^r/r!)\,H_r(x)\,D_{r+\nu+1}(y)\,D_\nu(-y) =$$

$$= (1-t^2)^{-(\nu+2)/2}\,e^{x^2/4-(x-ty)^2/\{4(1-t^2)\}}\,D_{\nu+1}((y-tx)/\sqrt{1-t^2})\,D_\nu(-y),$$

$$\sum_0^\infty{}_r\,\{(-t)^r/r!\}\,H_r(x)\,D_{r+\nu+1}(-y)\,D_\nu(y) =$$

$$= (1-t^2)^{-(\nu+2)/2}\,e^{x^2/4-(x-ty)^2/\{4(1-t^2)\}}\,D_{\nu+1}((tx-y)/\sqrt{1-t^2})\,D_\nu(y),$$

e per la (9) si ha

$$\sum_0^\infty{}_r\,(t^r/r!)\,H_r(x)\,G_{r,\nu}(y) =$$

$$=(1/\sqrt{2\pi})\,\Gamma(-\nu)\,(1-t^2)^{-(\nu+2)/2}\,e^{x^2/4-(x-ty)^2/\{4(1-t^2)\}}\,[D_\nu(-y)\,D_{\nu+1}((y-tx)/\sqrt{1-t^2})+$$

$$+\,D_\nu(y)\,D_{\nu+1}((tx-y)/\sqrt{1-t^2})].$$

Da cui, come per la (19), si conclude lo sviluppo

$$(26)\quad \left\{\begin{aligned} &\sum_0^\infty{}_r\,(t^r/r!)\,H_r(x)\,G_{r,\nu}(y) = e^{(\nu+1)\pi i/2}\,(1-t^2)^{-(\nu+2)/2}\,\cdot \\ &\qquad\cdot e^{x^2/4-(x-ty)^2/\{4(1-t^2)\}}\,[D_{-\nu-1}(iy)\,D_{\nu+1}((y-tx)/\sqrt{1-t^2})\,- \\ &\qquad\qquad -(\nu+1)i\,D_\nu(y)\,D_{-\nu-2}(i(y-tx)/\sqrt{1-t^2})] \qquad (|t|<1)\end{aligned}\right.$$

---

[4] E. FELDHEIM, *Alcuni risultati sulle funzioni di Whittaker e del cilindro parabolico*, Atti R. Accad. Sci. Torino **76** (1941), 541-555.

che generalizza quello di MEHLER con la sostituzione del polinomio di HERMITE $H_r(y)$ con l'altro $G_{r,\nu}(y)$.

Per $\nu = 0$ si ha in particolare

$$
(27) \quad \left\{ \begin{aligned} & \sum_0^\infty {}_r\, (t^r/r!)\, H_r(x)\, G_r(y) = \\ & = (1-t^2)^{-1}\, e^{(x^2-y^2)/4 - [(x^2+y^2)(1+t^2) - 4xyt]/\{4(1-t^2)\}} \left[\left\{ (y-tx)/\sqrt{1-t^2} \right\} h_0(y) - \right. \\ & \qquad \left. - h_1((y-tx)/\sqrt{1-t^2}) \right] \qquad (|t|<1)\,. \end{aligned} \right.
$$

E di questo si considerino successivamente i casi $x = 0$, $y = 0$, $y = x$. Nel primo, poichè $H_{2r+1}(0) = 0$, $H_{2r}(0) = (-1)^r (2r)!/(2^r r!)$, si ha

$$
(28) \quad \sum_0^\infty {}_r\, (-t^2/2)^r\, (1/r!)\, G_{2r}(y) =
$$

$$
= (1-t^2)^{-1}\, e^{y^2/\{2(t^2-1)\}} [(y/\sqrt{1-t^2})\, h_0(y) - h_1(y/\sqrt{1-t^2})]\,,
$$

con $|t| < 1$. Nel secondo caso, poichè $G_{2r+1}(0) = 0$, $G_{2r}(0) = (-1)^r 2^r r!$, si ha

$$
(29) \quad \sum_0^\infty {}_r (-2t^2)^r \{ r!/(2r)! \}\, H_{2r}(x) =
$$

$$
= (t^2-1)^{-1}\, e^{x^2t^2/\{2(t^2-1)\}}\, h_1(tx/\sqrt{1-t^2}) \qquad (|t|<1),
$$

che si può pure ricavare da altro che diversamente lo generalizza ([5]). Nel terzo caso si ottiene lo sviluppo

$$
(30) \quad \left\{ \begin{aligned} & \sum_0^\infty {}_r\, (t^r/r!)\, H_r(x)\, G_r(x) = \\ & \qquad = (1-t^2)^{-1}\, e^{x^2(t-1)/\{2(t+1)\}} [x\sqrt{(1-t)/(1+t)}\, h_0(x) - \\ & \qquad\qquad - h_1(x\sqrt{(1-t)/(1+t)})] \qquad (|t|<1). \end{aligned} \right.
$$

([5]) L. TOSCANO, *Sviluppi in serie della funzione ipergeometrica di Kummer*, Atti Accad. Naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (8) **6** (1949), 590-597 .

Nuove relazioni dei polinomi di Hermite con le funzioni di Hermite e con i polinomi $G_{n,\nu}(x)$.

1. – In una Memoria di N. NIELSEN [6] si trovano le seguenti relazioni ($m \leqslant n$):

$$H_m(x)\, H_n(x) = \sum_0^m {}_r \binom{m}{r} \binom{n}{r} r!\, H_{m+n-2r}(x), \tag{31}$$

$$\mathrm{H}_{m+n}(x) = \sum_0^m {}_r (-1)^r \binom{m}{r} \binom{n}{r} r!\, H_{m-r}(x)\, H_{n-r}(x), \tag{32}$$

$$H_m(x)\, h_n(x) = \sum_0^m {}_r \binom{m}{r} \binom{n}{r} r!\, h_{m+n-2r}(x), \tag{33}$$

$$h_{m+n}(x) = \sum_0^m {}_r (-1)^r \binom{m}{r} \binom{n}{r} r!\, H_{m-r}(x)\, h_{n-r}(x), \tag{34}$$

$$H_m(x)\, G_n(x) = \sum_0^m {}_r \binom{m}{r} \binom{n+1}{r} r!\, G_{m+n-2r}(x), \tag{35}$$

$$G_{m+n}(x) = \sum_0^m {}_r (-1)^r \binom{m}{r} \binom{n+1}{r} r!\, H_{m-r}(x)\, G_{n-r}(x), \tag{36}$$

le cui prime due sono state ritrovate da vari autori.

W. A. AL-SALAM, proseguendo le mie ricerche sui polinomi $G_{n,\nu}(x)$ per ν intero positivo, ha aggiunto [7] le seguenti ($m \leqslant n$)

$$H_m(x)\, G_{n,\nu}(x) = \sum_0^m {}_r \binom{m}{r} \binom{n+\nu+1}{r} r!\, G_{m+n-2r,\nu}(x), \tag{37}$$

$$G_{m+n,\nu}(x) = \sum_0^m {}_r (-1)^r \binom{m}{r} \binom{n+\nu+1}{r} r!\, H_{m-r}(x)\, G_{n-r,\nu}(x)\,. \tag{38}$$

---

(6) N. NIELSEN, *Recherches sur les polynomes d'Hermite*, Det. Kgl. Danske Videnskabernes Selskab-Math. - Fys. Meddelelser $\mathbf{1}_6$ (1918).

(7) W. A. AL- SALAM, *On a generalized Hermite polynomial*, Boll. Un. Mat. Ital. (3) **12** (1957), 241-246.

Qui ne saranno aggiunte altre, ricavandole tutte dalle note relazioni sulle funzioni del cilindro parabolico:

$$(\alpha) \qquad e^{x^2/4} D_\mu(x)\, D_\nu(x) = \sum_0^\infty {}_r\, (1/r!)\, (-\mu,\ r)\, (-\nu,\ r)\, D_{\mu+\nu-2r}(x),$$

$$(\beta) \qquad e^{-x^2/4} D_{\mu+\nu}(x) = \sum_0^\infty {}_r\, (-1)^r\, (1/r!)\, (-\mu,\ r)\, (-\nu,\ r)\, D_{\mu-r}(x)\, D_{\nu-r}(x)\,.$$

Ma ad esse si potrebbe pure pervenire operando sugli sviluppi in serie assegnati nel paragrafo precedente.

2. – Per $\mu = m$ e $\nu = n$ interi positivi, dalle (α) e (β) seguono subito le (31) e (32).

3. – Per $\mu = m$ intero positivo e $\nu = -n-1$ intero negativo si ottengono le

$$(-i)^{n+1} H_m(x)\, [h_n(-ix) + i\sqrt{\pi/2}\, H_n(-ix)] =$$
$$= e^{-x^2/4} \sum_0^m {}_r\, (-1)^r \binom{m}{r} (n+r)!\, D_{m-n-2r-1}(x),$$

$$n!\, D_{m-n-1}(ix) = (-i)^{n+1} e^{-x^2/4} \sum_0^m {}_r\, (-i)^r \binom{m}{r} H_{m-r}(ix)\, [h_{n+r}(x) + i\sqrt{\pi/2}\, H_{n+r}(x)].$$

Ed ora occorre distinguere il caso $m \leqslant n$ dall'altro $m > n$.

Nel primo si ha dalle precedenti

$$\mathcal{H}_m(x)\, [h_n(x) + i\sqrt{\pi/2}\, H_n(x)] =$$
$$= \sum_0^m {}_r \binom{m}{r} \{(n+r)!/(n-m+2r)!\} [h_{n-m+2r}(x) + i\sqrt{\pi/2}\, H_{n-m+2r}(x)],$$

$$\{n!/(n-m)!\}\, [h_{n-m}(x) + i\sqrt{\pi/2}\, H_{n-m}(x)] =$$
$$= \sum_0^m {}_r\, (-1)^r \binom{m}{r} \mathcal{H}_{m-r}(x)\, [h_{n+r}(x) + i\sqrt{\pi/2}\, H_{n+r}(x)],$$

dalle quali seguono le relazioni $(m \leqslant n)$

$$(39) \qquad \mathcal{H}_m(x)\ h_n(x) = \sum_0^m {}_r \binom{m}{r} \left\{ (n+r)!/(n-m+2r)! \right\} h_{n-m+2r}(x),$$

$$(40) \qquad \mathcal{H}_m(x)\ H_n(x) = \sum_0^m {}_r \binom{m}{r} \left\{ (n+r)!/(n-m+2r)! \right\} H_{n-m+2r}(x),$$

$$(41) \qquad \left\{ n!/(n-m)! \right\} h_{n-m}(x) = \sum_0^m {}_r (-1)^r \binom{m}{r} \mathcal{H}_{m-r}(x)\ h_{n+r}(x),$$

$$(42) \qquad \left\{ n!/(n-m)! \right\} H_{n-m}(x) = \sum_0^m {}_r (-1)^r \binom{m}{r} \mathcal{H}_{m-r}(x)\ H_{n+r}(x)\ .$$

Nel secondo caso $(m > n)$ si ottengono le

$$\mathcal{H}_m(x)\left[h_n(x) + i\sqrt{\pi/2}\ H_n(x)\right] =$$

$$= e^{x^2/2} \sum_0^{\leq (m-n-1)/2} {}_r \binom{m}{r} (n+r)!\ \mathcal{H}_{m-n-2r-1}(x) +$$

$$+ \sum_{\geq (m-n+1)/2}^m {}_r \binom{m}{r} \left\{ (n+r)!/(2r-m+n)! \right\} \left[h_{2r-m+n}(x) + i\sqrt{\pi/2}\ H_{2r-m+n}(x)\right],$$

$$n!\ \mathcal{H}_{m-n-1}(x) = e^{-x^2/2} \sum_0^m {}_r (-1)^r \binom{m}{r} \mathcal{H}_{m-r}(x) \left[h_{n+r}(x) + i\sqrt{\pi/2}\ H_{n+r}(x)\right],$$

dalle quali seguono le relazioni $(m > n)$

$$(43) \qquad \left\{ \begin{aligned} \mathcal{H}_m(x)\ h_n(x) &= e^{x^2/2} \sum_0^{\leq (m-n-1)/2} {}_r \binom{m}{r} (n+r)!\ \mathcal{H}_{m-n-2r-1}(x) + \\ &\quad + \sum_{\geq (m-n+1)/2}^m {}_r \binom{m}{r} \left\{ (n+r)!/(2r-m+n)! \right\} h_{2r-m+n}(x), \end{aligned} \right.$$

$$(44) \qquad \mathcal{H}_m(x)\ H_n(x) = \sum_{\geq (m-n+1)/2}^m {}_r \binom{m}{r} \left\{ (n+r)!/(2r-m+n)! \right\} H_{2r-m+n}(x),$$

$$(45) \qquad n!\ \mathcal{H}_{m-n-1}(x) = e^{-x^2/2} \sum_0^m {}_r (-1)^r \binom{m}{r} \mathcal{H}_{m-r}(x)\ \ h_{n+r}(x),$$

$$(46) \qquad \sum_0^m {}_r (-1)^r \binom{m}{r} \mathcal{H}_{m-r}(x)\ H_{n+r}(x) = 0\ .$$

3. – Per $\mu = -m-1$ e $\nu = -n-1$ interi negativi, dalle (α) e (β) si deducono le

$$[h_m(x) + i\sqrt{\pi/2}\, H_m(x)]\,[h_n(x) + i\sqrt{\pi/2}\, H_n(x)] =$$

$$= e^{x^2/2} \sum_0^\infty {}_r (-1)^r \left[(m+r)!\,(n+r)!/\{r!\,(m+n+2r+1)!\}\right] [h_{m+n+2r+1}(x) +$$

$$+ i\sqrt{\pi/2}\, H_{m+n+2r+1}(x)],$$

$$\{m!\,n!/(m+n+1)!\}\,[h_{m+n+1}(x) + i\sqrt{\pi/2}\, H_{m+n+1}(x)] =$$

$$= e^{-x^2/2} \sum_0^\infty {}_r (1/r!)[h_{m+r}(x) + i\sqrt{\pi/2}\, H_{m+r}(x)]\,[h_{n+r}(x) + i\sqrt{\pi/2}\, H_{n+r}(x)],$$

da cui seguono gli sviluppi in serie:

$$(47)\quad \begin{cases} h_m(x)\,h_n(x) - (\pi/2)\,H_m(x)\,H_n(x) = \\ = e^{x^2/2} \sum_0^\infty {}_r (-1)^r \left[(m+r)!\,(n+r)!/\{r!\,(m+n+2r+1)!\}\right] h_{m+n+2r+1}(x), \end{cases}$$

$$(48)\quad \begin{cases} H_m(x)\,h_n(x) + h_m(x)\,H_n(x) = \\ = e^{x^2/2} \sum_0^\infty {}_r (-1)^r \left[(m+r)!\,(n+r)!/\{r!(m+n+2r+1)!\}\right] H_{m+n+2r+1}(x), \end{cases}$$

$$(49)\quad \begin{cases} \{m!\,n!/(m+n+1)!\}\,h_{m+n+1}(x) = \\ = e^{-x^2/2} \sum_0^\infty {}_r (1/r!)\,[h_{m+r}(x)\,h_{n+r}(x) - (\pi/2)\,H_{m+r}(x)\,H_{n+r}(x)], \end{cases}$$

$$(50)\quad \begin{cases} \{m!\,n!/(m+n+1)!\}\,H_{m+n+1}(x) = \\ = e^{-x^2/2} \sum_0^\infty {}_r (1/r!)\,[H_{m+r}(x)\,h_{n+r}(x) + h_{m+r}(x)\,H_{n+r}(x)]. \end{cases}$$

4. - Dalle (31) e (33), tenendo conto della (2), si ricava la (37); dalle (32) e (34) la (38); dalle (39) e (40), (41) e (42), si ricavano le ($m \leqslant n$, ν intero positivo)

$$(51)\quad \mathcal{H}_m(x)\, G_{n,\nu}(x) = \sum_0^m{}_r \binom{m}{r} \{ (n+\nu+r+1)!/(n-m+\nu+2r+1)! \}\, G_{n-m+2r,\nu}(x),$$

$$(52)\quad G_{n-m,\nu}(x) = \{ (n-m+\nu+1)!/(n+\nu+1)! \} \sum_0^m{}_r (-1)^r \binom{m}{r} \mathcal{H}_{m-r}(x)\, G_{n+r,\nu}(x);$$

dalle (43) e (44), (45) e (46), seguono le ($m \geqslant n+\nu+2$, ν intero positivo)

$$(53)\quad \left\{ \begin{aligned} &\mathcal{H}_m(x)\, G_{n,\nu}(x) = \\ &= \sum_{\geq (m-n-\nu)/2}^{m}{}_r \binom{m}{r} \{ (n+\nu+r+1)!/(2r-m+n+\nu+1)! \}\, G_{2r-m+n,\nu}(x) - \\ &- (1/\nu!)\, H_\nu(x) \sum_0^{\leq (m-n-\nu-2)/2}{}_r \binom{m}{r} (n+\nu+r+1)!\, \mathcal{H}_{m-n-\nu-2r-2}(x), \end{aligned} \right.$$

$$(54)\quad \sum_0^m{}_r (-1)^r \binom{m}{r} \mathcal{H}_{m-r}(x)\, G_{n+r,\nu}(x) = -\{ (n+\nu+1)!/\nu! \}\, H_\nu(x)\, \mathcal{H}_{m-n-\nu-2}(x).$$

E ancora dalle (43) e (44) si deduce la relazione

$$(55)\quad \sum_0^{\leq (m-1)/2}{}_r \{ 1/(m-r)! \}\, \mathcal{H}_{m-2r-1}(x) = \sum_{\geq (m+1)/2}^{m}{}_r [1/\{ (m-r)!\,(2r-m)! \}]\, G_{2r-m-1}(x).$$

5. - Dalla (α), con particolare riguardo ai polinomi $G_{n,\nu}(x)$ di parametro ν qualsiasi, si può ricavare la relazione generale

$$(56)\quad \left\{ \begin{aligned} &e^{x^2/4}[D_\mu(x)\, D_{n+\nu+1}(x)\, D_{\mu+\nu}(-x) + (-1)^n D_\mu(-x)\, D_{n+\nu+1}(-x)\, D_{\mu+\nu}(x)] = \\ &= \{ \sqrt{2\pi}/\Gamma(-\mu-\nu) \} \sum_0^{\leq n/2}{}_r (1/r!)\, (-\mu, r)\, (-n-\nu-1, r)\, G_{n-2r,\mu+\nu}(x) + \\ &+ \sqrt{2\pi} \sum_{\geq (n+2)/2}^{\infty}{}_r (1/r!) \{ (-\mu, r)\, (-n-\nu-1, r)/\Gamma(-\mu-\nu-n+ \\ &\qquad + 2r-1) \}\, G_{2r-n-2,\mu+\nu+n-2r+1}(-x). \end{aligned} \right.$$

Da essa per $\mu = m \leqslant n/2$ intero positivo, sostituendo ν con $\nu - m$ e facendo $n = m + l$ ($l \geqslant m$) si riottiene la (37).

Se $n/2 < m \leqslant n$, sostituendo ν con $\nu - m$ e facendo $n = m + l$, si ottiene la relazione $(m > l)$

$$(57)\quad \left\{\begin{aligned} H_m(x)\, G_{l,\nu}(x) = & \sum_0^{\leq (m+l)/2} {}_r \binom{m}{r}\binom{l+\nu+1}{r} r!\, G_{m+l-2r,\nu}(x) + \\ & + \sum_{\geq (m+l+2)/2}^{m} {}_r \binom{m}{r}\binom{l+\nu+1}{r} \Big\{ r!/(-\nu,\ 2r-m- \\ & -l-1)\Big\} G_{2r-m-l-2,\ m+l+\nu-2r+1}(-x)\,. \end{aligned}\right.$$

Se infine $m > n$, sostituendo ν con $\nu - n - 1$ e facendo $n = m - \sigma - 2$, si ottiene la relazione $(m > \sigma)$

$$(58)\quad \left\{\begin{aligned} & H_m(x)\, G_{\sigma,\nu}(-x) = \\ & = (-1)^{\sigma+1}(\nu+1,\ \sigma+1) \sum_0^{\leq (m-\sigma-2)/2} {}_r \binom{m}{r}\binom{\nu}{r} r!\, G_{m-\sigma-2r-2,\ \sigma+\nu+1}(x) + \\ & + \Gamma(-\nu) \sum_{\geq (m-\sigma)/2}^{m} {}_r \binom{m}{r}\binom{\nu}{r} \Big\{ r!/\Gamma(-\nu-m+2r)\Big\} G_{2r-m+\sigma,\ m+\nu-2r}(-x)\,. \end{aligned}\right.$$

6. – Dalla (β), come al paragrafo precedente, si ricava la relazione generale

$$(59)\quad \left\{\begin{aligned} & G_{n,\mu+\nu}(x) = \Big\{\Gamma(-\mu-\nu)/\sqrt{2\pi}\Big\} e^{x^2/4} \sum_0^{\infty} {}_r (-1)^r (1/r!)\,(-\mu,\ r)\,(-\nu-n-1, r)\cdot \\ & \cdot\big[D_{n-r+\nu+1}(x)\, D_{\mu-r}(x)\, D_{\mu+\nu}(-x) + (-1)^n D_{n-r+\nu+1}(-x)\, D_{\mu-r}(-x)\, D_{\mu+\nu}(x)\big]. \end{aligned}\right.$$

Da essa per $\mu = m \leqslant n/2$ intero positivo, sostituendo ν con $\nu - m$ e facendo $n = m + l$, si riottiene la (38).

Se $n/2 < m \leqslant n$, sostituendo ν con $\nu - m$ e facendo $n = m + l$, si ottiene $(m > l)$

$$(60)\quad \left\{\begin{aligned} G_{m+l,\nu}(x) = & \sum_0^{l} {}_r (-1)^r \binom{m}{r}\binom{l+\nu+1}{r} r!\, H_{m-r}(x)\, G_{l-r,\nu}(x) + \\ & + \sum_{l+2}^{m} {}_r (-1)^r \binom{m}{r}\binom{l+\nu+1}{r} \Big\{ r!/(-\nu,\ r-l-1)\Big\} G_{r-l-2,\ l+\nu-r+1}(-x)\,. \end{aligned}\right.$$

Se infine $m > n$, sostituendo ν con $\nu - m$, si ottiene la relazione

$$(61) \quad G_{n,\nu}(x) = \sum_{0}^{m}{}_r \, (-1)^r \binom{m}{r} \binom{n-m+\nu+1}{r} \{ r!/(-\nu,\ r+m-n-1) \} \cdot$$

$$\cdot H_{m-r}(x)\, G_{r+m-n-2,\, n-m+\nu-r+1}(-x) \,.$$

Nota.

Dei polinomi $G_{n,\nu}(x)$, associati a quelli di HERMITE, si è anche occupato G. PALAMÀ. E nel suo ultimo lavoro « *Su alcuni polinomi che generalizzano quelli di Laguerre e su altri che generalizzano quelli di Hermite ed i loro associati*, Riv. Mat. Univ. Parma **7** (1956), 293-309 » il lettore potrà trovare la sua bibliografia completa. Ma prima che a PALAMÀ ed a me i $G_{n,\nu}(x)$ si sono presentati a W. HAHN, come risulta dal presente mio lavoro. E di più W. HAHN cita gli altri due lavori (che non ho potuto consultare): S. C. MITRA, *On the properties of a certain polynomial analogues to Lommel's polynomial*. Indian Phys.-Math. J. **3** (1932), 9-13; R. S. VARMA, *On a certain polynomial analogues to Lommel's polynomial*, J. Indian Math. Soc. (2) **1** (1934), 115-118.

Del resto i $G_{n,\nu}(x)$ sono una spontanea estensione dei polinomi di HERMITE e di NIELSEN, e non è difficile che alla attuale bibliografia si trovi da aggiungere altri studi anteriori.

Per un chiaro confronto delle ricerche di PALAMÀ con le mie è bene notare che nel mio piano di sviluppo le relazioni (ν intero positivo)

$$G_{0,\nu}(x) = 1, \qquad G_{1,\nu}(x) = x, \qquad G_{n,\nu}(x) - x\, G_{n-1,\nu}(x) + (n+\nu)\, G_{n-2,\nu}(x) = 0,$$

$$h_\nu(x)\, H_{n+\nu}(x) - H_\nu(x)\, h_{n+\nu}(x) = \nu!\, e^{x^2/2}\, G_{n-1,\nu}(x)$$

costituiscono un punto di partenza.

E i polinomi associati li denoto con $G_{n,\nu}(x)$ per seguire la notazione $G_n(x)$ di quelli di NIELSEN, introdotta dallo stesso e riportata da P. APPELL e J. KAMPÉ DE FÉRIET (oltre che da altri) nel noto trattato « **Fonctions hypergéometriques et hypersfériques - Polynomes d'Hermite**. Gauthier-Villars, Paris 1926 » da cui prendo le mosse.

Per ν intero negativo valgono le relazioni

$$G_{n,-\varrho}(x) = i^{\varrho-1} H_{\varrho-1}(-ix)\, H_{n-\varrho+1}(x) \qquad (1 \leqslant \varrho \leqslant n+1),$$

$$G_{n,-n-\sigma-2}(x) = i^n\, G_{n,\sigma}(-ix) \qquad (\sigma \geqslant 0),$$

la cui prima è stata assegnata da PALAMÀ e che può subito ottenersi rappresentando il polinomio associato con un determinante (cfr. mio secondo lavoro già richiamato). Nel suo ultimo lavoro sopracitato il PALAMÀ fa utili confronti tra nostri risultati e, fra l'altro, ne generalizza qualcuno mio.

Anche i risultati del presente mio lavoro, in cui i polinomi $G_{n,\nu}(x)$ per ν reale qualsiasi vengono associati alle funzioni del cilindro parabolico, offrono buon argomento per ulteriori ricerche: o per altri sviluppi sullo stesso gruppo di funzioni o per generalizzazioni.

* * *