Riv. Mat. Univ. Parma 9 (1958), 149-152

LUIGI TANZI CATTABIANCHI (*)

Una estensione alla pluriderivazione dei teoremi di Rolle, del valor medio, di Cauchy. (**)

1. – Il presente lavoro fa seguito ad una mia precedente Nota [1], alla quale rimando per alcune considerazioni preliminari. Qui indico una estensione, al caso della pluriderivazione [2], dei classici teoremi di ROLLE, del valore medio e di CAUCHY sulle derivate.

Per ragioni di brevità e per una maggiore visione geometrica, tali teoremi vengono enunciati e dimostrati nel caso della biderivazione, ma essi si trasportano al caso generale della pluriderivazione.

Considerato il biderivatore

$$\mathfrak{D} \equiv X(x,\ y)\frac{\partial}{\partial x} + Y(x,\ y)\frac{\partial}{\partial y}, \tag{1}$$

le dette estensioni sono le seguenti.

Teorema di ROLLE per la biderivazione. *Dato un biderivatore* $\mathfrak{D}$ [vedasi (1)] *regolare* [3] *in un campo chiuso* R *(ad interno non vuoto) del piano* $(x,\ y)$ *e data una funzione* $f(x,\ y)$ *reale ed univoca in* R, *se* $f(x,\ y)$ *è continua in* R, *differenziabile nell'interno di* R *e se assume valori eguali in due punti*

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università, Parma, Italia.

(**) Ricevuto il 23-II-1958.

[1] L. TANZI CATTABIANCHI, *Su le costanti pluriderivazionali e su le variabili pluriderivazionali indipendenti*, Riv. Mat. Univ. Parma **8** (1957), 215-221.

[2] Sulla pluriderivazione vedasi: A. MAMBRIANI, *La pluriderivazione e una classificazione delle equazioni differenziali*, Riv. Mat. Univ. Parma **6** (1955), 321-348.

[3] Cfr. loc. cit. in [1], p. 216.

$P_1 \equiv (x_1, y_1)$, $P_2 \equiv (x_2, y_2)$ di una stessa linea Γ caratteristica di $\mathfrak{D}$ (4), *allora nell'interno dell'arco $\widehat{P_1P_2}$ di Γ esiste sempre almeno un punto (ξ, η) nel quale è*

$$[\mathfrak{D}f(x, y)]_{(\xi, \eta)} = 0 .$$

Teorema del valor medio per la biderivazione. *Dato in un campo chiuso R (ad interno non vuoto) un biderivatore regolare $\mathfrak{D}$* [vedasi (1)] *e data una funzione $f(x, y)$ reale ed univoca in R, se $f(x, y)$ è continua in R e differenziabile nell'interno di R, allora nell'interno di ogni arco di estremi $P_1 \equiv (x_1, y_1)$ e $P_2 \equiv (x_2, y_2)$ di una linea caratteristica di $\mathfrak{D}$ esiste sempre almeno un punto (ξ, η) per il quale è*

$$\frac{f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1)}{(x_2, y_2)_{\mathfrak{D}} - (x_1, y_1)_{\mathfrak{D}}} = [\mathfrak{D}f(x, y)]_{(\xi, \eta)},$$

dove $(x, y)_{\mathfrak{D}}$ è una qualsiasi variabile $\mathfrak{D}$-biderivazionale indipendente (5) .

Teorema di Cauchy per la biderivazione. *Dato in un campo chiuso R (ad interno non vuoto) un biderivatore regolare $\mathfrak{D}$* [vedasi (1)] *e date due funzioni $f(x, y)$ e $\varphi(x, y)$ reali ed univoche in R, se tali funzioni sono continue in R e differenziabili nell'interno di R e se, essendo $P_1 \equiv (x_1, y_1)$ e $P_2 \equiv (x_2, y_2)$ due punti di una stessa linea Γ caratteristica di $\mathfrak{D}$, risulta $\varphi(x_1, y_1) \neq \varphi(x_2, y_2)$, allora nell'interno dell'arco $\widehat{P_1P_2}$ di Γ esiste sempre almeno un punto (ξ, η) per il quale risulta o*

$$[\mathfrak{D}(fx, y)]_{(\xi, \eta)} = [\mathfrak{D}\varphi(x, y)]_{(\xi, \eta)} = 0, \tag{2}$$

oppure

$$\frac{f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1)}{\varphi(x_2, y_2) - \varphi(x_1, y_1)} = \left[\frac{\mathfrak{D}f(x, y)}{\mathfrak{D}\varphi(x, y)}\right]_{(\xi, \eta)}. \tag{3}$$

2. – Dimostrazioni.

a) Provo dapprima il teorema di Cauchy per la biderivazione.

L'arco $\widehat{P_1P_2}$ di Γ abbia la rappresentazione analitica seguente

$$y = \gamma(x, \bar{c}), \qquad x_1 \leqslant x \leqslant x_2,$$

dove $\bar{c}$ è una determinata costante. Considero la funzione composta

$$F(x) = \{f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1)\}\varphi(x, \gamma(x, \bar{c})) - f(x, \gamma(x, \bar{c}))\{\varphi(x_2, y_2) - \varphi(x_1, y_1)\},$$

(4) Cfr. loc cit. in (1), p. 217.

(5) Cfr. loc. cit. in (1), p. 216 e pp. 218-221.

che, per le ipotesi fatte su $f(x, y)$ e $\varphi(x, y)$, è continua in tutto l'intervallo (x_1, x_2), derivabile nell'interno di tale intervallo, con derivata data da

$$F'(x) = \{ f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1) \} \{ \varphi_1'(x, \gamma(x, \bar{c})) + \gamma_x'(x, \bar{c})\, \varphi_2'(x, \gamma(x, \bar{c})) \} -$$

$$- \{ f_1'(x, \gamma(x, \bar{c})) + \gamma_x'(x, \bar{c})\, f_2'(x, \gamma(x, \bar{c})) \} \{ \varphi(x_2, y_2) - \varphi(x_1, y_1) \};$$

inoltre è $F(x_1) = F(x_2)$. Pertanto, in virtù del teorema di ROLLE sulla derivazione, esisterà nell'interno dell'intervallo (x_1, x_2) almeno un valore ξ tale che $F'(\xi) = 0$. Poichè Γ è una linea caratteristica di $\mathfrak{D}$, si ha (6)

$$\gamma_x'(\xi, \bar{c}) = Y(\xi, \eta)/X(\xi, \eta),$$

avendo posto $\gamma(\xi, \bar{c}) = \eta$. Risulta quindi

$$F'(\xi) = \{ f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1) \} \{ \varphi_1'(\xi, \eta) + [Y(\xi, \eta)/X(\xi, \eta)]\, \varphi_2'(\xi, \eta) \} -$$

$$- \{ f_1'(\xi, \eta) + [Y(\xi, \eta)/X(\xi, \eta)]\, f_2'(\xi, \eta) \} \{ \varphi(x_2, y_2) - \varphi(x_1, y_1) \} = 0,$$

da cui, moltiplicando per $X(\xi, \eta)$,

$$(4) \qquad \{ f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1) \} [\mathfrak{D}\varphi(x, y)]_{(\xi, \eta)} -$$

$$- \{ \varphi(x_2, y_2) - \varphi(x_1, y_1) \} [\mathfrak{D}f(x, y)]_{(\xi, \eta)} = 0 .$$

Se è $[\mathfrak{D}\varphi(x, y)]_{(\xi, \eta)} = 0$, da (4) e dall'ipoteti $\varphi(x_1, y_1) \neq \varphi(x_2, y_2)$ segue che è pure $[\mathfrak{D}f(x, y)]_{(\xi, \eta)} = 0$ e la (2) è provata; se è invece $[\mathfrak{D}\varphi(x, y)]_{(\xi, \eta)} \neq 0$, da (4) discende (3).

b) La dimostrazione del teorema del valor medio per la biderivazione segue da a) nel caso in cui la funzione $\varphi(x, y)$ si identifichi con $(x, y)_{\mathcal{D}}$, ossia con una qualsiasi variabile $\mathfrak{D}$-biderivazionale indipendente (7). In questo caso è da notare che l'ipotesi di differenziabilità per $(x, y)_{\mathcal{D}}$ non è strettamente richiesta in quanto esiste $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x, \gamma(x, \bar{c}))_{\mathcal{D}}$ (continua e mai nulla su Γ), data (8) da $1/X(x, \gamma(x, \bar{c}))$.

---

(6) Cfr. loc. cit. in (1), pp. 216-217.
(7) Cfr. annotazione (5).
(8) Cfr. loc. cit. in (1), n. **4.3**, a), p. 219.

c) La dimostrazione del teorema di ROLLE per la biderivazione consegue immediatamente dal teorema del valor medio per la biderivazione, nel caso in cui sia $f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2)$.

3. – Osserviamo poi che, come applicazione del teorema di CAUCHY per la biderivazione, si possono ottenere le estensioni dei noti teoremi di DE L'HOSPITAL sulle derivate.