Riv. Mat. Univ. Parma 10 (1959), 19-33

T. MANACORDA (*)

Sulla propagazione di onde ordinarie di discontinuità nella Elasticità di secondo grado per solidi incomprimibili. (**)

1. – Introduzione.

In ogni teoria che riguardi le trasformazioni finite di un solido elastico, necessariamente ci si imbatte nel fondamentale ed arduo problema della assegnazione della forma del potenziale elastico W_τ.

Poichè l'esperienza può fornire solo scarsi contributi per il superamento di questa grave difficoltà, si presenta la necessità di ricorrere a qualche ipotesi di carattere indiretto, salvo poi a controllare che la forma del potenziale così ottenuta soddisfi a quelle prime e fondamentali proprietà che gli restano imposte dal suo significato fisico.

In tale ordine di idee, già da diversi anni A. SIGNORINI ha introdotto (1) per i solidi comprimibili una forma del potenziale corrispondente alla cosiddetta Elasticità di secondo grado, e che, contrariamente a quanto accade per altri tipi proposti di potenziale (2), pienamente soddisfa a tutte le proprietà cui poco sopra ho accennato.

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università, Parma, Italia.

(**) Ricevuto il 5-IX-1959.

(1) A. SIGNORINI, *Trasformazioni termoelastiche finite*, Mem. II, Ann. Mat. Pura Appl. (4) **30** (1947), 1-72. Cfr. anche dello stesso Autore: *Deformazioni elastiche finite: Elasticità di 2° grado*, Atti 2° Congresso Un. Mat. Ital., pp. 56-71, Roma 1940; *Recenti progressi della teoria delle trasformazioni termoelastiche finite*, Atti Convegno Mat. Roma 1942.

(2) Per una esposizione critica dei vari potenziali proposti cfr.: C. TRUESDELL, *The mechanical foundations of Elasticity and Fluid dynamics*, J. Rat. Mech. Anal. **1** (1952), 125-300 (Ch. IV, C).

Per quanto riguarda i solidi incomprimibili, si stabilisce una Elasticità di secondo grado quando si cerchi un potenziale W_τ per il quale le differenze tra le caratteristiche principali di tensione siano esattamente funzioni di secondo grado delle caratteristiche della deformazione inversa [3]. Detti $\mathfrak{J}_1$ e $\mathfrak{J}_2$ i due invarianti primo e secondo dell'omografia $1 + 2\varepsilon$, si trova allora per W_τ:

$$(1.1) \qquad 2W_\tau = c_1\,(\mathfrak{J}_2 - 3) + c_2\,(\mathfrak{J}_1 - 3) + c_3\,(\mathfrak{J}_2 - 3)^2,$$

con c_1, c_2, c_3 funzioni al più della temperatura τ (costante) della trasformazione.

In un precedente lavoro [4] sono state precisate le restrizioni cui devono pensarsi sottoposto c_1, c_2, c_3 perchè W_τ soddisfi alle prime proprietà che gli vengono imposte dal suo significato fisico, innanzi tutto a quella di essere positivo per ogni ammissibile valore di $\mathfrak{J}_1$ e $\mathfrak{J}_2$ e di annullarsi solo nello stato naturale di riferimento ($\mathfrak{J}_1 = \mathfrak{J}_2 = 3$). Rimaneva da esaminare il comportamento della Elasticità di secondo grado al riguardo della propagazione di onde stazionarie di discontinuità, l'argomento, appunto, della presente Nota.

Una prima parte è dedicata ad una trattazione di una qualche ampiezza del problema generale [5] della propagazione di onde in solidi elastici incomprimibili soggetti a trasformazioni finite. Passando poi alla Elasticità di secondo grado, sono state precisate le limitazioni cui devono soddisfare i coefficienti che figurano nel relativo potenziale perchè, per qualsiasi ammissibile deformazione, sia possibile una propagazione ondosa. Una volta soddisfatte tali restrizioni, inoltre, rimangono automaticamente soddisfatte le condizioni perchè il potenziale sia sempre positivo (e si annulli solo nello stato naturale di riferimento), e per di più, perchè nella trazione o compressione semplice la trazione abbia sempre il segno dell'allungamento unitario corrispondente.

2. – Generalità.

Indico, com'è ormai consueto, con C_* la configurazione di riferimento del solido perfettamente elastico incomprimibile G_e preso in esame, scelta fra tutte le configurazioni di equilibrio spontaneo stabile a temperatura uniforme τ

(3) A. SIGNORINI, *Trasformazioni termoelastiche finite*, Mem. III: *Solidi incomprimibili*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) **39** (1955), 147-201 (Cap. III).

(4) T. MANACORDA, *Sul potenziale isotermo nella più generale Elasticità di secondo grado per solidi incomprimibli*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) **41** (1955), 1-10.

(5) Su questo argomento citerò soltanto il lavoro « C. TOLOTTI, *Deformazioni elastiche finite: onde ordinarie di discontinuità e caso tipico di solidi elastici isotropi*, Rend. Mat. Appl. Roma (5) **4** (1943), 34-59 » riguardante la realità dell'ellissoide di polarizzazione nelle trasformazioni finite di solidi comprimibili, e il lavoro « J. ERIKSEN, *On the propagation of waves in isotropic incompressible perfectly elastic materials*, J. Rat. Mech. Anal. **2** (1953), 329-337 » prevalentemente dedicato al caso di MOONEY-RIVLIN.

che per esso si intendono possibili. Con C, invece, la configurazione attuale, con P_* e P la generica coppia di punti corrispondentisi nella trasformazione $C_* \to C$; infine con u_r $(r = 1, 2, 3)$ le componenti, rispetto ad una terna trirettangola $\mathfrak{S} = (O, \boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \boldsymbol{c}_3)$ comunque prescelta, del vettore spostamento $\boldsymbol{s}$.

Suppongo poi che le u_r siano da considerarsi, durante tutta la trasformazione, funzioni finite e continue delle coordinate y_1, y_2, y_3 di P_* in tutto C_*, e del tempo $t \geqslant 0$, con le loro derivate prime, mentre qualcuna delle derivate seconde subisca una discontinuità attraverso una superficie σ_* di C_*, variabile eventualmente col tempo. Indicherò allora con $\boldsymbol{\nu}^*$ la normale a σ_* orientata nel verso della propagazione, con a_*, la grandezza della corrispondente velocità di avanzamento, con $\boldsymbol{\lambda}$ il vettore caratteristico della discontinuità (delle derivate seconde dello spostamento rispetto alle y e t) attraverso σ_*. Mentre intendo che σ rappresenti l'immagine di σ_* in C, e $\boldsymbol{\nu}$ la normale a σ corrispondente a $\boldsymbol{\nu}_*$. Dirò che la discontinuità (o l'onda) è trasversale quando $\boldsymbol{\lambda}$ risulti normale a $\boldsymbol{\nu}$ e longitudinale quando $\boldsymbol{\lambda}$ e $\boldsymbol{\nu}$ siano paralleli.

Posto, per uniformità di notazioni,

$$\nu_0^* = -a_*, \qquad y_0 = t, \tag{2.1}$$

le condizioni cinematiche di compatibilità si scrivono

$$\Delta \frac{\partial^2 u_r}{\partial y_h \, \partial y_k} = \nu_h^* \, \nu_k^* \, \lambda_r \qquad (h, k = 0, 1, 3; \quad r = 1, 2, 3). \tag{2.2}$$

Detta poi α l'omografia di trasformazione, $\alpha = \mathrm{d}P/\mathrm{d}P_*$, introducendo il vettore

$$\boldsymbol{\xi} = K\alpha\,\boldsymbol{\lambda} \tag{2.3}$$

e ponendo

$$2\,\zeta_{hk} = \xi_h\,\nu_k^* + \xi_k\,\nu_h^* \qquad (h, k = 1, 2, 3), \tag{2.4}$$

per le discontinuità delle derivate delle caratteristiche di deformazione si trova, con semplici calcoli,

$$\Delta \frac{\partial \varepsilon_{hk}}{\partial y_s} = \zeta_{hk}\,\nu_s^* \qquad (h, k = 1, 2, 3; \quad s = 0, 1, 2, 3). \tag{2.5}$$

Converrà talvolta usare notazioni ad un solo indice ponendo

$$
(2.6) \qquad \begin{cases} \varepsilon_{hh} = \varepsilon_h, & 2\varepsilon_{h+1,\,h+2} = \varepsilon_{h+3}, \\ \zeta_{hh} = \zeta_h, & 2\zeta_{h+1,\,h+2} = \zeta_{h+3}. \end{cases}
$$

3. – Condizioni dinamiche di compatibilità.

Alle equazioni di KIRCHOFF per le trasformazioni isoterme di un solido incomprimibile elastico (6)

$$
(3.1) \qquad \begin{cases} k_* \, [\boldsymbol{F} - \boldsymbol{a}] = R\alpha \operatorname{grad}_{P_*} p - \sum_{s=1}^{3} \dfrac{\partial \alpha\varphi}{\partial y_s} \boldsymbol{c}_s & \ldots \; C^*, \\ \boldsymbol{f}^* = [pR\alpha - \alpha\varphi] \boldsymbol{N}^* & \ldots \; \Sigma^*, \\ \varphi = \left\| \dfrac{\partial W_\tau}{\partial \varepsilon_j} \right\|, \end{cases}
$$

va aggiunta la condizione di incomprimibilità, che assume, nelle condizioni attuali, la forma

$$
(3.1.1) \qquad \mathfrak{D} \equiv I_3 \, \alpha = 1 .
$$

Per giungere alle condizioni dinamiche di compatibilità non c'è che da calcolare la discontinuità del primo e secondo membro della $(3.1)_1$ attraverso σ_*.

Per quanto riguarda la discontinuità del primo membro, dovendosi intendere continue le forze di massa e la densità nello stato di riferimento, k_*, si ha semplicemente

$$
(3.2) \qquad \Delta k_* \, [\boldsymbol{F} - \boldsymbol{a}] = - k_* \, a_*^2 \, \boldsymbol{\lambda} .
$$

Passando al secondo membro, indico con λ_p il parametro caratteristico della discontinuità delle derivate molecolari di p. Con ciò, per la supposta continuità di α, intanto si ha

$$
(3.3) \qquad \Delta R\alpha \operatorname{grad}_{P_*} p = \lambda_p \, R\alpha \, \boldsymbol{\nu}^* .
$$

---

(6) A. SIGNORINI, Mem. cit. in (3), Cap. I, n. 1.

Allo stesso modo si ottiene

$$\Delta \sum_{s=1}^{3} \frac{\partial \alpha}{\partial y_s} \varphi \boldsymbol{c}_s = \boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{\nu}^* \times \varphi \, \boldsymbol{\nu}^*, \tag{3.4}$$

ed insieme, posto

$$M_{jh} = \frac{\partial^2 W_\tau}{\partial \varepsilon_j \, \partial \varepsilon_h}, \tag{3.5}$$

essendo

$$\Delta \frac{\partial \varphi_j}{\partial y_s} = \sum_{h=1}^{6} M_{jh} \, \Delta \frac{\partial \varepsilon_h}{\partial y_s},$$

si ha [cfr. (2.5)]

$$\Delta \frac{\partial \varphi_j}{\partial y_s} = \sum_{h=1}^{6} M_{jh} \, \zeta_h \, \nu_s^*. \tag{3.6}$$

Poniamo per un momento

$$\psi_i = \sum_{h=1}^{6} M_{jh} \, \zeta_h, \qquad \psi = \| \psi_j \|. \tag{3.7}$$

Si può allora scrivere sinteticamente [cfr. (3.4) e (3.6)]

$$\Delta \sum_{s=1}^{3} \frac{\partial \alpha \varphi}{\partial y_s} \boldsymbol{c}_s = \varphi_\nu \, \boldsymbol{\lambda} + \alpha \, \psi \, \boldsymbol{\nu}^*, \tag{3.8}$$

con

$$\varphi_\nu = \boldsymbol{\nu}^* \times \varphi \, \boldsymbol{\nu}^*. \tag{3.9}$$

Si può ulteriormente osservare che, posto

$$z_\tau = (1/2) \sum_{h,k}^{1 \dots 6} M_{hk} \, \zeta_h \, \zeta_k, \tag{3.10}$$

si ha semplicemente [cfr. (3.7)]

$$\psi \boldsymbol{\nu}^* = \operatorname{grad}_\xi z_\tau,$$

intendendosi il gradiente di z_τ effettuato rispetto alle componenti di ξ. Poichè, come facilmente si verifica, è $\alpha \operatorname{grad}_\xi z_\tau = \operatorname{grad}_\lambda z_\tau$, posto ancora

$$q_\tau = z_\tau + (1/2)\varphi_\nu \boldsymbol{\lambda}^2,$$

tenendo conto delle (3.2) e (3.3) si può infine porre la condizione dinamica di compatibilità nella forma

$$k_* a_*^2 \boldsymbol{\lambda} = -\lambda_p R \alpha \boldsymbol{\nu}^* + \operatorname{grad}_\lambda q_\tau . \tag{3.11}$$

D'altro canto, la condizione di incomprimibilità per la discontinuità della derivata di $\mathfrak{D}$ rispetto ad y_s implica che sia

$$\sum_{j=1}^{6} \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial \varepsilon_j} \zeta_j \nu_s^* = 0 \qquad (s = 1,\ 2,\ 3)$$

e quindi

$$\sum_{j=1}^{6} \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial \varepsilon_j} \zeta_j = 0 . \tag{3.12}$$

Introducendo l'omografia $\delta \equiv \| \partial\mathfrak{D}/\partial\varepsilon_j \| = (1 + 2\varepsilon)^{-1}$ agevolmente si può dare alla (3.12) la forma [cfr. (2.4)]

$$\boldsymbol{\xi} \times \delta \boldsymbol{\nu}^* = 0, \tag{3.12.1}$$

ed anche, tenuto conto della espressione (2.3) di ξ mediante $\boldsymbol{\lambda}$ e che $K\alpha^{-1}\boldsymbol{\nu}^*$ è parallelo a $\boldsymbol{\nu}$,

$$\boldsymbol{\lambda} \times \boldsymbol{\nu} = 0 . \tag{3.13}$$

Detto infine δ_σ il coefficiente di dilatazione superficiale relativo a $(P_*, \boldsymbol{\nu}^*)$, moltiplicando scalarmente la (3.11) per $\boldsymbol{\nu}$ e tenendo conto della (3.13) si ottiene

$$\lambda_p = \frac{1}{1 + \delta_\sigma} \boldsymbol{\nu} \times \operatorname{grad}_\lambda z_\tau = \frac{1}{(1 + \delta_\sigma)^2} \boldsymbol{\nu}^* \times \operatorname{grad}_\xi z_\tau . \tag{3.14}$$

4. – Solidi isotropi in C_*.

L'ipotesi che G_e sia isotropo in C_* implica intanto che, certo risultando a_* indipendente da $\boldsymbol{\nu}_*$, senza perdere in generalità si può assumere per un punto P_* di σ_* come terna di riferimento di $\mathfrak{S}'$ una terna con uno dei versori degli assi, ad esempio $\boldsymbol{c}_3$, coincidente con $\boldsymbol{\nu}_*$. Con ciò le (2.4) si semplificano in

$$(4.1) \qquad \zeta_1 = \zeta_2 = \zeta_6 = 0, \qquad \zeta_3 = \xi_3, \qquad \zeta_4 = \xi_2, \qquad \zeta_5 = \xi_1,$$

con la conseguenza che z_τ assume la forma

$$(4.2) \qquad z_\tau = (1/2)\, \boldsymbol{\xi} \times \zeta\, \boldsymbol{\xi}$$

con

$$(4.3) \qquad \zeta = \begin{Vmatrix} M_{55} & M_{54} & M_{53} \\ M_{45} & M_{44} & M_{43} \\ M_{35} & M_{34} & M_{33} \end{Vmatrix}.$$

Dalla (4.2) si ottiene $\mathrm{grad}_{\xi}\, z_\tau = \zeta\, \boldsymbol{\xi}$, per cui alle condizioni di compatibilità dinamica si può dare la forma [cfr. (3.9), (3.11), (2.3)]

$$(4.4) \qquad [\varphi_3 - k_*\, a_*^2]\, \boldsymbol{\xi} = \lambda_p\, \boldsymbol{\nu}^* - (1 + 2\varepsilon)\zeta\boldsymbol{\xi}.$$

Ad essa va aggiunta la condizione di incomprimibilità

$$(4.4.1) \qquad \boldsymbol{\xi} \times \delta\, \boldsymbol{\nu}^* = 0,$$

mentre la (3.14) rimane modificata in

$$(4.5) \qquad \lambda_p = \frac{1}{(1+\delta_\sigma)^2}\, \boldsymbol{\nu}^* \times \zeta\, \boldsymbol{\xi}.$$

Si può inoltre aggiungere l'espressione che l'ipotesi di isotropia permette di dare alle M_{jk}. Poichè nelle condizioni attuali W_τ viene a dipendere dalle caratteristiche di deformazione per il tramite soltanto degli invarianti primo e secondo, $\mathfrak{J}_1$ e $\mathfrak{J}_2$, di $1 + 2\varepsilon$ $[I_3(1 + 2\varepsilon) = 1]$, si ottiene [7]

$$(4.6)\quad \begin{cases} M_{jk} = 4\delta_j\delta_k \left\{ \dfrac{\partial^2 W_\tau}{\partial \mathfrak{J}_1^2} + 2(\mathfrak{J}_1 - 1) \dfrac{\partial^2 W_\tau}{\partial \mathfrak{J}_1\, \partial \mathfrak{J}_2} + (\mathfrak{J}_1 - 1)^2 \dfrac{\partial^2 W_\tau}{\partial \mathfrak{J}_2^2} + \dfrac{\partial W_\tau}{\partial \mathfrak{J}_2} \right\} - \\ - 4[(1 + \delta_j)\delta_k\varepsilon_j + (1 + \delta_k)\delta_j\varepsilon_k] \left\{ \dfrac{\partial^2 W_\tau}{\partial \mathfrak{J}_1\, \partial \mathfrak{J}_2} + (\mathfrak{J}_1 - 1) \dfrac{\partial^2 W_\tau}{\partial \mathfrak{J}_2^2} \right\} + \\ + 4(1 + \delta_j)(1 + \delta_k) \dfrac{\partial^2 W_\tau}{\partial \mathfrak{J}_2^2} \varepsilon_j\varepsilon_k - 2(1 + \delta_j)\delta_{jk} \dfrac{\partial W_\tau}{\partial \mathfrak{J}_2}. \end{cases}$$

In particolare per i coefficienti di ζ si ha:

$$(4.7)\quad \begin{cases} M_{33} = 4 \left\{ \dfrac{\partial^2 W_\tau}{\partial \mathfrak{J}_1^2} + 2(\mathfrak{J}_1 - 1) \dfrac{\partial^2 W_\tau}{\partial \mathfrak{J}_1\, \partial \mathfrak{J}_2} + (\mathfrak{J}_1 - 1) \dfrac{\partial^2 W_\tau}{\partial \mathfrak{J}_2^2} \right\} - \\ \qquad - 16\varepsilon_3 \left\{ \dfrac{\partial^2 W_\tau}{\partial \mathfrak{J}_1\, \partial \mathfrak{J}_2} + (\mathfrak{J}_1 - 1) \dfrac{\partial^2 W_\tau}{\partial \mathfrak{J}_2^2} \right\} + 16 \dfrac{\partial^2 W_\tau}{\partial \mathfrak{J}_2^2} \varepsilon_3^2, \\ M_{44} = -4 \dfrac{\partial^2 W_\tau}{\partial \mathfrak{J}_2^2} \varepsilon_4^2 - 2 \dfrac{\partial W_\tau}{\partial \mathfrak{J}_2}, \\ M_{55} = -4 \dfrac{\partial^2 W_\tau}{\partial \mathfrak{J}_2^2} \varepsilon_5^2 - 2 \dfrac{\partial W_\tau}{\partial \mathfrak{J}_2}, \\ M_{34} = -4 \left\{ \dfrac{\partial^2 W_\tau}{\partial \mathfrak{J}_1\, \partial \mathfrak{J}_2} + (\mathfrak{J}_1 - 1) \dfrac{\partial^2 W_\tau}{\partial \mathfrak{J}_2^2} \right\} \varepsilon_4 + 8 \dfrac{\partial^2 W_\tau}{\partial \mathfrak{J}_1\, \partial \mathfrak{J}_2} \varepsilon_3\varepsilon_4, \\ M_{35} = -4 \left\{ \dfrac{\partial^2 W_\tau}{\partial \mathfrak{J}_1\, \partial \mathfrak{J}_2} + (\mathfrak{J}_1 - 1) \dfrac{\partial^2 W_\tau}{\partial \mathfrak{J}_2^2} \right\} \varepsilon_5 + 8 \dfrac{\partial^2 W_\tau}{\partial \mathfrak{J}_1\, \partial \mathfrak{J}_2} \varepsilon_3\, \varepsilon_5, \\ M_{45} = \quad 4 \dfrac{\partial^2 W_\tau}{\partial \mathfrak{J}_2^2} \varepsilon_4\, \varepsilon_5\,. \end{cases}$$

O s s e r v a z i o n e 1. – Le (4.7) mettono subito in evidenza che è $M_{34} = M_{35} = M_{45} = 0$, $M_{44} = M_{55}$ ogni volta che $\boldsymbol{\nu}^*$ coincida con una direzione principale di deformazione, perchè in tal caso è lecito assumere come terna di riferimento una terna principale di deformazione. In queste condizioni, inoltre, è $\lambda_\nu = 0$ perchè, riducendosi ζ a forma diagonale, è $\boldsymbol{\nu}^* \times \zeta\, \boldsymbol{\xi} = M_{33}\, \xi_3$ e, per

[7] Intendendo $\delta_j = 1$, $\delta_{j+3} = 0$ per $j = 1, 2, 3$.

la condizione di incomprimibilità [cfr. (4.4.1)] $\xi_3 = 0$. In tal caso, come per ogni tipo di potenziale per il quale risulti $\lambda_p \equiv 0$ [cfr. Osservazione seguente], la (4.4) si può scrivere

$$k_* a_*^2 \lambda = \mathrm{grad}_\lambda q_\tau,$$

e la conica (nel piano perpendicolare a $\boldsymbol{\nu}$) $q_\tau = \mathrm{cost.}$ dà con le direzioni dei suoi assi le possibili direzioni di discontinuità, e con gli inversi dei semiassi le corrispondenti velocità di propagazione.

Osservazione 2. – Dalle (4.7) risulta anche che condizione necessaria e sufficiente perchè, scelta $\boldsymbol{\nu}^*$, per ogni ammissibile deformazione sia $M_{34} = M_{35} = M_{45} = 0$ è che W_τ sia della forma

$$2W_\tau = c_1(\mathfrak{J}_2 - 3) + f(\mathfrak{J}_1 - 3), \tag{4.8}$$

con c_1 funzione al più di τ ed f funzione generica del suo argomento. Insieme anche risulta $M_{44} = M_{55}$.

Un potenziale che soddisfa alle condizioni ora accennate è quello di Mooney-Rivlin ([8])

$$2W_\tau = c_1(\mathfrak{J}_2 - 3) + c_2(\mathfrak{J}_1 - 3), \tag{4.9}$$

con c_1 e c_2 ambedue non negative. Nel caso particolare, anzi, si ha anche $M_{33} = 0$ e quindi identicamente $\lambda_p = 0$. Si può dimostrare che nella elasticità di Mooney-Rivlin possono sempre propagarsi due onde trasversali distinte corrispondenti a direzioni di discontinuità ortogonali ([9]).

Un altro potenziale isotermo la cui forma rientra nella classe (4.8) è

$$2W_\tau = k_1(\mathfrak{J}_1 - 3) + k_2(\mathfrak{J}_2 - 3) + k_3(\mathfrak{J}_1 - 3)^2, \tag{4.10}$$

con k_1, k_2, k_3 funzioni al più di τ. Esso rappresenta il più generale potenziale isotermo per il quale la differenza tra le caratteristiche principali di tensione è una funzione esattamente di secondo grado delle caratteristiche principali di deformazione, e fornisce perciò l'estensione al caso di solidi incomprimibili di un potenziale proposto anni fa da A. Signorini ([10]).

([8]) M. Mooney, *A theory of large elastic deformation*. J. Appl. Physics **11** (1940), 582-592.

([9]) J. L. Eriksen, loc. cit. in ([5]).

([10]) A. Signorini, *Sulle deformazioni termoelastiche finite*, Verhandlungen d. 3° Kongress f. Tech. Mech., Stockolm 1930, pp. 80-89.

5. - Onde principali di discontinuità.

Dirò *principale* un'onda ordinaria di discontinuità σ_* quando accade che per ogni suo punto P_* ed in ogni istante di un intervallo di tempo (t_1, t_2), $\boldsymbol{\nu}^*$ coincide con una direzione principale di deformazione.

In un mezzo isotropo, pensando ancora in P_*, $\boldsymbol{\nu}^* = \boldsymbol{c}_3$ e assumendo, come certo è ora lecito, quale terna di riferimento una terna principale di deformazione, la (4.4.1) implica $\xi_3 = 0$ mentre al tempo stesso [cfr. Osservazione **1** del n. prec.] λ_p si riduce identicamente a zero. La (4.4) viene perciò semplicemente ad equivalere alle due equazioni scalari

$$(5.1) \qquad [k_* a_*^2 - \varphi_3 - M_{6-h,\, 6-h}(1 + 2E_h)]\xi_h = 0 \qquad (h = 1,\ 2),$$

risultando la terza identicamente soddisfatta.

Poichè si ha

$$(5.2) \qquad \varphi_3 = \frac{\partial W_\tau}{\partial \varepsilon_3} = 2\left\{\frac{\partial W_\tau}{\partial \mathfrak{I}_1} + (\mathfrak{I}_1 - 1)\frac{\partial W_\tau}{\partial \mathfrak{I}_2} + 2\frac{\partial W_\tau}{\partial \mathfrak{I}_2} E_3\right\} =$$

$$= 2\left\{\frac{\partial W_\tau}{\partial \mathfrak{I}_1} + \frac{\partial W_\tau}{\partial \mathfrak{I}_2}[(1 + 2E_1) + (1 + 2E_2)]\right\},$$

e [cfr. (4.6)]

$$(5.3) \qquad M_{6-h,\, 6-h} = -2\frac{\partial W_\tau}{\partial \mathfrak{I}_2},$$

si ottiene

$$(5.4) \qquad \varphi_3 + M_{6-h,\, 6-h}(1 + 2E_h) = 2\left\{\frac{\partial W_\tau}{\partial \mathfrak{I}_1} + (1 + 2E_{3-h})\frac{\partial W_\tau}{\partial \mathfrak{I}_2}\right\} \qquad (h = 1,\ 2).$$

Potranno dunque certamente propagarsi onde principali di discontinuità in un mezzo isotropo ove risulti soddisfatta una almeno delle disuguaglianze

$$(5.5) \qquad \frac{\partial W_\tau}{\partial \mathfrak{I}_1} + (1 + 2E_i)\frac{\partial W_\tau}{\partial \mathfrak{I}_2} > 0 \qquad (i = 1,\ 2),$$

che si possono anche scrivere, introdotti gli allungamenti principali Δ_h,

$$\frac{\partial W_\tau}{\partial \mathfrak{J}_1} + (1 + \Delta_i)^2 \frac{\partial W_\tau}{\partial \mathfrak{J}_2} > 0 \qquad (i = 1,\, 2)\ (^{11}). \tag{5.5.1}$$

Soddisfatte ambedue le (5.5), potranno propagarsi due tipi di onde corrispondenti a valori in generale diversi della velocità di propagazione e a determinazioni di ξ tra loro ortogonali e paralleli alla prima e seconda direzione principale di deformazione.

Osservazione. La (5.5) mette in evidenza che condizione necessaria e sufficiente perchè le velocità di propagazione delle due onde possibili siano eguali per ogni ammissibile deformazione è che sia $\partial W_\tau/\partial \mathfrak{J}_2 = 0$, $\partial W_\tau/\partial \mathfrak{J}_1 > 0$ e che quindi W_τ rientri nella classe (4.8) con $c_1 = 0$ e $f'(\mathfrak{J}_1 - 3) > 0$. A tali condizioni soddisfano, ad esempio, i cosiddetti solidi neo-hookeani per i quali è $f = c_2 (\mathfrak{J}_1 - 3)$, $c_2 > 0$ (12).

6. – Le onde principali di discontinuità nella Elasticità di secondo grado: considerazioni preliminari.

Le (5.5) sono identicamente soddisfatte per il potenziale relativo al caso di Mooney-Rivlin [cfr. (4.9)] perchè già la condizione che W_τ sia positivo per ogni ammissibile deformazione implica $c_1 \geqslant 0$, $c_2 \geqslant 0$.

Invece per il potenziale relativo alla Elasticità di secondo grado

$$2W_\tau = c_1 (\mathfrak{J}_2 - 3) + c_2 (\mathfrak{J}_1 - 3) + c_3 (\mathfrak{J}_2 - 3)^2, \tag{6.1}$$

la condizione che le (5.5) siano identicamente soddisfatte impone alcune restrizioni, che ora intendo precisare, per la scelta dei valori delle c_1, c_2, c_3. Supporrò sempre $c_3 \neq 0$ e perciò (13) $c_3 > 0$.

Conviene anche qui introdurre sistematicamente, insieme agli allungamenti principali Δ_h ($h = 1, 2, 3$) legati dalla condizione di incomprimibilità, fissato i ($i = 1, 2$), i due parametri indipendenti

$$\lambda = 1 + \Delta_i\,, \qquad s = \pm (\Delta_{i+1} - \Delta_{i+2}) \tag{6.2}$$

(11) J. L. Eriksen, loc. cit. in (5).

(12) R. S. Rivlin, *Large elastic deformation of isotropic materials: Fundamental concepts*, Phil. Trans. Royal Soc. (A) **240** (1948), 491-508.

(13) T. Manacorda, loc. cit. in (4), n. 4.

col segno + oppure — a seconda che è Δ_{i+1} maggiore o minore di Δ_{i+2}, di modo che si possa intendere, non solo λ, ma anche s sempre non negativo.

Con l'introduzione di λ ed s, $\mathfrak{I}_1$ e $\mathfrak{I}_2$ restano espressi da (14)

$$\text{(6.3)} \qquad \begin{cases} \mathfrak{I}_1 = s^2 + \lambda^2 + 2\lambda^{-1} = s^2 + (\lambda - 1)^2(\lambda + 2)/\lambda + 3, \\ \mathfrak{I}_2 = \lambda^2 s^2 + \lambda^{-2} + 2\lambda = \lambda^2 s^2 + (\lambda - 1)^2 (2\lambda + 1)/\lambda^2 + 3, \end{cases}$$

e al variare di λ ed s tra zero e $+\infty$, interpretando $\mathfrak{I}_1 - 3$ e $\mathfrak{I}_2 - 3$ quali coordinate cartesiane x e y, il luogo di tutti i punti $I(x, y)$ corrispondenti a tutti i valori di $\mathfrak{I}_1$ e $\mathfrak{I}_2$ ammissibili è il campo $\mathfrak{A}$ limitato dal ramo $\mathfrak{L}$ di quartica

$$\text{(6.4)} \qquad x = \lambda^2 + 2\lambda^{-1} - 3, \qquad y = \lambda^{-2} + 2\lambda - 3, \qquad (\lambda \geqslant 0),$$

col concorso di una parte $\mathfrak{L}_\infty$ della retta all'infinito. I punti di $\mathfrak{L}$ corrispondono al valore $s = 0$ (trazione o compressione semplice), mentre nel punto $V \equiv (0, 0)$ (stato naturale) $\mathfrak{L}$ possiede una cuspide e la tangente corrispondente è la bisettrice del primo quadrante.

Osservazione. Ai punti di $\mathfrak{L}_\infty$ corrispondono, in base alle (6.3), coppie di valori di λ ed s del tipo $\lambda = 0$, $s = s_0$; $\lambda = +\infty$, $s = s_0$; $\lambda = \lambda_0$, $s = +\infty$; senza escludere che λ_0 ed s_0 possano ridursi a zero o ad infinito.

7. – Le onde principali di discontinuità nella Elasticità di secondo grado: posizione del problema; considerazioni geometriche.

a) Adottando per W_τ la forma (6.1), le (5.5.1) divengono:

$$\text{(7.1)} \qquad c_2 + (1 + \Delta_i)^2 [c_1 + 2c_3 (\mathfrak{I}_2 - 3)] > 0 \qquad (i = 1, 2).$$

Fissato il valore di i, e adottate le posizioni (6.2), queste equivalgono ad imporre che, per ogni valore non negativo di λ ed s, sia

$$\text{(7.2)} \qquad f(\lambda, s) \equiv c_2 + 2c_3 + (c_1 - 6c_3)\lambda^2 + 4c_3 \lambda^3 + 2c_3 \lambda^4 s^2 > 0 .$$

Si può subito osservare che se la (7.2) è soddisfatta, in corrispondenza ad una scelta dell'indice i nella (7.1), per ogni possibile valore di λ ed s, certo è

(14) A. Signorini, loc. cit. in (3), Cap. II, n. 8.

anche soddisfatta l'analoga relazione relativa al valore $i+1$ dell'indice. Se dunque onde possono propagarsi nella Elasticità di secondo grado, esse corrispondono a due velocità di propagazione contemporaneamente reali e a due direzioni ortogonali di discontinuità.

Conviene poi introdurre anche qui i parametri [15]

$$X = 1 - c_1/(6c_3), \qquad Y = 1 + c_2/(4c_3)\,. \tag{7.3}$$

Col loro intervento la funzione $f(\lambda, s)$ assume la forma

$$f(\lambda, s) = 2c_3\{\lambda^4 s^2 + 2\lambda^3 - 3X\lambda^2 + 2Y - 1\}, \tag{7.4}$$

la quale permette intanto di osservare che, per essere $c_3 > 0$, $f(\lambda, s)$ è certo positiva per tutte le coppie di valori di λ ed s corrispondenti a punti di $\mathfrak{L}_\infty$ (cfr. Osservazione in fine del n. prec.) salvo al più la coppia di valori $\lambda = 0$, $s = s_0$ $(0 \leqslant s_0 \leqslant +\infty)$. Toglierò questa eccezione alla fine del n. **8**.

b) Interpretando X e Y quali coordinate cartesiane, prendo in esame la famiglia di rette

$$3\lambda^2 X - 2Y - 2\lambda^3 + 1 = 0, \tag{7.5}$$

con $\lambda \geqslant 0$, ed insieme il loro inviluppo, cioè il ramo γ di parabola cubica

$$2Y = X^3 + 1, \tag{7.6}$$

contenuto nel semipiano delle X positive.

Fissiamo allora l'attenzione sulla regione ω del semipiano delle $Y \geqslant 0$ limitato dalla retta $Y = 1/2$ per $X \leqslant 0$, e da γ per $X \geqslant 0$. Si può osservare che:

1) in corrispondenza ad ogni punto M appartenente ad ω, certo risulta $Y \geqslant 1/2$, e di più il polinomio in

$$g_\lambda = 2\lambda^3 - 3X\lambda^2 + 2Y - 1 \tag{7.7}$$

è non negativo per ogni valore non negativo di λ (e si annulla per $\lambda > 0$ in un sol punto del contorno di γ), e viceversa;

---

[15] T. MANACORDA, loc. cit. in [4], n. 4.

2) la retta della famiglia (7.5) corrispondente al valore $\lambda = 1$ di λ è tangente a γ nel punto $Q(1, 1)$, onde per ogni punto di ω diverso da Q certo risulta

$$(7.8) \qquad 2Y - 3X + 1 > 0, \qquad Y \geqslant 1/2 .$$

8. – Considizione necessaria e sufficiente perchè nella Elasticità di secondo grado possano propagarsi onde principali di discontinuità.

Le osservazioni 1) e 2) del n. precedente permettono ormai agevolmente di dimostrare che *condizione necessaria e sufficiente perchè le* (7.1) *risultino soddisfatte per ogni ammissibile deformazione è che* (essendo $c_3 > 0$) *il punto M di coordinate X, Y date dalle* (7.3) *sia interno ad* ω.

Se infatti M è interno ad ω, risulta positivo per ogni valore di λ non negativo il polinomio g_λ, e poichè è

$$(8.1) \qquad \{1/(2c_3)\}\, f(\lambda, s) = \lambda^4 s^2 + g_\lambda$$

certo è anche positiva per ogni valore non negativo di λ ed s la funzione $f(\lambda, s)$.

Viceversa, se $f(\lambda, s)$ è positiva per ogni valore non negativo di λ ed s, deve anche essere positivo per ogni valore di λ il polinomio g_λ, e quindi M deve essere interno ad ω.

Osservazione 1. Le disuguaglianze (7.8), in base alle (7.3), si possono scrivere, per ogni punto interno ad ω,

$$(8.2) \qquad c_1 + c_2 > 0, \qquad c_2 + 2c_3 > 0 .$$

Di queste, la prima non differisce dalla analoga disuguaglianza determinata altrove [16], e ancora esclude che c_1 e c_2 possano entrambi essere nulli. La seconda, invece, mentre viene a costituire per c_2 una restrizione maggiore di quella imposta dalla sola condizione che W_τ sia positiva per tutti i valori possibili dei suoi argomenti non entrambi nulli, permette di escludere che nei punti di $\mathfrak{L}_\infty$ corrispondenti alle coppie di valori $\lambda = 0$, $s = s_0$ $(0 \leqslant s_0 \leqslant +\infty)$, $f(\lambda, s)$ possa diventare negativa. Perchè, in tali punti, tutt'al più f si riduce proprio a $c_2 + 2c_3$.

[16] T. MANACORDA, loc. cit. in [4], n. 4.

Osservazione **2.** Nel lavoro più volte citato è stato provato che se, oltre ad essere $c_3 > 0$, il punto $M(X, Y)$ è interno alla regione Ω_1 del semipiano delle $Y \geqslant 0$ limitata dal semiasse delle X negative e dal ramo Γ_1 di curva

$$Y^2 = X^3, \tag{8.3}$$

per $X \geqslant 0$, W_τ è positivo per tutti i valori possibili dei suoi argomenti, si annulla solo nello stato naturale di riferimento, e, nella trazione o compressione semplice, la trazione ha sempre il segno dell'allungamento unitario corrispondente.

Come subito si vede, γ e Γ_1 sono tangenti nel punto $Q(1, 1)$, ma anche facilmente si constata che ω è tutta contenuta in Ω_1. Infatti, γ e Γ_1 non hanno altri punti a comune oltre Q, e in Q il raggio di curvatura di γ è più piccolo del raggio di curvatura di Γ_1.

Da questa semplice osservazione risulta dunque che, *se il punto M di coordinate X, Y date dalle (7.3) è interno ad ω, nella Elasticità di secondo grado possono propagarsi onde ordinarie principali di discontinuità per qualunque ammissibile deformazione, e per di più W_τ è positiva sempre, annullandosi solo nello stato di rif rimento, mentre nella trazione e compressione semplice la trazione ha il segno dell'allungamento unitario corrispondente.*

* * *