Riv. Mat. Univ. Parma 10 (1959), 35-55

GIORGIO MALGARINI (*)

Sul comportamento asintotico di un sistema a due gradi di libertà, con legge d'attrito discontinua. (**)

1. – Ci proponiamo di studiare talune proprietà delle piccole oscillazioni con attrito d'un sistema materiale (olonomo ed a vincoli fissi) a due gradi di libertà (1), nelle ipotesi che:

1°) l'attrito intervenga sopra una sola coordinata, da potersi a sua volta assumere come coordinata libera;

2°) la forza d'attrito si possa eguagliare, almeno nell'ambito delle piccole oscillazioni, ad una «resistenza costante».

Ciò avviene, ad esempio, nelle oscillazioni d'un bipendolo piano, con attrito soltanto nella cerniera esterna, oppure solo in quella interna.

Introduciamo le coordinate libere x_1, x_2 del sistema, il potenziale U delle forze attive

$$U = -\frac{1}{2}(a_{11} x_1^2 + 2a_{12} x_1 x_2 + a_{22} x_2^2), \qquad \text{con} \qquad a_{11} > 0,\ \Delta = a_{11} a_{22} - a_{12}^2 > 0$$

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica del Politecnico, Piazza Leonardo da Vinci 32, Milano, Italia.

(**) Ricevuto il 10-VII-1959, e presentato dal prof. LUIGI AMERIO.

(1) Per lo studio su analoghe questioni, vedasi ad esempio: A. A. ANDRONOW and C. E. CHAIKIN, **Theory of oscillations**, Princeton University Press, Princeton 1949; J. Z. CIPKIN, **The theory of relay systems**, Berlin 1958 (Moscow 1955); M. A. AIZERMAN and F. R. GANTMACHER, *Determination of stability by linear approximation of a periodic solution of a system of differential equations with discontinuous right-hand sides*, Quart. J. Mech. Appl. Math. **11** (1958), pag. 385.

e diciamo R_1 ed R_2 le componenti rispetto ad x_1 e x_2 della forza d'attrito. Per l'ipotesi 1°, una di tali componenti, ad esempio la R_1, risulterà nulla e la potenza $\prod$ della forza d'attrito si scriverà

$$\prod = R_2\, \dot{x}_2 . \tag{1}$$

Per il seguito ci converrà dare soltanto al potenziale U la forma ortonormale, con il seguente cambiamento di variabili:

$$x = \sqrt{a_{11}}\,(x_1 + a_{12}\, x_2/a_{11}), \qquad y = \sqrt{\Delta/a_{11}}\, x_2 . \tag{2}$$

Notiamo espressamente che, per le (1) e (2), la potenza della forza d'attrito si scrive:

$$\prod = R_2 \sqrt{a_{11}/\Delta}\; \dot{y} = R_y\, \dot{y} ;$$

si ha dunque $R_x = 0$ e ciò mostra che, anche nelle nuove coordinate (2), l'attrito interviene soltanto sulla coordinata y.

Nulla dunque sacrifichiamo alla generalità, limitandoci nel seguito a studiare le piccole oscillazioni con attrito d'un sistema materiale, caratterizzate dall'energia cinetica T, dal potenziale U e dalla potenza $\prod$ della forza d'attrito seguenti:

$$\left\{\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}\,(b_{11}\,\dot{x}^2 + 2b_{12}\,\dot{x}\,\dot{y} + b_{22}\,\dot{y}^2), \quad \text{con} \quad b_{11} > 0,\ B = b_{11}\, b_{22} - b_{12}^2 > 0, \\ U &= -\frac{1}{2}\,(x^2 + y^2) \\ \prod &= R_y\, \dot{y} . \end{aligned}\right. \tag{3}$$

Porremo infine: $R_y = R$ e supporremo in ogni caso $b_{12} \geqslant 0$; se infatti fosse $b_{12} < 0$, basterebbe cambiare, ad esempio, la x in $-x$.

Tenuto conto delle (3), le equazioni di Lagrange, che reggono lo stato di moto e di quiete del sistema dato, sono:

$$b_{11}\, \ddot{x} + b_{12}\, \ddot{y} = -x, \tag{4}$$

$$b_{12}\, \ddot{x} + b_{22}\, \ddot{y} = -y + R(x,\ y,\ \dot{y}), \tag{5}$$

dalle quali si ottiene l'equivalente sistema differenziale:

$$C\ddot{x} = -px + m[y - R(x, y, \dot{y})], \tag{6}$$

$$C\ddot{y} = mx - y + R(x, y, \dot{y}), \tag{7}$$

con

$$C = B/b_{11} > 0, \qquad p = b_{22}/b_{11} > 0, \qquad m = b_{12}/b_{11} \geqslant 0 . \tag{8}$$

L'equazione (7), in base alla legge d'attrito di COULOMB-MORIN, ci permette di definire la componente R della forza d'attrito.

Risulterà infatti stabilita, per l'ipotesi 2°, una costante $H > 0$, dipendente dal coefficiente d'attrito e dalla reazione normale alla coordinata y, tale che s'abbia:

$$R(x, y, \dot{y}) = \begin{cases} -H\,\dot{y}/|\,\dot{y}\,| & \text{per} \quad \dot{y} \neq 0, \\ -(mx - y) & \text{per} \quad \dot{y} = 0, \quad |\,mx - y\,| \leqslant H, \\ 0 & \text{per} \quad \dot{y} = 0, \quad |\,mx - y\,| > H . \end{cases} \tag{9}$$

Si noti che:

1) La funzione R non dipende da $\dot{x}$.

2) Si ha: $-H \leqslant R(x, y, \dot{y}) \leqslant H$, cioè la funzione R è limitata.

3) Si ha: $\lim\limits_{\dot{y}\to 0+} R = -H$, $\lim\limits_{\dot{y}\to 0-} R = +H$. Diremo allora che sull'iperpiano $\dot{y} = 0$ la R presenta una discontinuità di prima specie.

Dunque integrando il sistema (6), (7) si otterranno due funzioni $x(t)$, $y(t)$ continue e derivabili per $t \geqslant 0$ e qualunque siano le condizioni iniziali; le funzioni $\dot{x}(y)$, $\dot{y}(t)$ risulteranno continue; mentre le $\ddot{x}(t)$, $\ddot{y}(t)$ presenteranno soltanto discontinuità di 1ª e 3ª specie in punti isolati del semiasse positivo t.

2. – Il caso $b_{12} = m = 0$ è banale, risultando le equazioni (4), (5) a variabili separate ed ampiamente note (²). Si sa in particolare che esiste in ogni caso un valore finito $\bar{t} \geqslant 0$, dipendente dalle condizioni iniziali y_0, $\dot{y}_0$, tale che s'abbia $\dot{y}(t) \equiv 0$ per $t \geqslant \bar{t}$.

(²) Cfr. ad esempio: A. A. ANDRONOW, loc. cit. in (¹) pag. 107; B. FINZI e P. UDESCHINI, **Esercizi di Meccanica Razionale**, Tamburini, Milano 1958 (pag. 361, n. 3).

Supporremo dunque, qui e nel seguito, $b_{12} > 0$, cioè $m > 0$.

La condizione

$$| mx - y | \leqslant H$$

che appare nella (9) è soddisfatta allora dai punti del piano xy non esterni ad una striscia S, la cui frontiera è costituita da due rette parallele ed a coefficiente angolare positivo; diremo (s) quella sinistra, di equazione $mx - y + H = 0$, ed (r) quella destra, di equazione $mx - y - H = 0$.

Se allora, per $t = 0$, risulta:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{y}_0 = 0 \\ | mx_0 - y_0 | < H, \end{array} \right. \tag{10}$$

mostriamo che, qualunque sia $\dot{x}_0$, si ha in generale un tratto di moto armonico parallelo all'asse x.

Infatti, per la suddetta continuità di $x(t)$, $y(t)$, esisterà per la (10) un intorno $0 \mapsto t_1$ ove s'avrà:

$$| m\, x(t) - y(t) | \leqslant H .$$

In tale intorno l'equazione (7), tenuto conto della (9), diventa: $\ddot{y}(t) \equiv 0$, da cui si ricava $y(t) \equiv y_0$ in $0 \mapsto t_1$; la (6) si scrive, in $0 \mapsto t_1$, sempre per la (9):

$$C\, \ddot{x}(t) + (p - m^2)\, x(t) = 0$$

e questa infine, per le (8), diventa:

$$b_{11}\, \ddot{x} + x = 0, \tag{11}$$

che del resto si poteva immediatamente ottenere dalla (4) col porvi $\ddot{y} \equiv 0$. Ovviamente risulterà costante, in $0 \mapsto t_1$, la seguente espressione:

$$2A = b_{11}\, \dot{x}^2 + x^2 . \tag{12}$$

Mostriamo ora che « condizione necessaria e sufficiente perchè il precedente moto armonico abbia durata infinita è che i dati iniziali soddisfino alle limitazioni seguenti:

$$(13)\quad \begin{cases} \dot{y}_0 = 0 \\ |y_0| \leqslant H \\ 2A_0 = b_{11}\,\dot{x}_0^2 + x_0^2 = [(k\,H - |y_0|)/m]^2 \qquad \text{con} \qquad |y_0|/H \leqslant k \leqslant 1 \text{ ».} \end{cases}$$

Le (13) sono necessarie; perchè infatti il predetto moto armonico, con $y(t) \equiv y_0$, abbia inizio, occorre anzitutto: $\dot{y}_0 = 0$; perchè poi esso non sia interrotto, occorre, per la (9), che qualunque sia $t > 0$ il punto $P(t)$ di coordinate $x(t)$, $y(t)$

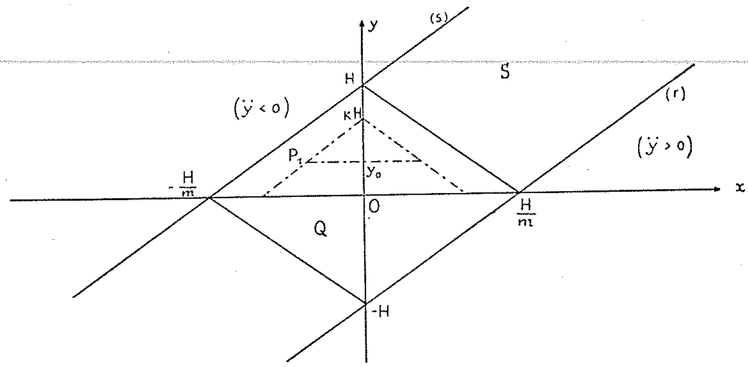

Fig. 1.

risulti non esterno ad S. Questo esige $|y_0| \leqslant H$, come appare immediatamente da un esame della figura. Premessa inoltre l'ovvia constatazione che il moto armonico (11), sempre che prosegua tale, è simmetrico rispetto all'asse y, occorre che $P(t)$ non fuoriesca addirittura dal parallelogramma Q, indicato in figura e definito da

$$0 \leqslant m\,|x| + |y| \leqslant H$$

o, che è lo stesso, supposto ad esempio $y_0 \geqslant 0$ e detto P_1 il punto, a sinistra dell'asse y, corrispondente all'inversione del segno di $\dot{x}(t)$, occorre che P_1, di coordinate x_1 ed $y_1 = y_0$, appartenga ad una retta d'equazione

$$m\,x - y + k\,H = 0 \qquad \text{con} \qquad y_0 \leqslant k\,H \leqslant H\,.$$

Deve dunque essere:

$$2A_0 = b_{11}\dot{x}_0^2 + x_0^2 = x_1^2 = [(kH - y_0)/m]^2 \qquad \text{con} \qquad y_0/H \leqslant k \leqslant 1\,.$$

Che poi le condizioni (13) siano sufficienti, appare evidente da un esame del sistema (6), (7), unitamente alla definizione (9): si osservi infatti che è $x_0^2 \leqslant [(kH - |y_0|)/m]^2$ e quindi il punto $P_0(x_0, y_0)$ appartiene al parallelogramma Q. Infine dalle stesse (13) risulta che « condizione necessaria e sufficiente perchè si abbia, per $t \geqslant 0$, quiete totale è che i dati iniziali siano

$$x_0 = \dot{x}_0 = \dot{y}_0 = 0, \qquad |y_0| \leqslant H\text{ »}.$$

3. – Consideriamo ora condizioni iniziali del tutto arbitrarie.

Introdotta l'energia totale $E = T - U$ del sistema, si ha dalle (3) e poi dalla (12):

$$2E = b_{11}\dot{x}^2 + 2b_{12}\dot{x}\dot{y} + b_{22}\dot{y}^2 + x^2 + y^2 = 2A + y^2 + \dot{y}(2b_{12}\dot{x} + b_{22}\dot{y})\,. \tag{14}$$

Moltiplicando la (4) per $\dot{x}$, la (5) per $\dot{y}$ e sommando, indi tenendo conto della (9), si ottiene

$$dE/dt = R\dot{y} = -H|\dot{y}| \leqslant 0, \tag{15}$$

che è la nota espressione del teorema dell'energia.

Mostriamo ora che, detto $\bar{t}$ l'estremo superiore, finito o infinito, dei valori t per i quali risulta $\dot{y}(t) \neq 0$, esistono finiti i limiti seguenti:

(16) $\lim\limits_{t\to\bar{t}} y(t) = \bar{y}$, (17) $\lim\limits_{t\to\bar{t}} \dot{y}(t) = 0$, (18) $\lim\limits_{t\to\bar{t}} E(t) = \bar{E}$,

(19) $\lim\limits_{t\to\bar{t}} \dot{E}(t) = 0$, (20) $\lim\limits_{t\to\bar{t}} A(t) = \bar{A}$.

Ciò è immediato, se $\bar{t}$ è finito, dopo quanto fu detto al n. **1** circa la continuità di $x(t)$, $y(t)$ e di $\dot{x}(t)$, $\dot{y}(t)$ ed al n. **2** circa il moto armonico, per $\dot{y}(t) \equiv 0$.

Consideriamo ora il caso di $\bar{t} = \infty$. Dalla (15) otteniamo anzitutto:

$$0 \leqslant E(t) = E_0 - H\int_0^t |\dot{y}|\,dt\,. \tag{21}$$

Tanto basta per affermare che esistono finiti i limiti, per $t \to \infty$, delle due funzioni monotone $E(t)$ e $\int_0^t |\dot{y}|\, dt$. Esiste dunque finito, a maggior ragione,

$$\lim_{t\to\infty} \int_0^t \dot{y}\, dt = \lim_{t\to\infty} y(t) - y_0 = \overline{y} - y_0 .$$

Moltiplicando ora la (7) per $\dot{y}$ ed integrando, si ottiene:

$$\dot{y}^2(t) - \dot{y}_0^2 = (2/C) \int_0^t (m\,x - y + R)\dot{y}\, dt . \tag{22}$$

Osserviamo dalla (21) che, per ogni assegnata quadrupla di condizioni iniziali, $E(t)$ è funzione limitata; ma, per la (14), $E(t)$ è una forma quadratica definita positiva e pertanto anche la funzione $m\,x(t) - y(t)$ appare limitata.

Si ha poi $R\dot{y} = -H|\dot{y}|$; ricordando allora che esiste l'integrale improprio $\int_0^\infty |\dot{y}|\, dt$, altrettanto potremo affermare di $\int_0^\infty (mx - y + R)\dot{y}\, dt$. Esiste dunque finito, per la (22),

$$\lim_{t\to\infty} \dot{y}(t) = \overline{\dot{y}} .$$

Che poi debba essere $\overline{\dot{y}} = 0$ risulta ancora dall'esistenza di $\int_0^\infty |\dot{y}|\, dt$.

Così sono dimostrati i limiti (16), (17), (18); da (15) e (17) risulta pure dimostrato il limite (19); infine dalla (14), tenuto conto che per la (21) la funzione $2b_{12}\dot{x}$ è limitata, e dalle (16), (17), (18) risulta dimostrato anche il limite (20).

4. – Vogliamo ora riscontrare in un esempio meccanico come, a seconda delle condizioni iniziali, il precedente valore $\overline{t}$, estremo superiore dei valori t per i quali risulta: $\dot{y}(t) \neq 0$, possa essere finito, come possa aversi $\overline{t} = \infty$.

Si consideri in un piano verticale un carrello di peso $m_1 g$, scorrevole senza attrito lungo l'asse orizzontale x; sopra d'esso scorra a sua volta con attrito un punto materiale Q di peso $m_2 g$. Una forza elastica di coefficiente k_1 at-

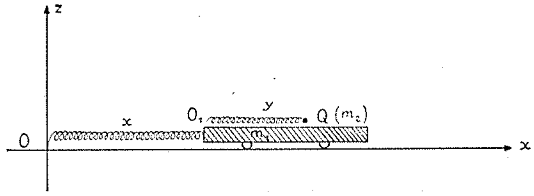

Fig. 2.

tragga il carrello all'origine fissa O ed una seconda forza elastica di coefficiente k_2 attragga Q ad un punto O_1 del carrello. Tale sistema meccanico schematizza, ad esempio, le piccole oscillazioni d'un bipendolo piano, con attrito soltanto nella cerniera interna.

Introdotte le ascisse x di O_1 ed $x + y$ di Q, detta R la forza d'attrito e posto $R/(2m_2) = \Phi$, se supponiamo $m_1 = 2\, m_2$, $k_1 = 2k_2$ e, in conveniente scala di misura del tempo, $k_2/m_2 = 2$, le equazioni che reggono lo stato di moto o di quiete del sistema sono:

$$\ddot{x} = -2x + y - \Phi, \qquad \ddot{y} = 2x - 3y + 3\Phi\,. \tag{23}$$

Volendo definire la forza d'attrito $R = 2m_2\,\Phi$ in base alla legge di COULOMB-MORIN, basta ad esempio considerare l'equazione del moto relativo del punto Q, rispetto ad un osservatore O_1 solidale col carrello mobile. Tale equazione non è che la seconda delle (23); detto allora f il coefficiente d'attrito statico e dinamico, e posto $H = fg/2$, si ottiene:

$$\Phi(x,\, y,\, \dot{y}) = \begin{cases} -H\dot{y}/|\,\dot{y}\,| & \text{per} \quad \dot{y} \neq 0, \\ y - 2x/3 & \text{per} \quad \dot{y} = 0, \qquad |\,2x - 3y\,| \leqslant 3H, \\ 0 & \text{per} \quad \dot{y} = 0, \qquad |\,2x - 3y\,| > 3H\,. \end{cases} \tag{24}$$

Se ad esempio le condizioni iniziali sono:

$$x_0,\ y_0,\ \dot{x}_0 \ \text{qualunque}; \qquad \dot{y}_0 < 0,$$

e se diciamo t_1 la prima radice positiva dell'equazione $\dot{y}(t) = 0$, l'integrale del sistema (23), tenendo conto della (24), si scrive, nell'intervallo $0 \mapsto t_1$

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{1}{3}\Big[(2x_0 + y_0 - H)\cos t + (x_0 - y_0 + H)\cos 2t + \\ \qquad\qquad + (2\dot{x}_0 + \dot{y}_0)\,\text{sen}\, t + \dfrac{1}{2}\,(\dot{x}_0 - \dot{y}_0)\,\text{sen}\, 2t\Big] \\ y(t) = \dfrac{1}{3}\,[(2x_0 + y_0 - H)\cos t - 2(x_0 - y_0 + H)\cos 2t + \\ \qquad\qquad + (2\dot{x}_0 + \dot{y}_0)\,\text{sen}\, t - (\dot{x}_0 - \dot{y}_0)\,\text{sen}\, 2t] + H\,. \end{cases} \tag{25}$$

Ma al nostro scopo ci limiteremo nel seguito a supporre P_0 sempre assegnato sopra la retta sinistra (s), costituente insieme con l'altre retta (r) la frontiera della striscia S, definita nel presente esempio da $|\,2x - 3y\,| \leqslant 3H$. Sarà dunque

$y_0 = 2x_0/3 + H$; inoltre sempre supporremo $\dot{x}_0 < 0$ ed $\dot{y}_0 = 0$. Si vede che in un intorno destro di $t = 0$ risulta $\dot{y}(t) < 0$ ed ha dunque inizio un moto a due gradi di libertà, retto dalle equazioni (25), ove si sostituiscano ad y_0 ed $\dot{y}_0$ i valori indicati.

In particolare t_1 sarà, come fu detto, la prima radice positiva dell'equazione:

$$\dot{y}(t) = \frac{1}{3}(1 - \cos t)\left[-\frac{8}{3}\, x_0 \operatorname{sen} t + 2\dot{x}_0(2\cos t + 1)\right] = 0 .$$

Si ricava:

$$\cos t_1 = -\left(16\, x_0^2 + 9\,\dot{x}_0^2 + 4\, x_0 \sqrt{16\, x_0^2 + 27\,\dot{x}_0^2}\right)/\left(16 x_0^2 + 18\,\dot{x}_0^2 + 4\, x_0 \sqrt{16\, x_0^2 + 27\,\dot{x}_0^2}\right),$$

$$\operatorname{sen} t_1 > 0 .$$

Se poniamo

$$q = \sqrt{4x^2 + (27/4)\dot{x}^2} + x, \qquad u = (q^2 + x^2)/q,$$

risulta:

$$\cos t_1 = -(1 + 3x_0/q_0)/2$$

e si ha, all'istante t_1,

$$\text{(26)} \qquad \begin{cases} x(t_1) = -(5x_0^2 + q_0^2)/(6q_0) \\ y(t_1) = H - u_0/3 \\ \dot{x}(t_1) = -\dot{x}_0\,(1 - 3x_0/q_0)/2 . \end{cases}$$

Supporremo ora che i dati iniziali indipendenti, cioè x_0 ed $\dot{x}_0$, soddisfino alla limitazione

$$\text{(27)} \qquad (q_0^2 - x_0^2)/q_0 < 9\, H .$$

La (27) traduce la condizione $|2\, x_1 - 3y_1| < 3H$, cioè obbliga il punto $P(t_1)$ a risultare interno alla striscia S. Ha dunque inizio un moto armonico, ad un sol grado di libertà, d'equazione

$$3\ddot{x} + 4x = 0,$$

la cui frequenza è compresa tra le frequenze proprie del moto a due gradi, in accordo con un noto teorema di RAYLEIGH.

Posto, come in (12), $A(t) = (3/2)\dot{x}^2 + 2x^2$, se $A(t_1)$ è sufficientemente grande, il punto $P(t)$ raggiunge e sorpassa la frontiera (r) in un punto $P_{(r)}$ ove ha daccapo inizio un moto a due gradi di libertà.

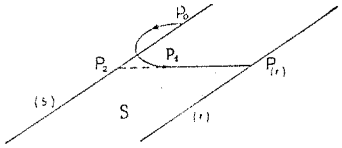

Fig. 3.

Diversamente il punto $P(t)$ s'arresta ed inverte il moto entro la striscia S; indi o raggiunge e sorpassa la frontiera (s) in un punto P_2, oppure rimane definitivamente entro S, nel qual caso concluderemo che è $\bar{t} = t_1$ finito. Perchè s'abbia ques'ultimo caso, in conformità alle (13), occorre e basta che risulti in t_1:

$$(28) \qquad |y(t_1)| \leqslant H, \qquad 2\,A(t_1) \leqslant 9[H - |y(t_1)|]^2.$$

Ci converrà ora porre

$$p = x/q = 2x/(\sqrt{16\,x^2 + 27\,\dot{x}^2} + 2x),$$

notando che risulta $-1 \leqslant p \leqslant 1/3$. Si ricava allora, dalle (26),

$$(29) \qquad A(t_1) = (1/9)\,u_0^2\,F(p_0),$$

ove con $F(p)$ si è indicata la seguente funzione razionale:

$$F(p) = -1 + 2(8p^2 - 2p + 1)/(p^2 + 1)^2.$$

Tale funzione $F(p)$ ha l'andamento indicato in figura. Si noti il massimo per $p = -(\sqrt{57} + 5)/16$, ove si ha $F_{\max} = 4{,}74217\ldots$; il minimo per $p = (\sqrt{57} - 5)/16$, e l'unica ascissa, da noi chiamata $-\alpha$, compresa tra l'ascissa di massimo e l'origine, ove risulta $F(-\alpha) = F(-1) = 9/2$.

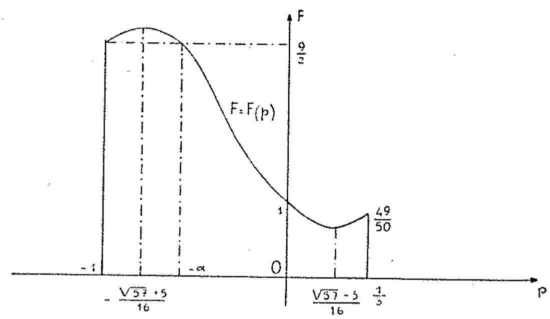

Fig. 4.

Tutto ciò premesso, è immediato verificare che, se i dati iniziali soddisfano alle condizioni

$$(30) \qquad -\alpha \leqslant p_0 < 1/3 \quad \text{cioè} \quad F(p_0) \leqslant 9/2, \qquad 0 < u_0 \leqslant 3H,$$

risultano verificate in t_1 le condizioni (27) e (28), e si ha così un esempio ove è $\bar{t} = t_1$ finito.

Infatti la (27) è abbondantemente soddisfatta, risultando addirittura

$$0 < (q_0^2 - x_0^2)/q_0 = u_0 - 2x_0^2/q_0 \leqslant 3H < 9H .$$

Si ha poi, dalle (26) e (30), $0 \leqslant y_1 = H - u_0/3 < H$, con che è provata la prima delle (28). Essendo quindi $H - |y_1| = u_0/3$, risulta, per la (29) e per essere $F(p_0) \leqslant 9/2$,

$$2\,A(t_1) = (2/9)u_0^2\,F(p_0) \leqslant u_0^2 = 9(H - |y_1|)^2,$$

ed è così dimostrata anche la seconda delle (28).

Naturalmente potrebbero darsi molti altri esempi di condizioni iniziali, per le quali risulti $\bar{t}$ finito, anche più generali delle precedenti, che consentono un sol tratto di moto a due gradi di libertà, nell'intervallo $0 \mapsto t_1$. Ma al nostro scopo riteniamo sufficiente il precedente e passiamo invece a dare un esempio di dati iniziali che comportino $\bar{t} = \infty$.

Questo accade se risulta:

$$(31) \qquad \begin{cases} -1 < p_0 < -\alpha \quad \text{cioè} \quad 9/2 < F(p_0) \leqslant F_{\max} < 4{,}75 \\ 0 < u_0 \leqslant 3H/\sqrt{(2/11)[F(p_0)+1]} . \end{cases}$$

Infatti dalla seconda delle (31) e per essere $F(p_0) > 9/2$, si deduce anzitutto $0 < u_0 < 3H$. Quindi, come nel caso precedente, risulta $0 < y_1 < H$ e di nuovo appare ampiamente soddisfatta la (27), che assicura l'inizio, all'istante t_1, di un moto armonico. Se questo proseguisse sino all'intersezione $P_{(r)}$ con la retta (r), risulterebbe:

$$(3/2)\dot{x}_{(r)}^2 + 2x_{(r)}^2 = A(t_1) = (1/9)u_0^2\,F(p_0) .$$

Avendosi $y_{(r)} = y_1$, l'ascissa $x_{(r)}$ si ricava dall'equazione della retta (r) e dalla seconda delle (26), ottenendosi successivamente:

$$\dot{x}_{(r)}^2 = \frac{2}{3}\left[\frac{1}{9}\,u_0^2\,F(p_0) - \frac{1}{2}\,(6\,H - u_0)^2\right],$$

e si può ormai constatare che, se p_0 ed u_0 soddisfano alle (31), si ha $\dot{x}^2_{(r)} < 0$. Ciò significa che, ammesse le (31), il punto $P(t)$ non riesce a raggiungere la retta (r): esso si arresta ed inverte il moto a sinistra di (r). Si ha invece ulteriormente un'intersezione $P(t_2)$ con la retta (s). Ivi risulta:

$$(32) \qquad \begin{cases} x(t_2) = -u_0/2, \qquad y(t_2) = y_1 = H - u_0/3, \\ \dot{x}(t_2) = -(1/9)u_0\sqrt{6\,F(p_0) - 27} < 0\,. \end{cases}$$

Ora mostreremo che i valori $x_2 = x(t_2)$ ed $\dot{x}_2 = \dot{x}(t_2)$ soddisfano a limitazioni del tutto analoghe alle (31), valide a lor volta per x_0 ed $\dot{x}_0$. A tale scopo, posto al solito

$$p_2 = x_2/q_2 = 2x_2/(\sqrt{16\,x_2^2 + 27\,\dot{x}_2^2} + 2x_2) < 0,$$

indi, sostituendo ad x_2 e $\dot{x}_2$ le corrispondenti espressioni (32) e ricordando che è $9/2 < F(p_0) < 4{,}75$, si trova anzitutto: $-1 < p_2 < -(\sqrt{57} + 5)/16 < -\alpha$, cioè p_2 soddisfa ad una limitazione analoga alla prima delle (31). Successivamente, posto al solito $u_2 = (q_2^2 + x_2^2)/q_2$ e notando che dalle (32) si ha $1/p_2 = q_2/x_2 = -\sqrt{2\,F(p_0) - 5} + 1$, si ricava:

$$u_2^2\,[F(p_2) + 1] = 2x_2^2\,[(p_2^2 + 1)/p_2]^2\,(8p_2^2 - 2p_2 + 1)/(p_2^2 + 1)^2 =$$

$$= (1/2)u_0^2(8 - 2q_2/x_2 + q_2^2/x_2^2) = u_0^2\,[F(p_0) + 1]\,.$$

Avendosi dunque $u_2\sqrt{F(p_2) + 1} = u_0\sqrt{F(p_0) + 1}$, si vede che le quantità p_2 ed u_2 soddisfano ad una limitazione del tutto analoga alla seconda delle (31), come si voleva dimostrare.

Dunque, a partire dall'istante t_2, si ha daccapo un tratto di moto a due gradi di libertà, indi un tratto di moto armonico, del tutto analogo al precedente e cioè fino all'intersezione $P(t_4)$ con la retta (s), ove daccapo le corrispondenti quantità p_4 ed u_4 rispettano limitazioni del tutto analoghe alle (31), e così via all'infinito.

Avendosi quindi $\bar{t} = \infty$, sarebbe ora facile calcolare alcuni limiti notevoli, ma preferiamo riprendere la questione in generale.

5. – Tornando alle (16) e (20) del n. **3**, mostriamo che « i valori dei limiti $\bar{y}$ ed $\bar{A}$ debbono soddisfare alle stesse diseguaglianze indicate in (13) per y_0 ed A_0 ».

Ciò è del tutto evidente, se $\bar{t}$ è finito, per quanto fu detto al n. **2**. Se invece è $\bar{t} = \infty$, proveremo più precisamente che risulta:

$$(33) \qquad |\bar{y}| \leqslant H, \qquad\qquad (34) \qquad 2\bar{A} = [(H - |\bar{y}|)/m]^2$$

(si noti la lieve variante per $2\bar{A}$, risultando ora $\bar{k} = 1$).

A tale scopo sono utili talune premesse.

a) Data l'evidente simmetria, sarà sufficiente discutere il caso $\bar{y} \geqslant 0$.

b) Senza ledere la generalità, in questo n. **5** supporremo $b_{11} = 1$ e dunque $b_{12} = m$; si tratta al più d'una modifica dell'unità di misura del tempo.

c) È da escludersi che, da un certo istante in poi, il punto $P(t)$ di coordinate $x(t)$, $y(t)$ si mantenga sempre e solo esterno alla striscia S. Se ad esempio, per $t \geqslant t'$, $P(t)$ rimanesse a sinistra della retta (s), ne seguirebbe, da (7) e (9), $\ddot{y} \leqslant \leqslant mx - y + H < 0$; cioè il segno di $\dot{y}$ si manterrebbe costante, o addirittura per $t > t'$, o per $t > t'' > t'$, se fosse $\dot{y}(t'') = 0$. Da quel certo istante, rispettivamente t' o t'', la funzione R definita dalla (9) sarebbe continua; conseguentemente, dal sistema (4) e (5), si ricaverebbe in particolare per $\dot{y}(t)$ l'espressione:

$$\dot{y}(t) = C_1 \cos(\sigma_1 t + \vartheta_1) + C_2 \cos(\sigma_2 t + \vartheta_2)$$

con C_1, C_2, σ_1, σ_2, ϑ_1, ϑ_2 costanti assegnate. Senonchè (sia per $|C_1| = |C_2|$, che per $|C_1| \neq |C_2|$) tale $\dot{y}(t)$ si annullerebbe ed invertirebbe il segno infinite volte, in contrasto alla precedente affermazione.

d) Se è $\bar{A} > 0$, le funzioni $x(t)$, $\dot{x}(t)$, almeno da un certo istante in poi, risultano oscillanti, intendendo con questo che esse si annullano ed invertono il segno infinite volte. Integrando infatti la (4) fra un valore t_0 che ci riserviamo di precisare e $t > t_0$, si ottiene:

$$x(t) = \sqrt{x_0^2 + \dot{x}_0^2}\cos[(t - t_0) + \varphi_0] - m\int_{t_0}^{t} \dot{y}(\tau)\cos(\tau - t)\,d\tau + m\dot{y}_0 \operatorname{sen}(t - t_0),$$

$$\dot{x}(t) = -\sqrt{x_0^2 + \dot{x}_0^2}\operatorname{sen}[(t - t_0) + \varphi_0] - m\int_{t_0}^{t} \dot{y}(\tau)\operatorname{sen}(\tau - t)\,d\tau +$$

$$+ m\dot{y}_0\cos(t - t_0) - m\,\dot{y}(t),$$

ove è $x_0 = x(t_0)$, $\dot{x}_0 = \dot{x}(t_0)$, mentre il significato di φ_0 è ovvio. A sua volta, ricordando il limite (20), nonchè il limite (17), nonchè l'esistenza dell'integrale improprio $\int_0^\infty |\dot{y}|\, dt$, potremo determinare t_0 in modo che, per $0 < \varepsilon < \overline{A}$, risulti:

$$2A_0 = \dot{x}_0^2 + \dot{x}_0^2 > 2(\overline{A} - \varepsilon) > 0,$$

$$m \left| \int_{t_0}^{t} \dot{y}(\tau) \cos(\tau - t)\, d\tau - \dot{y}_0 \operatorname{sen}(t - t_0) \right| < 2\sqrt{\overline{A} - \varepsilon},$$

$$m \left| \int_{t_0}^{t} \dot{y}(\tau) \operatorname{sen}(\tau - t)\, d\tau - \dot{y}_0 \cos(t - t_0) + \dot{y}(t) \right| < 2\sqrt{\overline{A} - \varepsilon},$$

con che è dimostrato, nell'intervallo $t_0 \leqslant t < \infty$, il carattere oscillante delle funzioni $x(t)$ ed $\dot{x}(t)$.

e) Dalle (6) e (9) rileviamo che è in ogni caso $\ddot{x} > 0$ a sinistra della retta (u) d'equazione $px - m(y - H) = 0$. Si noti che tale retta (u) interseca la (s) nel punto di coordinate $x = 0$, $y = H$; inoltre il coefficiente angolare della retta (u) è maggiore di quello della retta (s), avendosi per le (8): $p/m > m$.

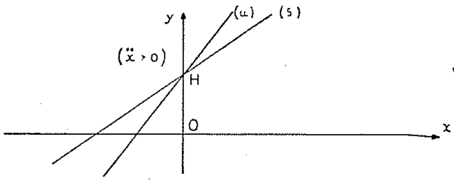

Fig. 5.

Supposto: $\overline{A} > 0$ ed essendo quindi, come si è visto in d), almeno per $t \geqslant t_0$, le due funzioni $x(t)$, $\dot{x}(t)$ oscillanti, sia τ_2 un generico istante successivo a t_0, ove si abbia: $x(\tau_2) < 0$ ed $\dot{x}(\tau_2) = 0$. Sarà dunque, per la (12), $x(\tau_2) = -\sqrt{2\,A(\tau_2)}$. Nel seguito ci interesserà soltanto il caso in cui la corrispondente posizione $P(\tau_2)$ sia sicuramente a sinistra della retta (u). Avendosi dunque $\dot{x}(\tau_2) = 0$ ed essendo, a sinistra della retta (u), $\ddot{x} > 0$, esisterà certo sull'asse t un intorno sinistro di τ_2 ove risulta $\dot{x}(t) < 0$. Nel seguito di questo n. **5** indicheremo sempre con τ_2 un istante ove siano soddisfatte le precedenti condizioni: $x(\tau_2) = -\sqrt{2\,A(\tau_2)} < 0$, $\dot{x}(\tau_2) = 0$ e $P(\tau_2)$ a sinistra della retta (u). Ci interesserà inoltre considerare un precedente istante $\tau_1 < \tau_2$, appartenente al suddetto intorno: sarà dunque $\dot{x}(t) < 0$ nell'intervallo $\tau_1 \leqslant t < \tau_2$. Questo sicuramente accade se il corrispondente punto $P(\tau_1)$ si trova a sinistra, o anche sulla retta (u).

f) Si ha dalle (4) e (12):

$$dA/dt = \dot{x}\,\ddot{x} + x\,\dot{x} = -m\dot{x}\,\ddot{y},$$

indi, tenendo conto della (7),

$$C\, dA/dt = -m\dot{x}\,(mx - y + R).$$

Da questa, integrando in un intervallo $\tau_1 \leqslant t \leqslant \tau_2$, ove, come fu detto in e), risulti $\dot{x} < 0$ e successivamente, applicando il teorema della media, indi ricordando la (9), si ottiene:

$$(35)\quad \begin{cases} C[A\tau_2) - A(\tau_1)] = -(m^2/2)(x_2^2 - x_1^2) + m\int_{\tau_1}^{\tau_2} y\,\dot{x}\,dt - m\int_{\tau_1}^{\tau_2} R\,\dot{x}\,dt \leqslant \\ \leqslant -(m^2/2)\,(x_2^2 - x_1^2) + m[y(\vartheta) - H](x_2 - x_1), \quad \text{con} \quad \tau_1 < \vartheta < \tau_2, \end{cases}$$

ove si è posto $x_1 = x(\tau_1)$ e $x_2 = x(\tau_2)$.

Tutto ciò premesso, passiamo alla dimostrazione della (33).

Supposto per assurdo $\overline{y} > H$, sia dapprima $\overline{A} > 0$. Prendiamo allora t_0 così grande, che per $t > t_0$:

1°) le funzioni $x(t)$, $\dot{x}(t)$ risultino oscillanti, come fu detto in d);

2°) sia $A(t) \geqslant A_\varepsilon > 0$;

3°) sia $y(t) \geqslant H_\varepsilon > H$.

Indi consideriamo tutte le infinite coppie di istanti successivi $\tau_2 > \tau_1 > t_0$, ove risulti

$$x(\tau_2) = -\sqrt{2\,A(\tau_2)} \leqslant -\sqrt{2\,A_\varepsilon} < 0, \qquad \dot{x}(\tau_2) = 0, \qquad x(\tau_1) = 0\,.$$

I due punti $P(\tau_1)$ e $P(\tau_2)$ sono entrambi, per la 3°), a sinistra della retta (u), e pertanto la (35) si scrive:

$$C[A(\tau_2) - A(\tau_1)] \leqslant -m^2\,A_\varepsilon - m(H_\varepsilon - H)\sqrt{2A_\varepsilon}\,.$$

Si vede dunque che la quantità $|\,A(\tau_2) - A(\tau_1)\,|$ non può ridursi piccola ad arbitrio; e ciò è in contrasto con il limite (20).

Se poi fosse $\overline{y} > H$ ed $\overline{A} = 0$, si avrebbe, per la stessa definizione (12) di $A(t)$, $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$ e quindi, da un certo istante, $P(t)$ si muoverebbe entro un rettangolo situato tutto a sinistra della retta (s): si è visto in c) che ciò è assurdo. La (33) è così dimostrata.

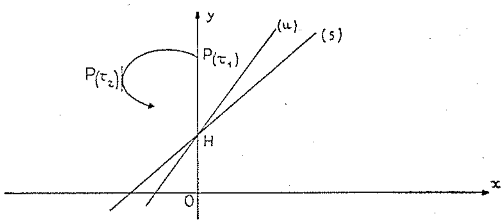

Fig. 6.

Passiamo ora alla dimostrazione della (34).
Sia dapprima $0 \leqslant \bar{y} < H$ e supponiamo per assurdo che si abbia:

$$2\bar{A} = \bar{q}^2[(H - \bar{y})/m]^2 \qquad \text{con} \quad \bar{q} > 1 .$$

Prendiamo allora t_0 così grande, che per $t > t_0$:

I) le funzioni $x(t)$, $\dot{x}(t)$ risultino oscillanti;

II) sia $y(t) < H$;

III) posto $2\,A(t) = q^2(t)[\{\,H - y(t)\,\}/m]^2$, sia $q(t) \geqslant q_\varepsilon > 1$.

Consideriamo quindi le infinite coppie di istanti successivi $\tau_2 > \tau_1 > t_0$, tali che s'abbia anzitutto $x_2 = x(\tau_2) < 0$ ed $\dot{x}(\tau_2) = 0$. Sarà dunque:

$$x_2 = -\sqrt{2\,A(\tau_2)} = -q(\tau_2)[H - y(\tau_2)]/m < -[H - y(\tau_2)]/m .$$

Ricordando l'equazione della retta (s), si vede che $P(\tau_2)$ si trova a sinistra di tale retta. Sia allora τ_1 l'istante corrispondente alla precedente intersezione di $P(t)$ con la stessa retta (s).

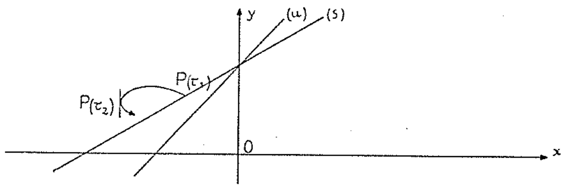

Fig. 7.

Tale intersezione $P(\tau_1)$ è a sua volta, per la II), a sinistra della retta (u), come il predetto punto $P(\tau_2)$ e sono soddisfatte, nell'intervallo $\tau_1 \mapsto \tau_2$ le condizioni richieste per scrivere la (35).
Avendosi: $x_1 = x(\tau_1) = -[H - y(\tau_1)]/m$, risulterà, per t_0 abbastanza grande,

$$m(x_2 - x_1) = -\bar{q}\,(H - \bar{y}) + (H - \bar{y}) + \varepsilon_1 = -(\bar{q} - 1)\,(H - \bar{y}) + \varepsilon_1 < 0,$$

$$m(x_2 + x_1) = -\bar{q}\,(H - \bar{y}) - (H - \bar{y}) + \varepsilon_2 = -(\bar{q} + 1)(H - \bar{y}) + \varepsilon_2 < 0,$$

e dunque la (35) si scrive:

$$C[A(\tau_2) - A(\tau_1)] \leqslant m(x_2 - x_1)\,[-(m(x_2 - x_1)/2 + y(\vartheta) - H] =$$

$$= -(\bar{q} - 1)\,(H - \bar{y})[(\bar{q} + 1)(H - \bar{y})/2 - (H - \bar{y})] + \varepsilon_3 =$$

$$= -(\bar{q} - 1)^2\,(H - \bar{y})^2/2 + \varepsilon_3 .$$

Potendosi ridurre ε_3 piccolo a piacere, non altrettanto si potrà fare per $|A(\tau_2) - A(\tau_1)|$; e ciò è daccapo in contrasto con il limite (20).

Mostreremo al n. **6** che, se è $\bar{t} = \infty$ ed $|\bar{y}| < H$, non può essere $2\bar{A} < [(H - |\bar{y}|)/m]^2$; diseguaglianza invece possibile, per quanto fu detto al n. **2**, se $\bar{t}$ è finito.

Se infine è $\bar{y} = H$, la (34) esige $\bar{A} = 0$.

Supposto infatti per assurdo $\bar{y} = H$ ed $\bar{A} > 0$, consideriamo, come prima, una delle posizioni $P(\tau_2)$, ove si abbia $x(\tau_2) = -\sqrt{2\,A(\tau_2)} \leqslant -\sqrt{2A_\varepsilon} < 0$.

Indichiamo questa volta con $P(\tau_1)$ la precedente intersezione di $P(t)$ con la linea continua costituita dalla semiretta (s) per $y \leqslant H$, e dalla semiretta (u) per $y > H$. Si ha rispettivamente:

$$m\,|x_1| = H - y(\tau_1) < \varepsilon_4, \qquad 0 < mx_1 = m^2[y(\tau_1) - H]/p < \varepsilon_5,$$

ove le quantità ε_4 ed ε_5 vanno ritenute piccole a piacere.

Ancora nell'intervallo $\tau_1 \mapsto \tau_2$ sono soddisfatte le condizioni richieste per la (35), la quale dunque si scrive:

$$C[A(\tau_2) - A(\tau_1)] \leqslant - m^2\,A_\varepsilon + \varepsilon_6,$$

ed è ancora in evidente contrasto con il limite (20), essendo ε_6 piccolo ad arbitrio.

6. – Vogliamo concludere con un teorema, la cui interpretazione meccanica pensiamo abbia qualche interesse.

S'è visto che, se $\bar{t}$ è finito, il movimento a due gradi di libertà ha durata finita: per $t \geqslant \bar{t}$ si ha $\dot{y}(t) \equiv 0$. Ne segue o la quiete totale, se è $\bar{A} = 0$, o un movimento ad un sol grado di libertà, con conservazione d'energia, se è $\bar{A} > 0$. Mostriamo che « se è $\bar{t} = \infty$ ed $\bar{A} > 0$, da un certo istante in poi si alternano senza interruzione tratti consecutivi di movimento a due e ad un sol grado di libertà. Inoltre, la durata del singolo tratto di moto a due gradi di libertà è infinitesima per $t \to \infty$ ».

A tale scopo osserviamo che il limite $\bar{E}$ della energia totale, tenendo conto delle (14) e (17), si scrive:

$$2\bar{E} = 2\bar{A} + \bar{y}^2,$$

ove, per la (33), è $|\bar{y}| \leqslant H$ e, per quanto fu provato al n. **5** circa la (34), è:

$$(36) \qquad 2\bar{A} = [(\bar{k}H - |\bar{y}|)/m]^2 \qquad \text{con} \qquad |\bar{y}|/H \leqslant \bar{k} \leqslant 1\,.$$

Ben presto proveremo che è $\bar{k} = 1$, completando così la dimostrazione della (34). Limitandoci qui e nel seguito a $\bar{y} \geqslant 0$, si avrà dunque:

$$2[E(t) - \bar{E}] = b_{11}\dot{x}^2 + x^2 + y^2 + \dot{y}(2b_{12}\dot{x} + b_{22}\dot{y}) - [(\bar{k}H - \bar{y})/m]^2 - \bar{y}^2,$$

che a sua volta, tenendo conto dei limiti (16) e (17), si potrà scrivere:

$$(37) \qquad 2[E(t) - \bar{E}] = b_{11}\dot{x}^2 + (mx - y + \bar{k}H)(mx + y - \bar{k}H)/m^2 + \varepsilon(t),$$

con $\varepsilon(t)$ infinitesimo per $t \to \infty$.

Si noti che per $y \leqslant \bar{k}M$ il prodotto $(mx - y + \bar{k}H)(mx + y - \bar{k}H)$ è positivo a sinistra della retta (s_k) e a destra della retta (s_k') indicate in figura.

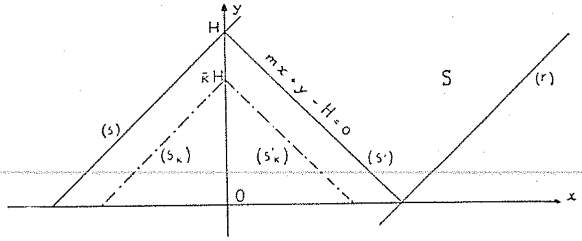

Fig. 8.

Sia dapprima $\bar{y} > 0$ e quindi, per $t > t_\varepsilon$, $y(t) \geqslant y_\varepsilon > 0$. La (37), ricordando il limite (18), afferma che, per $t > t_\varepsilon$,

A) il punto $P(t)$ non può trovarsi a destra della striscia S, per valori comunque grandi di t, ivi risultando $mx - y > H$ e quindi:

$$(mx - y + \bar{k}H)(mx + y - \bar{k}H) > 2H(1 + \bar{k})y_\varepsilon,$$

e non potendo allora il secondo membro della (37) ridursi piccolo a piacere;

B) se è $\bar{A} > 0$, cioè $\bar{y} < \bar{k}H$, nei tratti di movimento a sinistra della retta (s_k), le due quantità $\dot{x}^2(t)$ e $|mx - y + \bar{k}H|$ diventano infinitesime;

C) deve essere $\bar{k} = 1$. Ammesso infatti $\bar{k} < 1$, $\bar{A} > 0$, per quanto fu detto in A) e B) il punto $P(t)$ si manterrebbe da un certo istante non esterno ad S; e dunque dal prossimo zero di $\dot{y}(t)$, certo esistente come fu detto a conclusione del n. **5**,c), tenendo conto della definizione (9) e dell'equazione (7), si avrebbe $\dot{y}(t) \equiv 0$, in contrasto con l'ipotesi $\bar{t} = \infty$. Lo stesso accadrebbe per $\bar{k} < 1$, $\bar{A} = 0$, diventando allora infinitesima la x.

Detti allora t' gli istanti corrispondenti ad $\dot{y} = 0$, contati da quando il punto $P(t)$, come s'è detto in A), ha abbandonato per sempre la regione a destra di S, mostriamo che è impossibile che le rispettive posizioni $P(t')$ siano esclusivamente a sinistra di S, ov'è $\ddot{y} < 0$, oppure sulla frontiera (s), ma con $\dot{x}(t') < 0$.

Infatti se così fosse, a partire dal primo di tali istanti t', risulterebbe $\dot{y}(t) \leqslant 0$ ed allora, come appare dalla definizione (9), rimuovendo la discontinuità di

3ª specie, per $t = t'$, di $\dot y(t)/|\dot y(t)|$, la funzione R si presenterebbe ormai continua e quindi costante. Ma ciò è assurdo, come si è visto al n. **5**, c). Occorre dunque che qualche punto $P(t')$ si trovi entro la striscia S, o al più sulla frontiera (s), ma allora con $\dot x(t') \geq 0$.

Avrà quindi inizio un movimento ad un grado di libertà $[\dot y(t) \equiv 0]$; questo a sua volta dovrà essere interrotto, se si vuole $\bar t = \infty$ ed il punto $P(t)$ uscirà da S, attraversando la retta (s), ivi inoltre risultando $\dot x < 0$ e $\dot y = 0$. Ma a sinistra della retta (s) si ha $\ddot y < 0$, e dunque il prossimo zero di $\dot y$ dovrà necessariamente cadere a destra di (s), cioè entro la striscia S, dando luogo ad un successivo movimento ad un grado di libertà, e così via.

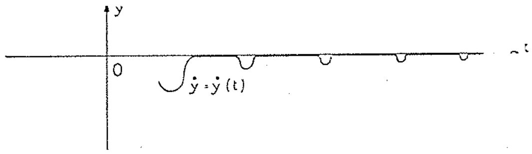

Fig. 9.

Si è dunque provato, almeno per $\bar y > 0$, un'altra proprietà: da un certo istante risulta $\dot y(t) \leq 0$, cioè $y(t)$ diventa funzione monotona non crescente.

Supposto infine $\bar y = 0$, ancora la (37), scritta ormai nella forma:

$$(38) \qquad 2[E(t) - \bar E] = b_{11}\,\dot x^2 + (x - \bar k\, H/m)(x + \bar k\, H/m) + \varepsilon_1(t),$$

ci dice che, limitatamente ai tratti di movimento esterni ad S, la $\dot x^2(t)$ diventa infinitesima, come pure il prodotto $(x - \bar k\, H/m)(x + \bar k\, H/m)$.

Segue anzitutto, ragionando come in C), che deve essere $\bar k = 1$. Volendo poi dimostrare che, da un certo istante, non possono aversi due zeri consecutivi di $\dot y$ corrispondenti a posizioni di $P(t)$ entrambe esterne ad S, ci può servire un altro integrale primo del nostro sistema.

Moltiplicando la (6) per $2\dot x$, la (7) per $2\dot y$ e sommando, si ha:

$$(39) \qquad \frac{d}{dt}\,[C(\dot x^2 + \dot y^2) + px^2 - 2mxy + y^2] + 2R(m\dot x - \dot y) = 0\,.$$

Detti t_1' e t_2' due zeri consecutivi di $\dot y$, supponiamo per assurdo che $P(t_1')$ sia a sinistra della retta (s) e $P(t_2')$ a destra di (r); sarebbe dunque, in $t_1' \mapsto t_2'$, $\dot y(t) < 0$ e quindi $R = H$. Integrando fra t_1' e t_2' la (39), si avrebbe allora:

$$C(\dot x_2^2 + \dot x_1^2) + p(x_2^2 - x_1^2) - 2m(x_2\, y_2 - x_1\, y_1) + \\ + y_2^2 - y_1^2 + 2H[m(x_2 - x_1) - (y_2 - y_1)] = 0,$$

da cui seguirebbe, per essere $\overline{y} = 0$ e per quanto fu detto dopo la (38), $2Hm(x_2 - x_1) + \varepsilon_2 = 0$ con ε_2 piccolo a piacere. Ma questo è assurdo, risultando nell'ipotesi precedente: $x_2 - x_1 > H/m$ almeno.

Proviamo infine che, se è $0 \leqslant \overline{y} < H$ cioè $\overline{A} > 0$, la durata del singolo movimento a due gradi di libertà è infinitesima per $t \to \infty$.

Sia $P(t_1)$ la posizione, sulla retta (s), corrispondente al termine d'un tratto di movimento a un grado di libertà e $P(t_2)$ quella corrispondente all'inizio del successivo. Fra t_1 e t_2 il movimento è a due gradi di libertà ($\dot{y} < 0$) e vogliamo provare che la quantità $t_2 - t_1$ è infinitesima. A tale scopo, integrando l'equazione (5) fra t_1 e t_2 si ha per la (9) e per il teorema della media:

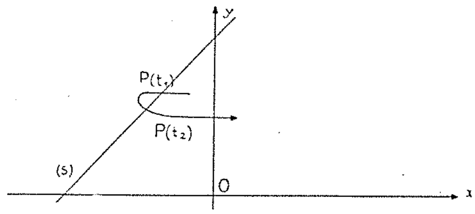

Fig. 10.

$$b_{12}(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) = -(y(\vartheta) - H)(t_2 - t_1), \qquad \text{con} \qquad t_1 < \vartheta < t_2,$$

ed essendo $\overline{y} < H$ ci basterà dimostrare che può ridursi piccola a piacere la quantità $\dot{x}_2 - \dot{x}_1$. Per quanto fu detto in B) e dopo la (38), sappiamo che ciò è vero per $|\dot{x}_1|$; mostriamo dunque che anche $|\dot{x}_2|$, al crescere del tempo, si riduce piccola ad arbitrio.

Richiamando il limite (20), sappiamo che la quantità

$$2[A(t_2) - A(t_1)] = b_{11}(\dot{x}_2^2 - \dot{x}_1^2) + x_2^2 - x_1^2$$

è infinitesima; dunque sarà sufficiente dimostrare che pure infinitesima è la differenza $x_2^2 - x_1^2$. Moltiplicando (7) per $\dot{x}$ ed integrando fra t_1 e t_2, si ottiene:

$$C\int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{d}{dt}(\dot{x}\,\dot{y}) - \ddot{x}\,y\right] dt = \int_{t_1}^{t_2}(mx - y + H)\dot{x}\,dt.$$

Segue, tenendo conto della (6),

$$\int_{t_1}^{t_2}[px - m(y - H)]\dot{y}\,dt = (m/2)(x_2^2 - x_1^2) + H(x_2 - x_1) - (x_2y_2 - x_1y_1) + \int_{t_1}^{t_2} x\dot{y}\,dt.$$

Gli integrali al primo e secondo membro sono infinitesimi, data l'esistenza di $\int_0^\infty |\dot{y}|\,dt$ ed essendo limitate, per la (21), le quantità $px - my$ ed x. Dunque anche il prodotto

$$(x_2 - x_1)[(m/2)(x_2 + x_1) - (\overline{y} - H)]$$

appare infinitesimo; che è quanto si voleva dimostrare, se si nota che, appartenendo il punto $P(t_1)$ alla retta (s) ed ancora tenendo conto del limite (16), affermare che l'uno o l'altro dei due fattori è infinitesimo è del tutto equivalente.

Lo stesso accadrebbe se, per $\bar{y} = 0$, ripetessimo il ragionamento dalla parte della retta (r).

Sunto.

La presenza dell'attrito introduce dei termini discontinui nelle equazioni differenziali di movimento. Si esamina il semplice caso delle piccole oscillazioni d'un sistema meccanico a due gradi di libertà, quando l'attrito intervenga sopra una sola delle coordinate.