Riv. Mat. Univ. Parma 10 (1959), 211-247

GIANFRANCO CAPRIZ (*)

Questioni di stabilità in Meccanica. (**)

1. - Premessa.

Raccolgo qui gli argomenti di alcune lezioni sulla stabilità in meccanica (in ispecie nella meccanica dei sistemi elastici), lezioni tenute durante l'Anno Accademico 1958-59 presso l'Istituto di Matematica della Università di Parma [1].

Non è, naturalmente, possibile in poche lezioni neppure di far cenno alle tante questioni connesse col concetto di stabilità; sicchè inevitabile è una scelta, dettata da preferenze personali. Qui si discute principalmente delle difficoltà che incontra una definizione generale e soddisfacente di stabilità e delle critiche che recentemente sono state sollevate a metodi di uso corrente nella determinazione di carichi critici. Nel preparare le lezioni per la stampa s'è sentita la necessità di riordinare in parte la materia, di aggiungere vari complementi e di dare qualche riferimento bibliografico.

Nei trattati dedicati allo studio dei fenomeni di instabilità in meccanica — in particolare nella meccanica dei sistemi continui — [2] il concetto fondamentale di stabilità è di solito illustrato con esempi; e il lettore che cerchi di costruire

---

(*) Indirizzo: Nelson Research Laboratories, Stafford, England.

(**) Ricevuto il 16-XI-1959.

(1) Ringrazio vivamente la Redazione della « Rivista di Matematica della Università di Parma » di averne suggerita la pubblicazione.

(2) Ad esempio: S. TIMOSHENKO, *Theory of Elastic Stability*, Mc Graw-Hill, New York 1936; A. PFLÜGER, *Stabilitätsprobleme der Elastostatik*, J. Springer, Berlin 1950; L. STABILINI, *Introduzione alla teoria della stabilità dell'equilibrio elastico*, C. Tamburini, Milano 1951; O. BELLUZZI, *Nozioni sulla stabilità dell'equilibrio elastico*, N. Zanichelli, Bologna 1951; Y. ROCARD, *L'instabilité en Mécanique*, Masson, Paris 1954; V. V. BOLOTIN, *Stabilità dinamica di sistemi elastici*, Gostekhizdat, Mosca 1956.

una definizione generale e rigorosa del termine « a posteriori » non può non trovarsi in imbarazzo; sembra che quasi ogni problema ne richieda una « ad hoc ». Che se poi egli tentasse di estrarre una definizione soddisfacente per tutti i campi della matematica applicata il compito apparirebbe francamente impossibile: certo si parla di instabilità in presenza di un risultato inatteso, o, comunque, fuori proporzione. Ad esempio si dicono instabili alcuni metodi di integrazione numerica approssimata di equazioni differenziali ordinarie (3) o alle derivate parziali (4), e la dizione è senza dubbio felice. Ma a voler teorizzare in termini così generali si finirebbe collo specificare troppo poco.

Molti fenomeni di instabilità possono essere caratterizzati come *paradossi di simmetria* (5), come fenomeni cioè nei quali « una apparente simmetria di cause non è conservata negli effetti » (loc. cit. in annotazione (5), pag. 5). Si potrebbe anche dire invece, da un punto di vista un po' diverso, fenomeni nei quali la simmetria delle cause non è apparentemente conservata negli effetti. Si prenda l'esempio classico dello svergolamento di una trave soggetta a carico di punta. Può apparire assurdo a prima vista che, in condizioni di perfetta simmetria assiale, possano esistere configurazioni di equilibrio diverse dalla banale e ciò come apparente conseguenza del principio logico che vuole: cause invarianti rispetto ad un certo gruppo di trasformazioni inducono effetti invarianti rispetto allo stesso gruppo. Il paradosso nasce dall'aver inconsciamente associato al principio logico ora accennato un criterio di unicità. Se una causa, invariante rispetto ad un gruppo di trasformazioni, può produrre più di un effetto, per rispettare il principio logico basta che la classe degli effetti (e non ciascuno di essi) sia invariante rispetto allo stesso gruppo.

Considerazioni di questo tipo, per quanto attraenti, non possono condurre a precise definizioni. Più fruttuoso si rivela il tentativo di riattaccare i criteri di stabilità che a noi interessano nella meccanica dei sistemi continui agli analoghi, ormai classici, che intervengono nello studio della dinamica dei sistemi di punti materiali e di corpi rigidi. Ma anche tale riattacco non è senza difficoltà.

Ad un esame delle questioni accennate è, come si è detto, dedicata questa raccolta di lezioni. Con esempi vengono illustrati via via il significato ed i limiti delle differenti precisazioni del concetto di stabilità; gli esempi sono classici, ma di essi s'è sempre cercato di mettere in luce gli aspetti meno usuali.

---

(3) Si veda: H. RUTISHAUSER, *Über die Instabilität von Methoden zur Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen*, Z. Angew. Math. Phys. 3 (1952), 65-74.

(4) Si veda ad esempio: R. D. RICHTMYER, *Difference Methods for Initial Value Problems*, Tracts in Applied Mathematics, n. 4, Interscience Publ., New York 1954.

(5) Secondo la dizione introdotta da G. BIRKHOFF in *Hydrodynamics, a Study in Logic, Fact and Similitude*, Princeton University Press, 1950.

2. - La stabilità della trave soggetta a carico di punta.

Nell'avviarci ad illustrare alcuni aspetti del concetto di stabilità meccanica non possiamo evitare un riferimento al problema della trave caricata di punta, e non solo per la sua importanza storica: la sua discussione offre agevolmente lo spunto per successive, più generali considerazioni. Ci converrà anzi qui andare al di là del doveroso cenno e richiamare con qualche dettaglio come si giunga al teorema euleriano: *Nisi ergo onus gestandum P majus sit quam E $(\pi\pi kk)/aa$, nulla prorsus incurvatio erit metuenda; contra vero, si pondus P fuerit majus, columna incurvationi resistere non poterit* (6).

Si prende in esame una trave perfettamente elastica $\mathfrak{T}$, che si suppone sia costituita da un materiale omogeneo ed isotropo ed abbia la forma di un cilindro circolare retto nella configurazione di riferimento $\mathfrak{T}_*$. Si suppone anche che $\mathfrak{T}$ sia incastrata in corrispondenza ad una delle basi (che chiameremo anche *sezione normale* α_A di baricentro A), e soggetta all'altra (sezione normale α_B di baricentro B) ad una sollecitazione equivalente ad una forza orientata come $B_* A_*$ (7) e di intensità R, applicata a B.

Lo schema nel quale si intende studiare il comportamento della trave è la *lamina elastica* di D. BERNOULLI ed EULERO (8). Si indica con a il coefficiente di rigidità a flessione della trave e se ne considera infinita la resistenza a compressione. La lunghezza L della direttrice l di $\mathfrak{T}$ va di conseguenza intesa invariabile e l'ascissa s, contata su l a partire da A, può essere assunta come variabile lagrangiana atta ad individuare i punti di $\mathfrak{T}$ appartenenti ad l.

Ci si limita anche a considerare deformazioni di $\mathfrak{T}$ nelle quali l non esce da un piano passante per $A_* B_*$, piano che sarà riferito ad un sistema di assi ortogonali (O, x_1, x_2). Converrà anzi supporre che il semiasse positivo delle x_1 contenga il segmento $A_* B_*$ ed O coincida con A_*.

Se si indica allora con $\theta(s)$ l'angolo che la tangente ad l (orientata nel verso delle s crescenti) forma con la direzione positiva dell'asse x_1, il momento flettente scalare in corrispondenza alla generica sezione normale α di $\mathfrak{T}$, è dato, con ovvia convenzione di segno, da $-a \cdot d\theta/ds$, e la seconda equazione cardi-

(6) L. EULER, *Additamentum* I « *De curvis elasticis* » nel *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes, sive solutio problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti*. Lausannae MDCCXLIV [= Opera Omnia, Series Prima, vol. XXIV, Bernae, MCMLII]. Noi seguiamo però qui la trattazione dovuta a L. SAALSCHUTZ. Si veda il volume *Der belastete Stat*, Leipzig 1880.

(7) Le lettere con asterisco indicano sistematicamente elementi relativi alla configurazione di riferimento.

(8) Si veda ad esempio: A. E. H. LOVE, *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, Capp. XVIII e XIX della 4a edizione. Questo autore indica lo schema in questione semplicemente col nome di *elastica*.

nale della statica, applicata al generico troncone di $\mathfrak{T}$ compreso tra le sezioni α_A ed α, si esaurisce nella equazione differenziale in $\theta(s)$:

$$a\,\frac{d^2\theta}{ds^2}+R\,\sin\theta=0\,, \tag{2.1}$$

completata dalla condizione

$$\left(\frac{d\theta}{ds}\right)_{s=L}=0\,. \tag{2.2}$$

Le (2.1), (2.2) vanno accompagnate da una seconda condizione al contorno, precisamente dalla

$$\theta(0)=0\,, \tag{2.3}$$

corrispondente alla ipotesi di incastro in A.

Le equazioni (2.1), (2.2), (2.3) ammettono in ogni caso una soluzione banale: $\theta\equiv 0$; ma in problemi di elastostatica non lineari, come quello che qui si studia, l'unicità della soluzione non è sempre assicurata. Anzi qui è proprio la esistenza di soluzioni non banali che riflette la fondamentale circostanza: una trave soggetta a carico di punta può essere flessa purchè il carico R superi un certo valore critico. D'altra parte il cedimento a flessione — o, come si usa dire, lo *svergolamento* — di una trave può causare il crollo di una struttura; dunque la struttura è *instabile* sotto un carico capace di flettere un suo membro sollecitato di punta.

Dal punto di vista analitico il nostro speciale problema di stabilità si traduce così in quello della ricerca di soluzioni non identicamente nulle del problema ai limiti (2.1), (2.2), (2.3) ed in ispecie in quello della ricerca dell'estremo inferiore R_c dei valori di R per i quali è assicurata l'esistenza di tali soluzioni. Ora le (2.1), (2.2), (2.3) sono esattamente equivalenti alla equazione

$$a\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2=R\left(1-\sin^2\frac{\alpha}{2}\,\sin^2\varphi\right), \tag{2.4}$$

dove s'è posto $\alpha=\theta(L)$ e s'è introdotta la nuova variabile φ legata biunivocamente a θ $(-\pi<\theta<\pi)$ dalla relazione

$$\sin\varphi=\frac{\sin(\theta/2)}{|\sin(\alpha/2)|}\,.$$

L'integrazione della equazione (2.4) richiede una certa cautela: non va escluso che la direttrice della trave presenti inflessioni, e quindi che $d\varphi/ds$ cambi segno. Ma in definitiva si è sempre ricondotti alla

$$\sin\frac{\theta}{2} = \sin\frac{\alpha}{2} \quad \mathrm{sn}\left(s\sqrt{\frac{R}{a}}, \left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|\right).$$

Per il significato che s'è attribuito ad α, rimane ancora da soddisfare una condizione di compatibilità

$$\mathrm{sn}\left(L\sqrt{\frac{R}{a}}, \left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|\right) = 1,$$

se α non è nullo, cioè se prescindiamo dalla soluzione banale; ora il minimo valore di $L\sqrt{R/a}$ per cui questa relazione è soddisfatta è un quarto del periodo reale $K(|\sin(\alpha/2)|)$ della funzione seno-amplitudine. Soluzioni non banali delle (2.1), (2.2), (2.3) esistono purchè

$$R = \frac{a}{L^2}\left[K\left(\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|\right)\right]^2;$$

d'altra parte, comunque si scelga α, $K(|\sin(\alpha/2)|)$ non scende mai al di sotto di $\pi/2$, raggiunge tale valore solo per $\alpha = 0$, e cresce all'infinito quando il modulo di α cresce da zero a π. Concludiamo: condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza di soluzioni non banali del problema (2.1), (2.2), (2.3) è che R ecceda il *valore critico*

$$R_c = \frac{\pi^2}{4L^2}\, a.$$

Come si disse, la circostanza matematica della non unicità riflette il fenomeno fisico dello svergolamento della trave.

Il caso speciale ora studiato suggerisce un generale criterio di stabilità che diremo *euleriano*: *Una configurazione d'equilibrio di un sistema meccanico sotto carico si ritiene stabile se essa è unica*, sicchè sono esclusi fenomeni di svergolamento (o gli analoghi fenomeni di sbandamento). Un tale criterio è stato sostanzialmente accettato in passato per la sua provata efficacia in tante applicazioni, per quanto esso sia insoddisfacente da un più generale punto di vista logico (⁹). Ma ormai difficoltà si sono presentate anche nello studio di questioni

---

(9) Come giudicare, ad esempio, nel caso speciale qui ricordato, ciascuna delle configurazioni di equilibrio esistenti per carichi superiori a quello critico?

tecniche. Infatti, come potremo mostrare in un caso speciale fin dal prossimo n. **4**, la instabilità di una struttura non è collegata esclusivamente con fenomeni di svergolamento e sbandamento; di conseguenza il concetto di stabilità deve essere precisato e ristretto, perchè si adegui alla grande varietà delle circostanze fisiche. Noi non vogliamo però passare qui subito ad una critica del criterio euleriano. Preferiamo metter dapprima in luce alcuni curiosi aspetti del problema matematico studiato in questo n. **2**; nel caso speciale si riflettono infatti difficoltà inevitabilmente presenti nella trattazione di ogni problema di stabilità.

3. - Conseguenze della linearizzazione nel problema dello svergolamento di una trave caricata di punta.

Il problema dello svergolamento di una trave caricata di punta viene di solito trattato partendo, anzichè dalla equazione (2.1), dalla corrispondente equazione *linearizzata*

$$a \frac{\mathrm{d}^2 \theta}{\mathrm{d}s^2} + R\,\theta = 0; \tag{3.1}$$

dalla equazione cioè che si ottiene pensando θ tanto piccolo da confondersi col suo seno. La soluzione del problema (3.1), (2.2), (2.3) è del tutto elementare e coinvolge solo funzioni trigonometriche; essa porta a concludere che soluzioni non banali esistono solamente quando R coincide con uno dei valori critici

$$(2n+1)^2 \frac{\pi^2}{4L^2}\, a \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{3.2}$$

ed allora ne esistono infinite. Se ne dovrebbe dunque dedurre che configurazioni inflesse della trave esistono solo quando il carico assume uno dei valori (3.2). C'è quindi in apparenza un netto contrasto coi risultati del precedente n. **2**; tale contrasto può tuttavia essere chiaramente risolto non appena si imposti su basi meno vaghe il processo di linearizzazione [10].

[10] Le considerazioni che seguono sono tratte dalla Nota: *Alcune osservazioni su problemi di instabilità delle travi elastiche*, Rend. Mat. Appl. Roma (5) **16** (1957), 23-42. Esse derivano da uno spontaneo adattamento del metodo dei sistemi ausiliari successivi, dovuto al Prof. A. SIGNORINI ed esposto per la prima volta nella Memoria: *Trasformazioni termoelastiche finite, caratteristiche dei sistemi differenziali, onde di discontinuità, in particolare onde d'urto e teoria degli esplosivi*, Atti S.I.P.S. (24ª Riunione) **3** (1935), 3-22.

Allo scopo conviene procedere così: conviene pensare il carico R come una funzione analitica di un parametro λ scelta in modo che a $\lambda = 0$ corrisponda il valore critico R_c di R, ed a valori non nulli (reali) di λ corrispondano valori di R maggiori di R_c; pensare poi θ anch'essa come funzione di λ (oltre che di s) ed infine sviluppare θ in serie di potenze di λ coll'intento di determinare separatamente i vari termini dello sviluppo. Il primo termine basterà a descrivere le piccole deformazioni di $\mathfrak{S}$ a partire dalla configurazione banale.

Quando si usi la notazione

$$\theta^{(n)}(s) = \left[\frac{\partial^n \theta}{\partial \lambda^n}\right]_{\lambda=0},$$

e si introduca lo sviluppo

$$\theta(s, \lambda) = \sum_{1}^{\infty}{}_n\, \theta^{(n)}(s)\, \frac{\lambda^n}{n!}$$

nelle (2.1), (2.2), (2.3), si ottiene innanzitutto che $\theta^{(1)}(s)$ deve soddisfare alla equazione

$$a\, \frac{\mathrm{d}^2\, \theta^{(1)}}{\mathrm{d}s^2} + R_c\, \theta^{(1)} = 0$$

ed alle condizioni al contorno (2.2), (2.3); sicchè R_c deve coincidere con uno dei valori (3.2) e $\theta^{(1)}$ è data da

$$\theta^{(1)}(s) = \alpha\, \sin(\sqrt{R_c/a}\; s),$$

dove interviene il fattore per ora indeterminato α. Ma poi si trova anche che le equazioni a cui deve soddisfare $\theta^{(3)}$ sono soggette a condizioni di compatibilità: tali condizioni prescrivono proprio la scelta

$$\alpha = \pm 2 \sqrt{\frac{1}{R_c}\left(\frac{\mathrm{d}^2 R}{\mathrm{d}\lambda^2}\right)_{\lambda=0}}, \tag{3.3}$$

come si poteva prevedere in base ai risultati del n. **2** [11].

---

[11] Per i dettagli dei calcoli, del resto elementari, si può vedere la Nota citata nell'annotazione [10].

Insomma lo studio del problema in prima approssimazione lascia aperte lacune tanto gravi da suggerire false conclusioni. Difficoltà di questo tipo possono presentarsi, sebbene raramente, anche in problemi ordinari di equilibrio elastico [anzi è proprio in tale campo che furono per la prima volta messe in rilievo dal Prof. SIGNORINI ([12])]; ma il loro intervento sembra sia sistematico in problemi di stabilità ([13]).

Il *metodo dei sistemi ausiliari successivi* di cui si è fatto uso sopra permette anche di interpretare soddisfacentemente il significato di scelte di α diverse da quella prescritta dalla (3.3): esse conducono alla descrizione di fenomeni dinamici nei quali le forze d'inerzia sono infinitesime del terzo ordine ([14]).

4. - Casi di instabilità per «impossibilità dell'equilibrio».

Che il criterio euleriano, per quanto utile in molti casi [e si vedano in proposito i volumi citati in annotazione ([2])], non possa essere adatto a giudicare della stabilità di una struttura è posto in evidenza da un esempio molto semplice. Si consideri un arco a tre cerniere simmetrico molto ribassato, formato da due aste cilindriche molto robuste di lunghezza L e sezione normale A, inclinate sulla orizzontale di un angolo α piccolo; si pensi l'arco soggetto nella cerniera centrale ad una forza verticale orientata verso il basso e di intensità $2F$. La «piccolezza» di α e la «robustezza» delle aste vanno intese in questo senso: nelle condizioni prese in esame nel seguito l'instabilità delle due aste per svergolamento o sbandamento va esclusa; il carico causa semplicemente una compressione elastica delle due aste.

Detta $2D$ la distanza invariabile tra le due cerniere estreme, θ l'angolo formato sotto carico dalle sbarre colla orizzontale ed ε l'accorciamento (negativo

---

([12]) Nella Memoria citata alla annotazione ([10]) ed in alcune successive. Si vedano, ad esempio, le Memorie:

A. SIGNORINI, *Trasformazioni termoelastiche finite* (Memoria 2ª), Ann. Mat. Pura Appl. (4) **30** (1949), 1-72.

A. SIGNORINI, *Trasformazioni termoelastiche finite* (Memoria 3ª: *Solidi incomprimibili*), Ann. Mat. Pura Appl. (4) **39** (1955), 147-201.

([13]) Si veda la Nota citata in annotazione ([10]) ed anche le seguenti: *Alcune osservazioni sulla instabilità di una trave sollecitata a torsione*, Riv. Mat. Univ. Parma **8** (1957), 145-160; *A proposito di una classificazione dei problemi di stabilità elastica*, Riv. Mat. Univ. Parma **8** (1957), 371-374.

([14]) Si veda la Nota: *Sui casi di «incompatibilità» tra l'elastostatica classica e la teoria delle deformazioni elastiche finite*, Riv. Mat. Univ. Parma **10** (1959), 119-129.

se le sbarre sono allungate), posto anche per brevità $B = AE/L$ (E modulo di elasticità), condizioni geometriche e d'equilibrio prescrivono

$$\sin\theta = F/(B\varepsilon), \qquad \cos\theta = D/(L-\varepsilon); \tag{4.1}$$

equazioni (da intendersi valide per valori positivi o negativi di ε e θ) che hanno per conseguenza

$$F = M(\varepsilon) = B\,|\,\varepsilon\,|\sqrt{1-\{D^2/(L-\varepsilon)^2\}}\,. \tag{4.2}$$

$M(\varepsilon)$ come funzione reale e positiva di ε è definita nell'intervallo $(-\infty, L-D)$, è decrescente mentre ε cresce da $-\infty$ a 0, ha un punto angoloso nell'origine, quindi cresce fino al valore

$$F_c = B\,(L^{2/3} - D^{2/3})^{3/2} \qquad \text{per} \qquad \varepsilon = \varepsilon_c = L - D^{2/3}\,L^{1/3}, \tag{4.3}$$

per decrescere infine a zero nell'estremo destro dell'intervallo di definizione. La relazione tra θ ed ε è precisata dalla equazione

$$\theta = \Phi(\varepsilon) = \operatorname{arc\,sin}\sqrt{1-\{D^2/(L-\varepsilon)^2\}}\cdot\operatorname{sign}\varepsilon; \tag{4.4}$$

$\Phi(\varepsilon)$ cresce da $-\pi/2$ a $-\alpha$ quando ε cresce da $-\infty$ a 0, e decresce da α a 0 quando ε cresce da 0 ad $L-D$; c'è una discontinuità, da $-\alpha$ ad α, nell'origine.

L'interpretazione di questi risultati è immediata. Innanzitutto in una qualunque condizione di carico, esiste una ovvia configurazione di equilibrio ad arco « rovescio » (cioè a sbarre allungate, ε negativo); di più, se $F < F_c$, esistono due altre configurazioni a sbarre compresse. Se si immagina di caricare l'arco con continuità gradualmente aumentando F dal valore zero, a partire dalla configurazione naturale con $\theta = \alpha$, ε cresce con F finchè si giunge al *carico critico* F_c; per $F > F_c$ configurazioni di equilibrio con ε positivo non sono possibili; l'arco deve cedere improvvisamente per portarsi nell'intorno dell'unica configurazione d'equilibrio consentita a sbarre allungate.

Siamo di fronte ad un fenomeno di instabilità; ma in questo caso la configurazione di equilibrio è unica per carichi superiori a quello critico. L'intuizione fisica suggerisce poi che delle tre configurazioni permesse per $F < F_c$ due sono stabili e la terza instabile; e qui potremmo essere condotti fuori strada se, per assurdo, ci volessimo basare soltanto su quanto verrebbe suggerito dal criterio euleriano e dalle presenti circostanze matematiche. La osservazione si fa qui solo per additare un pericolo di conclusioni errate in casi più complessi in cui l'ausilio della intuizione fisica viene a mancare.

Nei casi simili a quello qui illustrato si usa dire che l'instabilità si presenta per *impossibilità dell'equilibrio* (15). È il tipo di instabilità che si presenta negli archi e nelle volte molto ribassate (volte di ZEISS-DJWIDAGG) e nei tubi sollecitati a flessione (16) (in quest'ultimo caso si parla anche di *instabilità per ovalizzazione*). È probabile che, almeno in un certo senso, si possano far rientrare in questa categoria gli esempi che il prof. SIGNORINI ha ideato come casi di « incompatibilità » tra la teoria linearizzata e quella non lineare della elasticità (17); essi andrebbero allora anche intesi come casi di instabilità a carico critico nullo.

Vogliamo qui infine osservare che uno studio, fatto nell'ambito lineare, del comportamento dell'arco nell'intorno della configurazione critica sarebbe in parte ingannevole. Procediamo infatti in analogia a quanto scritto nel n. **3**: poniamo cioè $F = F_c + \lambda^2 f$ (f quantità positiva, λ parametro reale), $\theta = \theta_c + \lambda\, \theta^{(1)} + \ldots$, $\varepsilon = \varepsilon_c + \lambda\, \varepsilon^{(1)} + \ldots$, intedendo per F_c, θ_c, ε_c i valori critici di F, θ, ε (che non è necessario di conoscere in partenza). Sostituiamo poi gli sviluppi nelle (4.1), ed andiamo a determinare $\theta^{(1)}$ ed $\varepsilon^{(1)}$; essi devono soddisfare le equazioni

$$\theta^{(1)} = -\frac{F_c}{B\ \varepsilon_c^2 \cos\theta_c}\,\varepsilon^{(1)}, \qquad \theta^{(1)} = -\frac{D}{(L-\varepsilon_c)^2 \sin\theta_c}\,\varepsilon^{(1)}, \tag{4.5}$$

per la cui compatibilità deve essere

$$\mathrm{tg}\theta_c = \frac{DB\ \varepsilon_c^2}{F_c\cdot(L-\varepsilon_c)^2}\,.$$

Questa relazione determina esattamente il valore del carico critico; ma poi le (4.5) condizionano la scelta di $\theta^{(1)}$ in conseguenza di quella di $\varepsilon^{(1)}$, scelta quest'ultima che rimane completamente libera. Si ha qui insomma una indeterminazione simile a quella rilevata nel n. **3** in riguardo al problema dello svergolamento della trave caricata di punta; indeterminazione che qui nasconde

---

(15) Si veda ad esempio il paragrafo 4 della Memoria: L. STABILINI, *Instabilitätsprobleme im Stahlbau*, Bauingenieur **33** (1958), 213-220.

(16) O. BELLUZZI, *Sulla stabilità dell'equilibrio delle volte di Zeiss e Djwidagg*, Ricerche Ingegneria, 1935.

O. BELLUZZI, *Un caso di instabilità per ovalizzazione nei tubi sollecitati a flessione*, Ricerche Ingegneria, 1935.

G. KRALL, *Stabilità dell'equilibrio elastico*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) **29** (1949), 75-90.

(17) Si rimanda ancora alle Memorie citate nella annotazione (12) ed anche alla Nota di cui alla annotazione (14).

però un comportamento diverso dalla struttura. Una precisazione delle circostanze meccaniche non si può avere se non si procede direttamente ad una analisi non lineare od almeno allo studio delle approssimazioni di ordine superiore. L'imporre ad esempio la condizione di equilibrio in seconda approssimazione conduce ad un assurdo se f non è nulla; alternativamente l'uso in seconda approssimazione delle equazioni dinamiche mette in luce che dalle configurazioni individuate in prima approssimazione dalle (4.5) si inizia un moto nel quale le componenti dell'accelerazione sono infinitesime (rispetto a λ) del secondo ordine.

I due casi di instabilità esaminati finora hanno in comune le seguenti circostanze: *esiste una configurazione critica a partire dalla quale un incremento dei carichi, infinitesimo del secondo ordine, produce effetti del primo ordine; lo studio di questi effetti nella approssimazione lineare non ne può mettere in luce l'esatta natura.*

5. - La stabilità dell'equilibrio dal punto di vista energetico.

Le circostanze che si presentano nell'esempio discusso nel precedente n. **4** e negli esempi ivi citati [18] fanno riaprire la questione del come giudicare della stabilità di una struttura. È inevitabile un ricorso alla intuizione fisica? Ci proponiamo di far vedere in questo n. **5** che un criterio soddisfacente si può ottenere quando si imposti la discussione del problema di stabilità su basi energetiche.

Ricominciamo dunque col mettere su tali basi la discussione del problema dello svergolamento della trave caricata di punta. La funzione $\theta(s)$ che soddisfa alle equazioni (2.1), (2.2), (2.3) rende stazionario l'integrale (energia totale della trave)

$$E(\theta) = \int_0^L \left[\frac{a}{2}\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}\right)^2 - R\,(1 - \cos\theta)\right] \mathrm{d}s \tag{5.1}$$

nella classe delle funzioni definite nell'intervallo $(0, L)$ (e ivi continue, derivabili, ecc.) e nulle nel suo estremo sinistro. Questa circostanza non è che il riflesso molto speciale di una ben nota proprietà generale: per un sistema elastico, se le forze esterne dipendono da un potenziale, le equazioni di equilibrio sono le euleriane del funzionale energia potenziale totale.

---

[18] E di altri che si potrebbero citare. Si veda ad esempio il caso studiato nella seconda Nota a cui si fa riferimento nella annotazione [13].

Consideriamo ora in maggior dettaglio le proprietà del funzionale (5.1). Precisamente calcoliamo esplicitamente la sua variazione nell'intorno di una generica funzione $\bar{\theta}(s)$. Converrà scrivere una funzione appartenente all'intorno di $\bar{\theta}$ nella forma $\theta = \bar{\theta} + \lambda\varphi$ (dove φ è essa pure una generica funzione regolare di s, e λ è un parametro). Si ha di conseguenza:

$$
(5.2)\quad \left\{
\begin{aligned}
& E(\bar{\theta} + \lambda\varphi) - E(\bar{\theta}) = \\
& = \lambda \int_0^L \left\{ a \frac{\mathrm{d}\bar{\theta}}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s} - R \sin\bar{\theta}\cdot\varphi \right\} \mathrm{d}s + \frac{\lambda^2}{2} \int_0^L \left\{ a \left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s}\right)^2 - R\cos\bar{\theta}\cdot\varphi^2 \right\} \mathrm{d}s + \ldots = \\
& = \lambda \left\{ a \left[\frac{\mathrm{d}\bar{\theta}}{\mathrm{d}s}\varphi\right]_0^L - \int_0^L \varphi \cdot \left[a \frac{\mathrm{d}^2\bar{\theta}}{\mathrm{d}s^2} + R\sin\bar{\theta} \right] \mathrm{d}s \right\} + \\
& \qquad + \frac{\lambda^2}{2} \left\{ a \left[\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s}\varphi\right]_0^L - \int_0^L \left[a \frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}s^2} + R\cos\bar{\theta}\cdot\varphi \right] \varphi\, \mathrm{d}s \right\} + \ldots .
\end{aligned}
\right.
$$

I coefficienti di λ, $\lambda^2/2, \ldots$ rappresentano le variazioni prima, seconda, ecc. di $E(\theta)$ nell'intorno di $\bar{\theta}$. Intendiamo limitare la scelta di $\bar{\theta}$ e φ nella classe delle funzioni derivabili due volte, che si annullano per $s = 0$. Segue allora immediatamente dalla (5.2) che la variazione prima di E nell'interno di $\bar{\theta}$ è nulla per qualunque scelta di φ quando e solo quando $\bar{\theta}$ soddisfa alla (2.1) ed alla (2.2). Se per $\bar{\theta}$ si sceglie la soluzione banale $\bar{\theta}(s) \equiv 0$ dalle (2.1), (2.2), 2.3), la variazione seconda di E si riduce a

$$
(5.3)\qquad \delta^2 E = \int_0^L \left\{ a \left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s}\right)^2 - R\,\varphi \right\} \mathrm{d}s .
$$

Facciamo vedere ora che questo integrale è positivo se $R < \pi^2 a/(4L^2)$ comunque si scelga φ nella classe $\mathcal{C}$ delle funzioni derivabili in $(0, L)$ che soddisfano alle condizioni (2.2), (2.3), che può essere nullo se $R = \pi^2 a/(4L^2)$ e negativo se $R > \pi^2 a/(4L^2)$. Infatti ad ogni φ in $\mathcal{C}$ si può far corrispondere una funzione Φ definita in tutto l'intervallo $(0, 2L)$ mediante le formule

$$
\Phi(s) = \varphi(s) \qquad \text{per} \qquad 0 \leqslant s \leqslant L,
$$

$$
\Phi(s) = \varphi(2L - s) \qquad \text{per} \qquad L \leqslant s \leqslant 2L .
$$

$\Phi(s)$ è continua colla derivata prima in $(0, 2L)$ e si annulla agli estremi. Essa può quindi essere rappresentata in serie di seni

$$\Phi(s) = \sum_1^\infty{}_n\, a_n \sin\left(\frac{n\pi}{2L}\, s\right), \tag{5.4}$$

anzi qui gli a_n con n pari vanno intesi tutti nulli, e si ha anche

$$\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}s} = \sum_1^\infty{}_n\, \frac{n\pi}{2L}\, a_n \cos\left(\frac{n\pi}{2L}\, s\right). \tag{5.5}$$

D'altra parte

$$\int_0^L \left\{a\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s}\right)^2 - R\,\varphi^2\right\} \mathrm{d}s = \frac{1}{2}\int_0^L \left\{a\left(\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}s}\right)^2 - R\,\Phi^2\right\} \mathrm{d}s\,.$$

Coll'uso delle (5.4), (5.5) e delle condizioni di ortogonalità l'integrale che ci interessa si riduce a

$$\frac{L}{2} \sum_1^\infty{}_n\, a_n^2 \left\{ a\, \frac{\pi^2 n^2}{4L^2} - R \right\}, \tag{5.6}$$

e da questa formula seguono le proprietà volute ([19]).

Se confrontiamo questi risultati con quelli del n. 2 otteniamo che: quando la soluzione banale delle equazioni (2.1), (2.2), (2.3) rappresenta una configurazione di equilibrio stabile (secondo il criterio euleriano) a partire da essa la variazione seconda del funzionale (5.1) è positiva, cioè in tale configurazione E raggiunge un minimo; il valore più piccolo del carico per il quale $\delta^2 E$ può annullarsi è il carico critico; per $R > R_c$, $\delta^2 E$ può essere positiva o negativa a seconda della scelta di φ. Per $R = R_c$ le funzioni φ per cui $\delta^2 E = 0$ sono proprio quelle che soddisfano alle equazioni statiche linearizzate dell'equilibrio, valevoli nell'intorno della configurazione banale. Infatti, perchè la somma (5.6) sia nulla quando $R = R_c = a\pi^2/(4L^2)$, deve essere $a_n = 0$ per $n = 2, 3, \ldots$ e quindi $\varphi = a_1 \sin\{\pi s/(2L)\}$.

([19]) Nella dimostrazione si avrebbe potuto far uso di una disuguaglianza di WIRTINGER. Si veda: J. N. GOODIER and H. J. PLASS, *Energy theorems and critical load approximations in the general theory of elastic stability*, Quart. Appl. Math. **9** (1951), 371-380.

Passiamo ora ad esaminare l'andamento dell'energia potenziale totale dell'arco sotto carico, di cui abbiamo studiato le configurazioni di equilibrio al n. **4**. Finchè ci si limiti a considerare soltanto la classe delle configurazioni simmetriche dell'arco, l'energia potenziale totale è data, colle solite notazioni, da

$$\mathcal{E} = 2FD \operatorname{tag}\theta + B\varepsilon^2 ;$$

essa si può esprimere in termini della sola ε facendo uso della relazione geometrica che esiste tra θ ed ε [si veda la seconda delle equazioni (4.1)]:

$$\mathcal{E}(\varepsilon) = 2FD \left[\{ (L-\varepsilon)/D \}^2 - 1 \right]^{1/2} \operatorname{sign}\varepsilon + B\varepsilon^2 .$$

Nell'intorno di una generica configurazione dell'arco, individuata da un certo valore $\bar{\varepsilon}$ di ε, vale lo sviluppo

$$\mathcal{E}(\bar{\varepsilon} + \delta\varepsilon) = \mathcal{E}(\bar{\varepsilon}) + 2\{ B\bar{\varepsilon} - F[1 - (D/(L-\bar{\varepsilon}))^2]^{-1/2} \operatorname{sign}\bar{\varepsilon} \} \delta\varepsilon +$$
$$+ B[1 - (DB/F)^2 (\bar{\varepsilon}/(L-\bar{\varepsilon}))^3] (\delta\varepsilon)^2 + \dots .$$

Naturalmente la variazione prima di $\mathcal{E}$ è nulla nell'intorno di ogni configurazione di equilibrio [si confronti la (4.2)]. Il segno della variazione seconda coincide poi col segno della differenza $F^2 - D^2 B^2 \varepsilon^3 (L-\varepsilon)^{-3}$; ai nostri fini conviene quindi esaminare l'andamento, nel piano (ε, F), della curva, che diremo $\mathcal{C}_2$, di equazione

$$F = N(\varepsilon) = \pm DB\, \varepsilon^{3/2} (L-\varepsilon)^{-3/2}.$$

A noi interessa il ramo di $\mathcal{C}_2$ che appartiene al semipiano $F > 0$; tale ramo esce dall'origine rimanendo da principio al di sotto della curva $\mathcal{C}_1$ d'equazione $F = M(\varepsilon)$ [si veda l'equazione (4.2)], attraversa $\mathcal{C}_1$ nel punto di coordinate ε_c, F_c [precisate dalle (4.3)], e rimane poi sempre al di sopra di $\mathcal{C}_1$. La variazione seconda di $\mathcal{E}$ è positiva (nel semipiano $F > 0$) alla sinistra ed al di sopra di $\mathcal{C}_2$ e negativa alla destra e al di sotto di $\mathcal{C}_2$. D'altra parte le configurazioni di equilibrio dell'arco sono rappresentate nel piano (ε, F) dai punti che appartengono alla curva $\mathcal{C}_1$, col significato fisico che già abbiamo illustrato al n. **4**. Ora qui possiamo aggiungere che $\mathcal{E}$ ha un minimo sulla configurazione d'equilibrio ad arco rovescio e su una di quelle ad arco compresso (precisamente quella sulla quale ε è relativamente più piccolo); $\mathcal{E}$ ha invece un massimo sulla terza configurazione equilibrata che esiste per un certo valore del carico F (se $F < F_c$).

Ritroviamo dunque che *la condizione di stazionarietà dell'energia potenziale si precisa in una condizione di minimo in corrispondenza (e solo in corrispondenza)* *alle configurazioni equilibrate che la intuizione fisica ci suggerisce essere stabili.* Sicchè siamo spinti ad adottare un criterio di stabilità ben più significativo di quello euleriano di cui si disse al n. **2**. Anche qui poi in corrispondenza alla configurazione critica la variazione seconda della energia potenziale si annulla.

6. - Valore e limiti del criterio energetico.

Il criterio energetico di stabilità ha un notevole valore non solo di principio, come più compiutamente illustreremo in seguito, ma anche di metodo. Infatti l'osservazione che la variazione seconda del funzionale energia potenziale può annullarsi solo in corrispondenza alla configurazione critica o alle configurazioni ipercritiche conduce a procedimenti approssimati per la determinazione dei carichi critici, determinazione che è ovviamente di estrema importanza dal punto di vista tecnico. Ad esempio, lo svergolamento della trave sottoposta a carico di punta avviene in corrispondenza a valori del carico superiori a quello assunto dal funzionale

$$\int_0^L a\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s}\right)^2 \mathrm{d}s \bigg/ \int_0^L \varphi^2\, \mathrm{d}s, \tag{6.1}$$

quando per φ si prenda proprio la funzione $\sin(\pi s/(2L))$. Teoremi generali della teoria degli autovalori assicurano che tale scelta di φ minimizza il funzionale (6.1). Con scelte oculate (anche se non esatte) di φ si possono ottenere approssimazioni per eccesso di R_c. Quando ad esempio si ponga in (6.1) per φ semplicemente s, si ottiene per R_c l'approssimazione $3a/L^2$ [invece di $\pi^2\, a/(4L^2)$].

F. Engesser, G. H. Bryan, S. Timoshenko sono gli autori dei primi lavori su questo aspetto del criterio energetico di stabilità e sulle sue applicazioni. Ma la letteratura in proposito è molto vasta e noi qui ci limitiamo a far riferimento ai Volumi e alle Memorie citati nelle annotazioni (2), (15), (16).

C'è una condizione da noi non ancora esplicitamente rilevata, ma che è ovviamente necessaria perchè si possa applicare il criterio energetico a strutture elastiche: le forze esterne devono dipendere da un potenziale. Il successo del criterio nei due esempi citati nel n. **5** ed ed in moltissimi altri è legato al verificarsi di quella condizione. Ma la teoria della elasticità non è priva di esempi di questioni di stabilità nelle quali intervengono forze che non sono conservative. Si potrebbe essere indotti in tali casi a ripiegare sul criterio euleriano, che non è soggetto a condizioni restrittive del genere ora accennato; ma che esso non possa essere ritenuto sempre soddisfacente s'è già detto. La circostanza è confermata dal seguente esempio, in cui interviene appunto un carico non conservativo.

Si tratta di una variante del problema della trave incastrata ad un estremo e soggetta all'altro a carico di punta. Qui si suppone che il carico sia *tangenziale*; che rimanga cioè costante solo in grandezza, mentre la direzione coincide con quella della tangente in B alla direttrice della trave. Il problema è stato studiato da vari autori, ma la prima trattazione soddisfacente è dovuta ad M. BECK ([20]), un allievo di H. ZIEGLER ([21]). Nel caso ora in esame le condizioni al contorno (2.2), (2.3) rimangono immutate, ma la equazione differenziale (2.1) va adattata nella forma

$$a\frac{d^2\theta}{ds^2} + R\,\sin(\theta - \alpha) = 0\,, \tag{6.2}$$

dove, al solito, α indica il valore di θ per $s = L$. La (6.2) ha per conseguenza immediata

$$\frac{a}{2}\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2 - R\cos(\theta - \alpha) = \text{cost.}\,,$$

anzi, a causa della (2.2), la costante a secondo membro va precisata in $-R$. Dev'essere dunque

$$\frac{a}{2}\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2 = R\,[\cos(\theta - \alpha) - 1]\,;$$

ma questa relazione non può valere se $\theta(s)$ non è identicamente nulla, qualunque sia il valore di R. Delle equazioni (6.2), (2.2), (2.3) non esistono dunque che soluzioni banali e, poichè non è da pensare che la trave sia stabile per ogni valore di R, dobbiamo concludere che il cedimento non può essere descritto nello schema matematico sopra utilizzato. Ci converrà quindi riesaminare a fondo criticamente e precisare il concetto di stabilità: ciò ci permetterà di riconoscere il significato dei due criteri avanzati finora, oltre ad illuminarci nei casi in cui essi

---

([20]) M. BECK, *Die Knicklast des einseitig eingespannten, tangential gedruckten Staben*, Z. Angew. Math. Physik **3** (1952), 225-228.

([21]) H. ZIEGLER è autore, tra l'altro, di molti lavori nei quali sono messi in rilievo i limiti del criterio euleriano e le difficoltà che si incontrano in una sua applicazione a sistemi non conservativi; si vedano ad esempio: *Stabilitätsprobleme bei geraden Stäben und Wellen*, Z. Angew. Math. Physik **2** (1951), 265-289; *Knickung gerader Stäbe unter Torsion*, Z. Angew. Math. Physik **3** (1952), 96-119; *Die Stabilitätskriterien der Elastomechanik*, Ing. - Archiv **20** (1952), 49-56; *Linear elastic stability*, Z. Angew. Math. Physik **4** (1953), 89-121, 167-185; *On the concept of elastic stability*, Advances in Applied Mathematics **4** (1956), 351-403, Acad. Press, New York.

falliscono. Come si accennò nella premessa, è a tal fine necessario riattaccarsi alle definizioni di stabilità già sperimentate nella meccanica dei sistemi ad un numero finito di gradi di libertà.

7. - Definizioni dinamiche di stabilità.

L'idea che sta alla base delle definizioni dinamiche di stabilità è la seguente: Consideriamo un sistema meccanico S ed un suo moto M conseguente da certe circostanze iniziali M_0 (senza escludere che M possa degenerare nella quiete in una configurazione di equilibrio: $M \equiv M_0$); accanto consideriamo la classe K dei moti M' di S conseguenti da circostanze iniziali variate M'_0 di poco diverse da quelle che abbiamo indicate con M_0. *Se ogni M' di K si scosta di poco da M, il moto M di S si dice stabile e viceversa.*

L'idea è stata espressa in termini volutamente grossolani; perchè possa essere accettata in una teoria matematica, essa va dotata dei necessari epsilon. Ma la precisazione non è univoca: ci sono varie definizioni rigorose di stabilità che s'accordano con la medesima idea di fondo; ciascuna presenta vantaggi e svantaggi.

Cominciamo col prendere in esame la definizione che sembra più *naturale*, definizione che diremo di ROUTH-LYAPUNOV (22); si tratta della definizione che è detta di ROUTH nel famoso trattato sui giroscopi di KLEIN e SOMMERFELD (23), ma che di solito è chiamata di LYAPUNOV nelle opere dedicate allo studio delle equazioni differenziali (24).

Sia t un generico istante successivo all'istante iniziale t_0, siano $P(t, Q)$ e $\boldsymbol{v}(t, Q)$ la posizione e la velocità del generico punt materiale Q di S all'istante t nel moto M; simile significato abbiano $P'(t, Q)$ e $\boldsymbol{v}'(t, Q)$ in riguardo al generico moto M' della classe K' dei moti di S che derivano da circostanze iniziali $P'(0, Q)$, $\boldsymbol{v}'(0, Q)$ appartenenti ad un opportuno intorno di $P(0, Q)$, $\boldsymbol{v}(0, Q)$. Noi supporremo che: (1) le funzioni $P(t, Q)$ e $P'(t, Q)$ (per ogni M' di K') siano defi-

---

(22) E. J. ROUTH, *Treatise on the Dynamics of a System of Rigid Bodies*, McMillan, London 1884 (ripubblicato da Dover, New York 1955).

A. LIAPUNOFF, *Problème général de la stabilité du mouvement*, Ann. Fac. Sci. Toulouse (2) 9 (1907), 204-474 (ripubblicato come Vol. **17** (1949) degli « Ann. Math. Studies »)

(23) F. KLEIN und A. SOMMERFELD, *Über die Theorie des Kreisels*, Teubner, Leipzig 1897-1910. Si vedano in modo speciale le sezioni: *Über den allgemeinen Begriff der Bewegungsstabilität, Energiekriterien der Stabilität, Die Methode der kleinen Schwingungen* (pp. 342-374).

(24) Si vedano ad esempio: G. SANSONE e R. CONTI, *Equazioni differenziali non lineari*, Cremonese, Roma 1956; L. CESARI, *Asymptotic Behavior and Stability Problems in Ordinary Differential Equations*, Springer, Berlin 1959.

nite e regolari quanto occorra per ogni $t \geqslant t_0$. Diremo poi che il moto M è *stabile secondo Routh-Lyapunov* se: (2) fissato un $\varepsilon > 0$ è possibile determinare un $\delta > 0$ tale che, per ogni moto M' di K' per il quale sia

$$| P(t_0, Q)\ P'(t_0, Q) | < \delta, \qquad | \boldsymbol{v}'(t_0, Q) - \boldsymbol{v}(t_0, Q) | < \delta$$

per ogni Q, sia anche, per ogni t e Q,

$$| P(t, Q)\ P'(t, Q) | < \varepsilon .$$

Insomma la stabilità coincide con la uniforme continuità in (t_0, ∞) delle funzioni P' rispetto ai dati iniziali. La definizione è tanto conveniente da un punto di vista matematico che essa è assunta come definizione di stabilità (senza altro attributo) nei volumi citati in annotazione ([24]). Essa può sembrare anche, come si disse, la più naturale da un punto di vista meccanico. Invece — e qui citiamo WINTNER ([25]) — « essa non è affatto naturale, in quanto è troppo restrittiva. Infatti quanto si sa dalla teoria geometrica di POINCARÉ delle equazioni differenziali nel campo reale e dalla parallela, sebbene più complessa, teoria delle trasformazioni superficiali, suggerisce che la condizione (2) non può essere verificata che in casi estremamente eccezionali ». È possibile chiarire con un esempio estremamente semplice le ragioni su cui si basa la critica del WINTNER. Si prenda per S il pendolo semplice e per M una sua oscillazione piana; finchè ci si limita a considerare oscillazioni « piccole », rette cioè dalla ben nota equazione lineare, si deve accettare esattamente la proprietà dell'isocronismo; un mutamento sufficientemente piccolo delle condizioni iniziali deve intendersi abbia per sola conseguenza una variazione anch'essa piccola della ampiezza di oscillazione e della fase, sicchè il moto M riesce stabile secondo la definizione di ROUTH-LYAPUNOV. Ma quando si pensi invece il moto del pendolo retto dalla equazione non lineare, si deve tener conto che il periodo di oscillazione dipende dall'ampiezza; sicchè in genere un moto M' della classe K' si deve pensare che avvenga con un periodo T' diverso da quello T della oscillazione M, per quanto sia piccola la variazione delle circostanze iniziali. Quando si confrontino le posizioni P e P' del pendolo *ad un medesimo istante* t nei due moti, esse risulteranno alquanto discoste purchè $t - t_0$ contenga un numero abbastanza grande di periodi. Colla conclusione che il moto deve essere considerato instabile.

([25]) A. WINTNER, *The Analytical Foundations of Celestial Mechanics*, Princeton Math. Series, **5** (1947). Si vedano le pp. 98-99.

Per analoghe ragioni risultano instabili i moti dei pianeti intorno al sole ed il più spesso i moti retti da equazioni non lineari autonome. La definizione di ROUTH-LYAPUNOV è dunque troppo restrittiva: è necessario rilassare parzialmente la condizione (2) in modo da estendere la classe dei moti stabili, sicchè da essa non siano ad esempio esclusi i moti a cui si è fatto cenno or ora; conviene però procedere con cautela per evitare di cadere nell'eccesso opposto. Un tale pericolo è bene illustrato in una conferenza tenuta da J. J. STOKER al « Second AMS-OOR Symposium in Applied Mathematics » (26); converrà che noi ne riferiamo qui almeno parzialmente.

Riprendiamo le considerazioni appena interrotte in riguardo alla definizione di stabilità di ROUTH-LYAPUNOV. Negli esempi che si invocano contro tale definizione le differenze nei movimenti messi a confronto diventano sensibili solo dopo un intervallo di tempo tanto più lungo quanto più piccola è l'alterazione delle condizioni cinematiche iniziali. Si sarebbe perciò tentati di modificare la definizione imponendo alle differenze in questione di rimanere al di sotto di un certo valore ε durante un intervallo arbitrario ma finito di tempo. Di conseguenza i moti considerati in quegli esempi verrebbero classificati ora come stabili, secondo quanto si desiderava. Tuttavia si giungerebbe in altri casi a conclusioni inaccettabili. Si consideri, per prendere un esempio di estrema semplicità, un punto pesante Q vincolato a rimanere su una superficie sferica priva di attrito; e si proponga di studiare la stabilità della posizione di equilibrio nel punto più alto O della sfera. Nessuno proporrebbe di classificare la posizione O nella classe delle stabili: ma una tale classificazione seguirebbe proprio dalla definizione tentativamente proposta poco sopra. Non è difficile provare che si possono scegliere alterazioni iniziali della configurazione di equilibrio tanto piccole che Q rimane in un intorno preassegnato di O, per quanto piccolo, in un preassegnato intervallo di tempo, per quanto grande.

La modificazione proposta appare dunque inaccettabile. Utili riescono invece altri adattamenti della definizione di ROUTH-LYAPUNOV, ottenuti richiedendo che la condizione (2) sia valida solo per una speciale classe di perturbazioni, opportunamente specificata; si parla allora di stabilità condizionata. Così ad esempio nella meccanica celeste si fanno intervenire le perturbazioni secolari (27). Piuttosto che intrattenerci su tali adattamenti, per quanto essi siano di grande interesse in casi speciali, passiamo qui a dare una seconda definizione di stabilità, che evita le difficoltà che si incontrano usando quella di ROUTH-LYAPUNOV e sembra bene adattarsi allo studio di sistemi meccanici

---

(26) J. J. STOKER, *On the stability of mechanical systems*, Comm. Pure Appl. Math. **8** (1955), 133-141.

(27) Si veda loc. cit. in annotazione (25) (cfr. pag. 99).

soggetti a forze indipendenti dal tempo. Si tratta della *stabilità orbitale secondo Poincaré* (28). Ferma restando la condizione (1), la (2) è sostituita da un'altra basata non sul confronto delle posizioni dei punti corrispondenti in M ed M' ad ogni istante, ma piuttosto dal confronto delle rispettive traiettorie nello spazio delle fasi. Un « cilindro » $C^{(\varepsilon)}_{T(Q)}$, di raggio ε arbitrariamente piccolo, è costruito attorno alla traiettoria $T(Q)$ descritta da ciascun punto Q di S nello spazio delle fasi per $t \geqslant t_0$ nel moto M. Si considerano poi le analoghe traiettorie $T'(Q)$ in un generico moto perturbato M', ed il moto M è detto stabile se per ogni $\varepsilon > 0$ può determinarsi un $\delta > 0$ tale che le traiettorie $T'(Q)$ appartengono a $C^{(\varepsilon)}_{T(Q)}$ in ogni moto M' nel quale gli estremi delle T', occupati dai punti Q per $t = t_0$, appartengono a $C^{(\ )}_{T(Q)}$. In altre parole le traiettorie perturbate devono rimanere « vicine » alle traiettorie di confronto anche se i punti che si corrispondono nei due moti ad un certo istante non sono essi stessi « vicini ».

Ovviamente un moto stabile alla Routh-Lyapunov è stabile anche in senso orbitale, ma non viceversa. Secondo la nuova definizione le oscillazioni del pendolo pesante ed i moti di rivoluzione dei pianeti sono moti stabili; e inaccettabili risultati (quale quello relativo alla « stabilità » della posizione più alta d'equilibrio di un punto pesante, vincolato, senza attrito, su una superficie sferica) sono evitati. Insomma la nuova definizione appare più consona al concetto fisico-intuitivo di stabilità, almeno tutte le volte che il tempo figura nella descrizione del fenomeno come una « variabile ausiliaria » (29).

8. - Esempio di applicazione della definizione dinamica di stabilità.

Anche quando ci si sia accordati su una definizione di stabilità (e finchè ci si limiti a studiare la stabilità di una configurazione di equilibrio, ad esempio, le due definizioni date al n. **7** sono esattamente equivalenti), rimangono ancora da superare gravi difficoltà. Consideriamo infatti come deve essere raggiunta una decisione circa la stabilità o instabilità di un assegnato movimento (o di una configurazione di equilibrio). Si devono conoscere le traiettorie perturbate dei punti del sistema S per ogni variazione — piccola ma arbitraria — dei

---

(28) H. Poincaré, *Méthodes nouvelles de Mécanique céleste* (cfr. T. III, Ch. XXVI). Bisogna notare però che in meccanica celeste si usa aggiungere al criterio di stabilità ulteriori restrizioni di natura speciale: per la stabilità di un sistema deve essere esclusa la possibilità di collisioni, ecc. .

(29) Ad esempio la definizione di Routh-Lyapunov sarebbe ancora da preferire nello studio di un sistema meccanico un cui moto stazionario fosse usato come « orologio ».

dati iniziali e per ogni valore di $t \geqslant t_0$. Se il moto di S è retto da un sistema di equazioni differenziali (magari alle derivate parziali) non lineari (e questo è il caso più frequente e di maggior interesse) di rado si può ricorrere a metodi generali che permettano di giungere alla conoscenza di tali traiettorie.

Prendiamo ancora come esempio, semplice ma significativo, lo studio del comportamento dinamico dell'arco a tre cerniere, di cui già si è discorso ai nn. **4** e **5**. Escluderemo qui ancora che le aste si inflettano e ci limiteremo pure a considerare configurazioni simmetriche dell'arco, sicchè unico rimane il grado di libertà del sistema; penseremo anche trascurabile la variazione, durante un generico moto, del momento di inerzia di ciascuna asta attorno ad una cerniera. L'equazione che regge il movimento dell'arco si riduce allora, colle solite notazioni, alla

$$I \frac{d^2 \theta}{dt^2} = B\varepsilon (L - \varepsilon) \sin\theta - 2FD,$$

o, più semplicemente,

$$I \frac{d^2 \theta}{dt^2} = 2D (B\varepsilon \sin\theta - F).$$

Eliminando ε colla condizione geometrica $(4.1)_{\mathrm{II}}$, si ha

$$(8.1) \qquad I \frac{d^2 \theta}{dt^2} = 2D [BL \sin\theta - BD \operatorname{tg}\theta - F].$$

Lo spazio delle fasi si riduce alla striscia $-\pi/2 < \theta < \pi/2$ del piano (θ, u) [essendo $u = d\theta/dt$]. Come conseguenza della (8.1) le traiettorie dinamiche in tale piano sono le curve soluzioni della equazione differenziale

$$(8.2) \qquad I \frac{du}{d\theta} = \frac{2D}{u \cos\theta} (BL \sin\theta \cos\theta - BD \sin\theta - F \cos\theta),$$

equazione che può essere studiata con i noti metodi della meccanica non lineare. Anzi la (8.2) si può integrare in termini finiti:

$$(8.3) \qquad u^2 - U^2 = (4D/I) [BL (1 - \cos\theta) + BD \lg |\cos\theta| - F\theta];$$

qui U è una costante.

La (8.3) rappresenta appunto la famiglia delle caratteristiche della (8.2) nello spazio delle fasi (θ, u). L'andamento di tali caratteristiche è qualitativamente determinato dal numero e dal tipo dei punti singolari dell'equazione (8.2) nella striscia $-\pi/2 < \theta < \pi/2$. Cominciamo col considerare il caso $F = 0$, caso nel quale i punti singolari sono $C_1(\alpha, 0)$, $O(0, 0)$, $C_2(-\alpha, 0)$ in corrispondenza alle tre ovvie configurazioni di equilibrio dell'arco; i due punti estremi sono centri, mentre l'origine è un colle — nella nota terminologia della teoria delle equazioni differenziali — e mentre le caratteristiche nell'intorno dei primi due punti sono curve chiuse che li circondano, su due sole delle caratteristiche che passano nell'intorno dell'origine il punto rappresentativo della soluzione della (8.1) tende verso O per $t \to +\infty$. La situazione rimane qualitativamente la stessa per F positivo ma minore di F_c; la posizione dei punti critici muta naturalmente: i due centri si spostano verso sinistra al crescere di F ed il colle verso destra. Per $F = F_c$ il punto O si va a confondere con C_2 ed il punto singolare che ne risulta non rientra tra i casi tipici più semplici. È facile rendersi conto però, in base alle (8.1), (8.2), (8.3), che un intorno di $O \equiv C_2$ è diviso in due settori di tipo iperbolico da due rami di caratteristica; su uno dei due rami il punto P rappresentativo della soluzione della (8.1) si allontana da $O \equiv C_2$ al crescere di t, sull'altro il punto P tende ad $O \equiv C_2$ per $t \to +\infty$. Infine per $F > F_c$ rimane un solo punto singolare, C_1, ed esso è un centro.

Questi risultati analitici consentono un rigoroso esame circa la stabilità delle configurazioni di equilibrio dell'arco secondo le definizioni del n. precedente; ed è possibile verificare che i risultati sono perfettamente conformi alle conclusioni già raggiunte al n. **5** sulla base del criterio energetico.

9. - Il teorema di Dirichlet.

Una esauriente discussione dinamica dei problemi di stabilità (simile a quella presentata nel caso speciale del n. **8**) è di rado possibile. È possibile però assegnare per una classe importante di problemi una condizione sufficiente di stabilità, condizione che indica anche un primo legame fra le definizioni del n. **7** e le considerazioni dei numeri precedenti. La condizione è espressa dal teorema di DIRICHLET: *Per un sistema meccanico conservativo una configurazione di equilibrio è stabile nel senso di Routh-Lyapunov se in essa è minima l'energia potenziale.*

Una dimostrazione rigorosa del teorema per i sistemi ad un numero finito di gradi di libertà è vecchia di più di cent'anni [30]. Per i sistemi continui l'estensione non è invero semplice; ma il teorema sembra giustificato ad esempio

[30] L. DIRICHLET, a pag. 85 del Vol. **32** (1846) del « Journal von Crelle ». Una dimostrazione recente si trova ad esempio in loc. cit. in annotazione [25] (cfr. pp. 98-99).

per i sistemi elastici da argomenti di questo tipo [31]. Una condizione sufficiente per la stabilità è che per ogni spostamento possibile (sufficientemente piccolo) a partire dalla configurazione di equilibrio l'aumento della energia potenziale elastica del corpo ecceda il lavoro eseguito dai carichi. E ciò perchè in tali condizioni, per il principio di conservazione dell'energia, il sistema può allontanarsi dalla configurazione di equilibrio solo fino ad un'altra configurazione nella quale l'eccesso di cui si fa questione diventa eguale alla energia cinetica comunicata dalla perturbazione. Poichè l'ampiezza dello spostamento deve tendere a zero quando tende ad annullarsi la perturbazione, il sistema è stabile.

La condizione espressa dal teorema di DIRICHLET non è necessaria neppure per i sistemi con un numero finito di gradi di libertà. Si pensi infatti ad un punto materiale pesante P vincolato senza attrito sulla superficie la cui equazione è data, con riferimento ad un sistema di coordinate cilindriche $(\Omega, \varrho, \theta, z)$ ad asse z verticale, dalle

$$(9.1) \qquad z = e^{-1/\varrho} \sin(1/\varrho) \quad \text{per} \quad \varrho > 0, \qquad\qquad z = 0 \quad \text{per} \quad \varrho = 0.$$

L'origine Ω del sistema di riferimento è una posizione di equilibrio stabile per P, ma in essa l'energia potenziale non ha un minimo [32]. Simili esempi si possono costruire nella meccanica dei continui [33].

Una completa equivalenza tra il criterio di stabilità che abbiamo detto energetico e la definizione di ROUTH-LYAPUNOV va dunque esclusa. Ciò non ostante molti autori [34] preferiscono assumere il teorema di DIRICHLET come principio, cioè preferiscono in sostanza definire come stabile una configurazione di equilibrio di un sistema conservativo solo se in essa l'energia potenziale ha un minimo; aggiungendo anzi spesso la condizione che tale minimo sia riconoscibile sulla variazione seconda. Colla conseguenza: le configurazioni d'equilibrio di un sistema conservativo S, diciamole $\overline{C}$, che sono caratterizzate

---

(31) Tratti da R. HILL, *On uniquiness and stability in the theory of finite elastic strain*, J. Mech. Physics Solids **5** (1957), 229-241.

(32) Loc. cit. in annotazione (25) (cfr. pp. 100-101).

(33) Si prenda ad esempio in considerazione la trave incastrata di cui al n. **2** e la si schematizzi in una linea a quattro parametri (*elastica*, per la quale la lunghezza della direttrice può variare). Si pensi l'estremo B vincolato ad una superficie del tipo (9.1), l'asse z diretto come $A_* B_*$, Ω in modo che, quando B è in Ω la trave sia leggermente compressa, ecc..

(34) Ci limiteremo a citare: R. VON MISES, *Über die Stabilitätsprobleme der Elastizitätstheorie*, Z. Angew. Math. Mech. **3** (1923), 406-442; E. TREFFTZ, *Zur Theorie der Stabilität des elastischen Gleichgewicht*, Z. Angew. Math. Mech. **12** (1933), 160-165.

dalla condizione che a partire da esse esistono spostamenti virtuali del sistema, diciamoli $\boldsymbol{w}$, per i quali la variazione seconda della energia potenziale U è nulla (mentre per tutti gli altri spostamenti è positiva), vanno considerate come critiche e c'è da aspettarsi che in generale segnino una transizione tra stabilità e instabilità.

Necessariamente le equazioni linearizzate che esprimono le condizioni di equilibrio di S nell'intorno di $\overline{C}$ sono allora soddisfatte da ogni vettore $c\boldsymbol{w}$ (ove c è una costante), sicchè per tali equazioni viene a mancare l'unicità della soluzione. Ciò è già stato osservato in relazione agli esempi speciali di cui ai nn. **2**, **3**, **4**. Di solito la circostanza è presentata proprio come il legame ancora mancante tra il criterio energetico di stabilità e quello euleriano; ma s'è già osservato che in realtà non è possibile con sicurezza stabilire quali siano le circostanze fisiche che accompagnano l'aumento dei carichi (fino ai valori ed) al di là dei valori critici sulla sola base delle proprietà delle soluzioni delle equazioni linearizzate.

Naturalmente si può anche convenire di porre il criterio euleriano su basi puramente formali, riconducendo la ricerca dei carichi critici a quella delle circostanze nelle quali le equazioni linearizzate della statica valevoli nell'intorno di una configurazione di equilibrio sotto carico ammettono infinite soluzioni, senza preoccuparsi se esse indichino o no effettivi fenomeni di svergolamento o sbandamento. Preso in tale senso il criterio euleriano e quello energetico sono in genere equivalenti per i sistemi conservativi.

10. - Il metodo delle piccole oscillazioni.

La semplificazione che si può ottenere nello studio della stabilità alla Routh-Lyapunov colla applicazione del criterio energetico viene a mancare per i sistemi meccanici non conservativi. Ed anche per tali sistemi è dubbio il valore del criterio euleriano; gli insoddisfacenti risultati che si ottengono a volte da una sua applicazione (si veda l'esempio del n. **6**) non devono sorprendere del tutto: essi indicano solo l'assenza di instabilità per svergolamento o sbandamento [35]. Come procedere in tali casi ad una discussione più completa di stabilità? S'è già detto che un ricorso diretto al criterio di Routh-Lyapunov nel campo non lineare è il più spesso fuori questione. L'unica alternativa è *il metodo*

[35] Come si accennò in annotazione [21], una serrata critica alla applicazione del criterio euleriano a sistemi meccanici non conservativi è stata condotta da H. Ziegler. Sui limiti del criterio euleriano da tempo aveva posto accento D. Bonvicini: *Metodo ordinario e criterio energetico per la determinazione dei carichi critici*, Mem. R. Accad. Sci. Lett. Arti Padova (Classe Sci. Fis.-Mat.) **57** (1940-41), 199-211.

delle piccole oscillazioni. L'idea che sta a fondamento di tale metodo è la seguente. Noi dobbiamo studiare il comportamento di un sistema meccanico S nell'intorno di una configurazione di equilibrio C per decidere sulla stabilità o meno di tale configurazione; nel criterio di ROUTH-LYAPUNOV si fa menzione esplicita a perturbazioni piccole. Potremo dunque ritenere per il momento che lo spostamento $\boldsymbol{u}$ dei punti di S dalle loro posizioni in C, causato da tali perturbazioni, sia infinitesimo e quindi retto dalle equazioni lineari che si ottengono da quelle, in genere non lineari, che reggono il moto di S in grande, trascurando quadrati e prodotti delle componenti di $\boldsymbol{u}$ e delle loro derivate. Lo studio del sistema così ottenuto è più facile di quello del sistema originale; se si può allora decidere che tutte le soluzioni del sistema lineare rimangono limitate per ogni valore di t, la nostra presunzione sulla piccolezza di $\boldsymbol{u}$ appare giustificata. Potremo quindi ritenere C come una posizione di equilibrio stabile. Viceversa se c'è qualche soluzione che cresce indefinitamente, l'ipotesi della piccolezza di $\boldsymbol{u}$ porta ad una contraddizione, dunque C è instabile.

Il metodo delle piccole oscillazioni è applicato molto frequentemente; nè si vede cosa possa sostituirlo con pari efficacia nelle questioni che ci interessano. Ma i suoi fondamenti logici sono spesso stati posti in questione. Fin dal secolo scorso DIRICHLET ha obbiettato [nel lavoro citato in annotazione (30)] che se si fa l'ipotesi che $\boldsymbol{u}$ sia piccolo e poi si trova che $\boldsymbol{u}$ di fatto rimane piccolo non si prova nulla che non sia già nell'ipotesi. Se viceversa dall'ipotesi che $\boldsymbol{u}$ sia piccolo segue che $\boldsymbol{u}$ non è tale, si prova solo che la linearizzazione non era giustificata.

Se le obbiezioni di DIRICHLET venissero accettate senza riserve poco rimarrebbe degli studi di stabilità, studi a cui sono ormai dedicati volumi. In realtà esse non sono così disastrose come può apparire a prima vista. La linearizzazione può essere giustificata (come si osservò in un caso speciale al n. **3**) su basi diverse che la presunta generica piccolezza degli spostamenti: la soluzione delle equazioni lineari può pensarsi come un primo passo in un procedimento di approssimazioni successive (36). Inoltre certi risultati di LYAPUNOV (37) stanno ad indicare che talvolta le equazioni «ridotte» sono invero sufficienti a fornire rigorosi criteri di stabilità.

(36) Secondo il metodo dei sistemi ausiliari successivi a cui si è fatto cenno nella annotazione (10).

(37) Loc. cit. in annotazione (22) (cfr. p. 429).

11. - Esempio di applicazione del metodo delle piccole oscillazioni.

Riprendiamo qui lo studio della stabilità di una trave soggetta a carico di punta rispettivamente assiale e tangenziale, facendo uso del metodo delle piccole oscillazioni. Incominciamo col richiamare le equazioni vettoriali non lineari della dinamica della trave:

$$(11.1) \qquad \frac{\partial \boldsymbol{R}_\alpha}{\partial s} + \mu \frac{\partial^2 \boldsymbol{w}}{\partial t^2} = 0, \qquad \frac{\partial \boldsymbol{M}_\alpha}{\partial s} + \boldsymbol{T} \wedge \boldsymbol{R}_\alpha = 0;$$

qui $\boldsymbol{R}_\alpha$ è la somma vettoriale dello sforzo normale e dello sforzo di taglio sulla sezione normale generica α, μ la massa per unità di lunghezza, $\boldsymbol{w}$ lo spostamento dei punti della direttrice, $\boldsymbol{M}_\alpha$ la somma vettoriale del momento flettente e del momento torcente, $\boldsymbol{T}$ il versore della tangente alla direttrice. Si è tenuto conto che nessuna forza o coppia distribuita agisce sulla trave e si sono trascurati i momenti delle forze di inerzia. Alle equazioni indefinite (11.1) vanno aggiunte le condizioni al contorno, che tengono conto dell'incastro in A:

$$(11.2) \qquad (\boldsymbol{w})_{s=0} = 0, \qquad \left(\frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial s}\right)_{s=0} = 0,$$

e della sollecitazione agente su α_B:

$$(11.3) \qquad (\boldsymbol{R}_\alpha)_{s=L} = \boldsymbol{R}, \qquad (\boldsymbol{M}_\alpha)_{s=L} = 0.$$

Nella prima delle (11.3) $\boldsymbol{R}$ va inteso coincidere con $R\,\boldsymbol{c}_1$ quando si studi il caso del carico assiale e con $R\,(\boldsymbol{T})_{s=L}$ quando si studi invece il caso del carico tangenziale.

La linearizzazione delle equazioni (11.1), (11.2), (11.3) nell'intorno di una configurazione banale d'equilibrio sotto il carico $\boldsymbol{R}$ conduce alle altre

$$(11.4) \qquad \frac{\partial \boldsymbol{R}_\alpha}{\partial x_1} + \mu \frac{\partial^2 \boldsymbol{w}}{\partial t^2} = 0, \qquad \frac{\partial \boldsymbol{M}_\alpha}{\partial x_1} + \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial x_1} \wedge R\,\boldsymbol{c}_1 + \boldsymbol{c}_1 \wedge \boldsymbol{R}_\alpha = 0;$$

$$(11.5) \qquad (\boldsymbol{w})_{x_1=0} = 0, \qquad \left(\frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial x_1}\right)_{x_1=0} = 0;$$

$$(11.6) \qquad (\boldsymbol{M}_\alpha)_{x_1=L} = 0, \qquad (\boldsymbol{R}_\alpha)_{x_1=L} = \begin{cases} R\boldsymbol{c}_1 & \text{nel caso « assiale »}, \\ R\left(\boldsymbol{c}_1 + \dfrac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial x_1}\right)_{x_1=L} & \text{nel caso « tangenziale »;} \end{cases}$$

quando, per semplicità, si usino per le quantità approssimate gli stessi simboli che s'erano usati per le quantità esatte. Finchè ci si limita poi a considerare movimenti della trave a torsione (twist) nulla, durante i quali la direttrice della trave rimane nel piano (x_1, x_2), si può proprio porre

$$\boldsymbol{w} = v(x_1, t) \cdot \boldsymbol{c}_2 \tag{11.7}$$

($\boldsymbol{c}_2$ versore dell'asse x_2); inoltre il momento torcente è nullo e la relazione tra momento flettente e curvatura si riduce a richiedere che sia

$$\boldsymbol{M}_\alpha = - a \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} \boldsymbol{c}_3 . \tag{11.8}$$

Per la derivazione della seconda delle (11.4) si ottiene poi

$$a \frac{\partial^4 v}{\partial x_1^4} + R \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 , \tag{11.9}$$

e le condizioni al contorno diventano: le (11.5)

$$v(0, t) = 0, \qquad \left(\frac{\partial v}{\partial x_1}\right)_{x_1=0} = 0 ; \tag{11.10}$$

e la prima delle (11.6)

$$\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2}\right)_{x_1=L} = 0 . \tag{11.11}$$

Per la seconda delle (11.6) dobbiamo ancora distinguere due casi: se il carico è assiale, specificando la seconda delle (11.4) per $x_1 = L$ si ha

$$\left(a \frac{\partial^3 v}{\partial x_1^3} + R \frac{\partial v}{\partial x_1}\right)_{x_1=L} = 0 ; \tag{11.12}$$

se il carico è tangenziale si ottiene invece

$$\left(\frac{\partial^3 v}{\partial x_1^3}\right)_{x_1=L} = 0. \tag{11.13}$$

L'integrale generale delle (11.9) si può scrivere come una combinazione lineare di soluzioni particolari del tipo

$$V(x_1)\, e^{i\omega t}, \tag{11.14}$$

dove la funzione V e la costante ω vanno scelte in modo da soddisfare alle (11.9), (11.10), (11.11) e (11.12) oppure (11.13). Ponendo la funzione (11.14) nella (11.9) si ottiene per V l'equazione

$$aV^{(4)} + RV'' - \mu\omega^2 V = 0\,. \tag{11.15}$$

L'equazione caratteristica $a\lambda^4 + R\lambda^2 - \mu\omega^2 = 0$ ha per soluzioni λ_1, $-\lambda_1$, $i\lambda_2$, $-i\lambda_2$, se si pone

$$\lambda_1 = \sqrt{\left\{\sqrt{R^2 + 4\mu\omega^2 a} - R\right\}/(2a)}, \tag{11.16}$$

$$\lambda_2 = \sqrt{\left\{\sqrt{R^2 + 4\mu\omega^2 a} + R\right\}/(2a)}\,.$$

Perciò l'integrale generale della (11.15) si scrive, se $\omega \neq 0$,

$$V(x) = A\cdot\cosh\lambda_1 x_1 + (B/\lambda_1)\cdot\sinh\lambda_1 x_1 + C\cdot\cos\lambda_2 x_1 + D\cdot\sin\lambda_2 x_1\,. \tag{11.17}$$

Se $\omega = 0$, λ_1 si annulla e la (11.17) va sostituita con

$$V(x_1) = A + Bx_1 + C\cdot\cos\lambda_2 x_1 + D\cdot\sin\lambda_2 x_1\,,$$

come si nota per passaggio al limite. Le costanti A, B, C, D che appaiono nella (11.17) vanno determinate a mezzo delle condizioni al contorno che seguono per V dalla (11.10), (11.11), e (11.12) oppure (11.13). Tali condizioni costituiscono un sistema di equazioni lineari omogenee in A, B, C, D. Perchè esse siano compatibili per valori non nulli delle incognite, il determinante del sistema deve annullarsi:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \lambda_2 \\ \lambda_1^2\cdot\mathrm{ch}\,\lambda_1 L & \lambda_1\cdot\mathrm{sh}\,\lambda_1 L & -\lambda^2\cdot\cos\lambda_2 L & -\lambda^2\cdot\sin\lambda_2 L \\ (\lambda_1^2+\varepsilon R_c/a)\cdot\mathrm{sh}\,\lambda_1 L & (\lambda_1^2+\varepsilon R_c/a)\cdot\mathrm{ch}\,\lambda_1 L & (\lambda_2^2-\varepsilon R_c/a)\lambda_2\cdot\sin\lambda_2 L & (\varepsilon R_c/a-\lambda_2^2)\lambda_2\cdot\cos\lambda_2 L \end{vmatrix} =$$

Qui si è introdotto un parametro ε: per $\varepsilon = 1$ si ha il caso del carico assiale, per $\varepsilon = 0$ quello del carico tangenziale. Lo sviluppo del determinante porta all'equazione

$$(11.18)\quad \begin{cases} 2\eta^4(1-\varepsilon)+\beta^2+\beta\eta^2(1-2\varepsilon)\cdot \mathrm{sh}\{(\eta^4+\beta^2)^{1/2}-\eta^2\}^{1/2}\cdot \sin\{(\eta^4+\beta^2)^{1/2}+\eta^2\}^{1/2}+ \\ \qquad +(\beta^2+2\varepsilon\eta^4)\cdot \mathrm{ch}\{(\eta^4+\beta^2)^{1/2}-\eta^2\}^{1/2}\cdot \cos\{(\eta^4+\beta^2)^{1/2}+\eta^2\}^{1/2}=0, \end{cases}$$

ove si ponga $\eta^2 = RL^2/(2a)$, $\beta^2 = \omega^2 L^4 \mu/a$. La (11.18) può essere interpretata come una equazione in β^2 dipendente dal parametro η^2; essa è quindi proprio l'equazione che finisce collo specificare il carattere delle soluzioni del nostro problema in dipendenza del valore del carico. Naturalmente se le soluzioni in β^2 (e quindi ω^2) della (11.18) sono tutte reali e positive per un certo valore di η^2 (e quindi di R) le soluzioni della (11.9) hanno tutte carattere oscillatorio di ampiezza costante [cfr. l'equazione (11.14)]; ne segue che le piccole perturbazioni non causano una flessione pericolosa della trave. Invece se qualche soluzione in β^2 è negativa o complessa esistono soluzioni della (11.9) che crescono esponenzialmente col tempo e si deve concludere che la trave è instabile. Ora si può constatare che per piccoli valori di η^2 tutte le soluzioni della (11.18) sono reali e positive; quella equazione infatti si riduce approssimativamente alla

$$1 + \cosh\beta \, \cos\beta = 0\,;$$

al contrario per grandi valori di η^2 esistono soluzioni negative o complesse. Il passaggio da valori positivi a valori negativi oppure complessi di ω^2 è da pensare che avvenga con continuità. Da valori reali positivi a valori reali negativi di ω si passa naturalmente attraverso il valore nullo. Per tale valore le nostre equazioni hanno soluzioni statiche. Per $\omega = 0$ si ha dalla (11.18), quando si escluda il caso banale,

$$(11.19)\qquad 1 - \varepsilon + \varepsilon \cos\sqrt{2}\eta = 0\,.$$

Nel caso del carico assiale questa equazione si riduce all'altra $\cos(\sqrt{R/a}\,L) = 0$, com'era da attendersi. Nel caso del carico tangenziale invece la (11.19) è impossibile. Si è già constatato infatti che in tal caso non esistono soluzioni statiche non banali.

Si può però presentare una seconda eventualità e cioè il passaggio da soluzioni eali p sitive a soluzioni complesse attraverso una soluzione multipla: si ha allora un caso di instabilità che si può dire *latente*, perchè non può essere messo in evidenza con mezzi statici. Uno studio della (11.18) per il caso del carico assiale conduce proprio a riconoscere che l'eventualità ora descritta effettivamente si presenta quando R passa attraverso un certo valore critico $R'_c \sim 20\, a/L^2$ (all'incirca otto volte il carico di EULERO) ([38]).

L'interpretazione fisica del risultato ottenuto nel caso del carico assiale è semplice. Si pensi che la trave occupi inizialmente la configurazione rettilinea; se il carico R non supera il carico critico, una qualunque perturbazione ha per conseguenza vibrazioni di ampiezza tanto più piccola quanto più lieve è la perturbazione. Al contrario se $R > R_c$, una perturbazione per quanto piccola causa un rapido moto della trave verso una delle configurazioni di equilibrio non banali e quindi un definitivo allontanamento dalla configurazione rettilinea. Qui lo studio del moto nella approssimazione lineare non ne mette in luce altro che la prima fase.

Il meccanismo di instabilità è più complesso quando il carico è tangenziale: anche se il carico supera il valore critico non esistono configurazioni di equilibrio non banali verso cui la trave tenda a muoversi in seguito a perturbazioni. Invece, se $R > R'_c$, l'instabilità è dovuta ad un progressivo aumento dell'energia cinetica della trave come conseguenza del lavoro compiuto dal carico non conservativo: insomma la instabilità va messa in relazione collo sviluppo di *vibrazioni autoeccitate*.

12. - Il criterio delle imperfezioni ([39]).

Oltre ai criteri di stabilità a cui si è fatto cenno, ad altri ancora si usa ricorrere talvolta: ad esempio il criterio delle imperfezioni, su cui intendiamo riferire brevemente qui, è stato con successo applicato allo studio della stabilità di strutture soggette a deformazioni plastiche e viscose ([40]). Per fissare le idee facciamo ancora riferimento al problema della trave caricata di punta; le ipotesi di perfetta simmetria della trave, di esatta assenza di eccentricità per il carico, ecc. non possono mai essere verificate in pratica; è naturale quindi di esaminare quali siano le conseguenze di *imperfezioni* sulla deformazione della trave sotto carico. Pensiamo ad esempio che il carico, per quanto di direzione ancora invariabile, sia lievemente eccentrico, precisamente sia applicato ad un punto C della sezione normale α_B distante e da B (colle notazioni del n. 2).

([38]) Il risultato è dovuto a M. BECK. Si veda loc. cit. in annotazione ([20]).

([39]) Si veda ad esempio il volumetto di L. STABILINI citato in annotazione ([2]) o l'articolo sul concetto di stabilità di H. ZIEGLER citato in annotazione ([21]).

([40]) La letteratura sull'argomento è alquanto vasta. Si veda utilmente in proposito la 41-esima « Wilbur Wright Memorial Lecture » tenuta da N. J. HOFF alla Royal Aeronautical Society: *Buckling and Stability*, J. Roy. Aero. Soc. **58** (1954), 3-52.

Quando si intenda scelto il piano di riferimento (x_1, x_2) in modo che C cada proprio nel semipiano $x_2 > 0$, per equazione indefinita di equilibrio si ha ancora la (2.1). Anche la condizione di incastro (2.3) naturalmente non muta; invece la seconda condizione al contorno diventa

$$a\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}\right)_{s=L} = Re\cdot\cos\alpha. \tag{12.1}$$

Quando si intenda di prendere in esame solo deformazioni piccole, la (3.1) può prendere il posto della (2.1) ed anche la (12.1) si semplifica

$$a\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}\right)_{s=L} = Re\,. \tag{12.2}$$

Ora le (3.1), (2.3), (12.2) hanno per soluzione

$$\theta = e\sqrt{R/a}\cdot\sin(\sqrt{R/a}\,s)/\cos(\sqrt{R/a}\,L)\,, \tag{12.3}$$

e poichè si osserva che θ tende all'infinito quando R tende ad $R_c = a\pi^2/(4L^2)$, s'usa concludere: *il carico critico R_c causa deformazioni infinitamente grandi in un sistema che presenta imperfezioni.*

È un modo affrettato di dire che il comportamento della approssimazione (12.3) per $R \to R_c$ fa da spia alla seguente circostanza: la soluzione del più completo sistema non lineare (2.1), (2.3), (12.1) non si può pensare, nell'intorno di $R = R_c$ come infinitesima dello stesso ordine di e (come in sostanza s'è presunto nel procedere alla linearizzazione). La trattazione lineare è anche qui sufficiente a mettere in evidenza il valore eccezionale del carico; ma per determinare la deformata della trave quando R è vicino ad R_c o supera R_c è necessario un più preciso esame delle equazioni non lineari. Tale esame spiega ad esempio perchè la approssimazione (12.3) attribuisca valori negativi a θ quando R è maggiore di R_c.

Noi ci limiteremo qui ad una discussione breve e parziale delle equazioni (2.1), (2.3), (12.1). Osserviamo innanzitutto che esse si possono sintetizzare nella relazione

$$\frac{a}{4R}\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}\right)^2 = \varrho^2\left(1 - \frac{\sin^2(\theta/2)}{\varrho^2}\right), \tag{12.4}$$

dove

$$\varrho^2 = \sin^2(\alpha/2) + \{Re^2/(4a)\}\,.\,\cos^2\alpha \tag{12.5}$$

ed α è, al solito, il valore di θ per $s = L$. Notiamo che per $\alpha = \pm \pi/2$ l'effetto della eccentricità non si fa sentire, sicchè la soluzione del nostro problema si riduce a quella del più semplice problema studiato al n. **2**; si ha precisamente una soluzione doppia

$$\sin(\theta/2) = \pm (\sqrt{2}/2) \cdot \mathrm{sn}(s\sqrt{R_1/a},\ \sqrt{2}/2),$$

quando

$$R = R_1 = (a/L^2)\,[K(\sqrt{2}/2)]^2.$$

R_1 è nettamente superiore ad R_c ($R_1 \sim 1{,}35\, R_c$); non pregiudicheremo quindi l'esito della nostra analisi assumendo, per semplicità, che α sia compreso tra $-\pi/2$ e $\pi/2$. Se di più si pensa Re^2/a minore di 1, ϱ^2 risulta essere una funzione crescente con $|\alpha|$ ed il suo massimo nell'intervallo $-\pi/2 \leqslant \alpha \leqslant \pi/2$ vale 1/2.

La (12.4) pone in evidenza che è sempre

$$|\sin(\theta/2)| < \varrho$$

(ϱ essendo inteso positivo); è univoco quindi il cambiamento di variabile

$$\sin\varphi = \varrho^{-1} \cdot \sin(\theta/2),$$

che trasforma la (12.4) nell'altra

$$\frac{a}{R}\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 = 1 - \varrho^2 \sin^2\varphi. \tag{12.6}$$

Cominciamo ora col supporre che la direttrice della trave non presenti inflessioni. Allora $d\varphi/ds$ non si annulla mai, anzi per la (12.1) è sempre positiva e dalla (12.6) segue

$$\sqrt{R/a}\ s = \int_0^{\arcsin[\varrho^{-1}\sin(\theta/2)]} (1 - \varrho^2 \cdot \sin^2\varphi)^{-1/2}\, d\varphi,$$

e per inversione

$$\sin(\theta/2) = \varrho \cdot \mathrm{sn}(\sqrt{R/a}\ s,\ \varrho).$$

Rimane da soddisfare la condizione di compatibilità

$$\sin(\alpha/2) = \varrho \cdot \mathrm{sn}(\sqrt{R/a}\ L,\ \varrho);$$

il comportamento di ϱ, a cui si è accennato, assicura l'univoca determinazione di α per ogni $R < R_1$. Si trovano così le soluzioni previste per diretta intuizione fisica, nelle quali θ è positivo anche se $R > R_c$. Ma è ovvio che esse non possono essere rappresentate in approssimazione dalla (12.3), se $R > R_c$: infatti, esse tendono allora, per $e \to 0$, non a soluzioni identicamente nulle, ma piuttosto a soluzioni non banali del problema del n. **2**.

Se c'è una inflessione, $d\theta/ds$ cambia di segno al crescere di s attraverso il valore s_1, per cui

$$[\sin\{\,\theta(s_1)/2\,\}]^2 = \varrho^2,$$

ossia $\varphi = -\pi/2$; di ciò bisogna tenere conto nell'integrazione della (12.6). In definitiva si trova

$$\sin(\theta/2) = -\,\varrho\cdot\mathrm{sn}\,[\sqrt{R/a}\;s,\;\varrho]$$

per ogni s. L'ascissa del punto di inflessione è data da

$$s_1 = \sqrt{a/R}\;K(\varrho)\,,$$

e poichè K è sempre maggiore di $\pi/2$ ed s non deve superare L ne segue che configurazioni la cui direttrice presenta un punto di inflessione possono esistere solo se R è superiore al valore critico. Un esame della condizione di compatibilità

$$\sin(\alpha/2) = -\,\varrho\cdot\mathrm{sn}\,[\sqrt{R/a}\;L,\;\varrho]$$

permette di accertarne la effettiva esistenza. La (12.3) rappresenta per l'appunto, se $R > R_c$, una approssimazione a questo tipo di soluzione.

È naturale ora chiederci come il nuovo criterio possa essere riallacciato a quelli già illustrati ed alle definizioni del n. **7**. Per dare una risposta a questo interrogativo è necessario esaminare ancora una volta ed ulteriormente precisare il concetto di stabilità. Riprendiamo le considerazioni del n. **7**: là noi abbiamo posto l'accento sul confronto tra il moto (o la configurazione di equilibrio) M di un sistema S (di cui è in discussione la stabilità e che fa seguito a certe circostanze iniziali M_0) ed i moti M' dello stesso sistema conseguenti a certe circostanze iniziali variate M'_0. Ma è fin troppo ovvio che ogni sistema meccanico S (definito da una certa classe di parametri H) può essere in pratica riprodotto solo nei limiti di una certa approssimazione. Sicchè può avere interesse anche il confronto tra il moto M di S e i moti M'' di sistemi S' definiti da valori dei parametri H di poco diversi da quelli che definiscono S, moti poi che derivano da circostanze iniziali ancora poco diverse da M_0. E si può poi suggerire di dare l'attributo di stabili solo ai moti (o alle configurazioni di equilibrio) M tali che tutti gli M'' di poco si scostano da M. Naturalmente una tale definizione piuttosto vaga va qualificata opportunamente perchè possa essere usata con rigore. Ma noi non intendiamo entrare qui in dettagli; ci accontentiamo di aver accennato alla questione. Del resto s'è appena incominciato a precisare, e solo per sistemi estremamente semplici, le condizioni sotto le quali un moto stabile alla POINCARÉ rimane stabile nel nuovo senso più restrittivo. I sistemi i cui moti stabili hanno questa proprietà vanno ravvicinati ai sistemi che si dicono *grossiers* nella teoria delle equazioni differenziali non lineari [41].

Gli sviluppi, molto incompleti, di questo n. **12** si possono interpretare come un parziale esame statico della stabilità della trave caricata di punta secondo la nuova più severa definizione e sembrano indicare che questo sistema è, almeno in un certo senso, un sistema « grossier ».

13. - Stabilità di strutture soggette a scorrimento (creep).

S'è detto che il criterio illustrato al n. **12** ha suggerito procedimenti che hanno permesso la soluzione di numerosi problemi di stabilità di strutture soggette a deformazioni plastico-viscose (creep). Per tali strutture l'instabilità va spesso collegata collo sviluppo di deformazioni disastrose come remota conseguenza di imperfezioni, ma ha di più altri distinti caratteri che finiscono col rendere del tutto inadatte le definizioni di stabilità date sin qui. Neppure la definizione delineata verso la fine del n. **12** si rivela soddisfacente, per quanto sia intesa proprio per sistemi che possono presentare imperfezioni. Ma del resto fenomeni di instabilità dovuti a « creep » possono presentarsi anche in sistemi « non-imperfetti ». Anzi sarà proprio conveniente esaminare un tal sistema, sì che le differenze appaiano in tutta evidenza.

Allo scopo riprendiamo in esame l'arco a tre cerniere già studiato ai nn. **4**, **5** e **8**; aggiungiamo però qui l'ipotesi che l'arco (a sbarre metalliche) sia sottoposto a carico in un ambiente a temperatura abbastanza elevata in modo che sia sensibile l'effetto delle deformazioni plastico-viscose dovute a scorrimento a caldo (per l'acciaio, ad esempio, oltre i 500 gradi centigradi). In riguardo a queste deformazioni si ritiene che una sbarra soggetta a compressione

---

[41] Si veda il trattato di G. SANSONE e R. CONTI citato in annotazione [24], a pag. 327 e segg..

s'accorci irreversibilmente con una velocità $\mathrm{d}(\varepsilon_p/L)/\mathrm{d}t$ ([42]) che dipende dallo sforzo compressivo f e dal periodo t di applicazione del carico

$$\frac{\mathrm{d}(\varepsilon_p/L)}{\mathrm{d}t} = V(f,\ t); \tag{13.1}$$

ad esempio per alcuni acciai speciali in un certo intervallo di temperature si può ritenere che sia

$$\frac{\mathrm{d}(\varepsilon_p/L)}{\mathrm{d}t} = c\, f^2\, t^{-2/3}, \tag{13.2}$$

ove c è una costante dimensionata che dipende dalla temperatura.

Supponiamo ora che l'arco sia caricato all'istante $t = 0$ con un carico $2F$ ($< 2F_c$), che rimane in seguito costante; in base alle considerazioni già svolte ai nn. **4**, **5** e **8**, l'arco va ritenuto inizialmente stabile. Tuttavia, a causa della deformazione plastico-viscosa irreversibile, la lunghezza effettiva delle aste lentamente si riduce; corrispondentemente ridotto va ritenuto il carico critico effettivo, sicchè F va confrontato non tanto con F_c, quanto con la funzione del tempo Φ_c definita da [si confronti la (4.3)]

$$\Phi_c = B\left\{ [\lambda(t)]^{2/3} - D^{2/3} \right\}^{3/2},$$

dove $\lambda(t)$ è la lunghezza ridotta delle aste sottoposte a carico per un intervallo di tempo t. Se λ può raggiungere in un tempo finito T_c il valore λ_c definito dalla equazione

$$F = B\left\{ \lambda_c^{2/3} - D^{2/3} \right\}^{3/2}$$

è da presumere che l'arco venga a trovarsi all'istante $t = T_c$ in condizioni di instabilità. È possibile ora rendersi conto che in realtà T_c è finito comunque piccolo sia F; il risultato dipende da proprietà generali della funzione V che appare nella equazione (13.1), proprietà sulle quali noi intendiamo però qui sorvolare: noi ci accontenteremo di delineare la dimostrazione per il caso speciale definito dalla (13.2). Nello scrivere quella formula si era già presentata la necessità di introdurre il simbolo ε_p ad indicare l'accorciamento irreversibile delle sbarre, in contrasto coll'accorciamento elastico che diremo ε_e. Lasciando θ

([42]) Qui ε_p indica appunto l'accorciamento irreversibile platico; L è la lunghezza della sbarra.

ad indicare l'inclinazione corrente delle sbarre sulla orizzontale, lo sforzo f nelle aste è dato da

$$f = F/(A \sin\theta) ,$$

sicchè per ε_p si ha esplicitamente

$$\frac{d\varepsilon_p}{dt} = \frac{CLF^2}{A^2} \sin^{-2}\theta \cdot t^{-2/3} . \tag{13.3}$$

A determinare ε_e rimane la prima delle (4.1):

$$\varepsilon_e = F/(B \sin\theta);$$

quindi per ε_p si ha anche la relazione

$$\varepsilon_p = L - D/\cos\theta - F/(B \sin\theta) , \tag{13.4}$$

che appunto esprime ε_p come differenza tra l'accorciamento totale e quello elastico delle sbarre.

Combinando le equazioni (13.3), (13.4) si ottiene

$$CLF^2 A^{-2} t^{-2/2} = (FB^{-1} \cos\theta - D \sin^3\theta \cdot \cos^{-2}\theta) (d\theta/dt) . \tag{13.5}$$

Si osservi ora che nell'intervallo di tempo $(0, T_c)$, finito o infinito che esso sia, θ deve diminuire dal valore iniziale θ_0, definito dalla

$$L = F/(B \sin\theta_0) + D/\cos\theta_0,$$

al valore « critico » θ_1 sotto il carico F, definito dall'altra

$$[D^{2/3} + (F/B)^{2/3}]^{3/2} = F/(B \sin\theta_1) + D/\cos\theta_1 .$$

È possibile controllare che θ_1 decresce dal valore θ_0 a zero quando F decresce da F_c a zero. Per integrazione della (13.5) si ottiene dunque

$$T_c^{1/3} = \frac{A^2 D}{3CL F^2} \int_{\theta_0}^{\theta_1} \left(\frac{F}{DB} \cos\theta - \frac{\sin^3\theta}{\cos^2\theta} \right) d\theta ;$$

ove la funzione a secondo membro cresce monotonamente da 0 ad ∞ quando F decresce da F_c allo 0, assumendo quindi un valore finito per ogni valore positivo di F minore di F_c.

È facile immaginare le circostanze fisiche che sono riflesse negli sviluppi ora conclusi. Per quanto il carico sia piccolo il progresso della deformazione irreversibile non può arrestarsi; semai si può notare una accelerazione del processo al passare del tempo. Immediatamente dopo l'istante critico l'arco cede e si rovescia. Questa fase finale del fenomeno non può essere descritta dalle equazioni quasi-statiche impiegate sopra; allo scopo potrebbe servire una generalizzazione degli sviluppi del n. **8**. Però quanto abbiamo detto è già sufficiente per spingerci a classificare il fenomeno tra i fenomeni di instabilità. Ma che tipo di instabilità? Una rapida scorsa alle definizioni suggerite fin qui le rivela tutte inadatte; c'è proprio una difficoltà di principio: come sceglierie la configurazione di equilibrio di confronto? Per superare la difficoltà a tale ruolo si potrebbe forse eleggere la configurazione di equilibrio dell'arco perfettamente elastico; ciò che in sostanza equivarrebbe a immaginare l'accorciamento delle aste per « creep » come conseguenza esso stesso di una « imperfezione »: una notevole estensione, certo, della classe delle imperfezioni! Ma se poi si seguisse tale suggerimento si sarebbe in definitiva condotti a classificare l'arco come una struttura eminentemente instabile, e non sarebbe neppure messo nella giusta luce il ruolo del parametro critico T_c. Unica alternativa pare sia un affinamento proprio di quella definizione di stabilità che si è rigettata, quasi con sdegno, al n. **7**.

Summary.

This is the text of lectures on the concept of mechanical stability, given by the Author at the Institute of Mathematics of the University of Parma during the Academic Year 1958-59.

A number of criteria for stability are critically examined; their advantages and limits are illustrated with examples. Particular consideration is given to the difficulties which must be met in an attempt to propose a general definition of stability.