

FÉNIX R. MARSICANO (\*)

## El desplazamiento de los nodos de las órbitas cometarias. (\*\*)

### Introducción.

En una serie de Notas aparecidas últimamente cuya reseña damos al final de este trabajo, diversos autores, en especial FRED. L. WHIPPLE, han estudiado la composición, forma, extensión, etc. de la cola de los cometas y la perturbación que la variación de masa de los mismos introducen en sus movimientos. Dado que la masa saliente — la cola — está situada en el plano de la órbita, no pueden existir perturbaciones de los nodos y de la inclinación de la misma.

No obstante ello, el autor citado sugiere la presencia de una componente de la velocidad de salida de la masa, normal al plano de la órbita, cuando la velocidad de rotación del cometa se efectúe en un eje inclinado con respecto al plano de la órbita, de tal manera que las partículas de gases y vapores de la cola se sitúen en planos paralelos al ecuador del cometa.

Nosotros esquematizamos convenientemente esta idea de F. L. WHIPPLE, considerando además que el cometa tenga estructura giroscópica, de manera que el eje de rotación propia posea un movimiento de precesión regular.

Planteada la ecuación de perturbación de los nodos, la integramos entre dos valores próximos de la anomalía verdadera, tales que entre ellos pueda considerarse constante el radio vector sol-cometa.

### 1. - Planteo del problema.

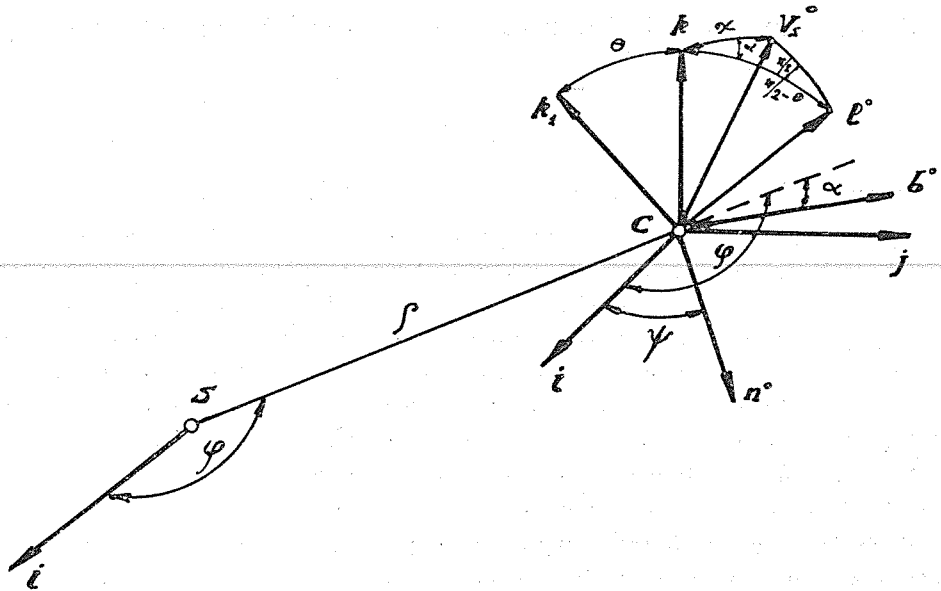
Esquematizamos al cometa (cf. Figura) considerándolo como un punto material (a masa variable), siendo  $k_1$  el versor del eje propio;  $k$  el versor normal al plano de la órbita;  $\theta$  el ángulo de nutación (constante);  $V_0^0$  el versor de la ve-

---

(\*) Dirección: Ingeniero Civil FÉNIX R. MARSICANO, Calle Riego Nuñez 747, Turdera F.C.R., Pcia de Bs. As., Argentina.

(\*\*) Recibido el 20-VI-1959.

locidad relativa de salida de la masa [este versor está situado en el plano normal al eje  $k_1$  (ecuador) del cometa y en el plano normal a la órbita que pasa por el sol  $S$  y por el cometa  $C$ , de esta manera tenemos en cuenta, por una parte, el hecho de que las partículas salientes están situadas en el plano del ecuador y por otra, que la cola se extiende en oposición al sol];  $i$  es el versor con origen en el sol  $S$  dirigido hacia el perihelio;  $\varphi$  la anomalía verdadera del cometa;  $\rho$  el radio vector sol-cometa;  $\psi$  el ángulo de precesión contado desde el eje  $i$



hasta el eje nodal  $n^0$  normal a los ejes  $k, k_1$ ;  $j$  versor normal al eje  $i$  situado en el plano de la órbita;  $b^0$  versor intersección de los planos  $ij$  y  $kk_1$ ;  $l^0$  versor intersección de los planos del ecuador y del  $kk_1$  de manera que  $l^0 \times k = \pi/2 - \theta$ ;  $\chi$  el ángulo que forma el versor  $V_0^0$  con el eje  $k$ ;  $\alpha$  el ángulo de los planos  $kV_0^0$  y  $kl^0$ .

Para el cálculo de la perturbación nodal es necesario el cálculo de la fuerza  $W$  normal al plano de la órbita y para ello es previo el del  $\cos\chi$ . Del triángulo esférico  $kl^0V_0^0$ , rectángulo en  $l^0$ , se obtiene:

$$(1) \quad \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \operatorname{tg}\chi \cos\alpha,$$

pero  $\alpha$  se calcula rápidamente observando la Figura:

$$(2) \quad \alpha = \varphi - \psi - \pi/2,$$

luego

$$(3) \quad \cos \alpha = \operatorname{sen} (\varphi - \psi).$$

De (1) y (2) sigue

$$(4) \quad \operatorname{tg} \chi = \operatorname{cotg} \theta / \cos \alpha,$$

o bien

$$(5) \quad \cos \chi = 1 / \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \chi} = \cos \alpha / \sqrt{\operatorname{cotg}^2 \theta + \cos^2 \alpha},$$

$$(6) \quad \cos \chi = \operatorname{sen} (\varphi - \psi) / \sqrt{\operatorname{cotg}^2 \theta + \operatorname{sen}^2 (\varphi - \psi)}.$$

El módulo de la fuerza perturbadora  $\mathcal{W}$  está dada por:

$$(7) \quad |\mathcal{W}| = |V_s| \cos \chi \frac{dm}{dt},$$

donde  $|V_s|$  es el módulo de la velocidad relativa de la masa saliente. Y  $\frac{dm}{dt}$  la variación de la masa del cometa con respecto al tiempo, que de acuerdo a la ley de F. L. WHIPPLE, es proporcional a la masa e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia sol-cometa:

$$(8) \quad \frac{dm}{dt} = \frac{Cm}{q^2},$$

con  $C$  factor de proporcionalidad.

## 2. - Cálculo de la perturbación de los nodos.

Consideramos un plano fijo de referencia pasante por el sol y, sobre este plano, una semirrecta fija  $\overline{SX}$  pasante también por el sol; llamamos  $\overline{NN}$  la recta intersección del plano de la órbita del cometa con el plano fijo;  $\mathcal{E}$  el ángulo entre  $\overline{SX}$  y  $\overline{SN}$  (longitud de los nodos);  $g$  el ángulo  $\overline{SN}$  con el versor  $\mathbf{i}$  (longitud del perihelio) y  $\gamma$  a la inclinación del plano de la órbita con el plano fijo;  $e$  la excentricidad;  $a$  el semieje mayor de la órbita del cometa (consideramos órbita elíptica);  $n$  la velocidad angular media.

Utilizamos la fórmula del movimiento perturbado para el desplazamiento de los nodos:

$$(9) \quad \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{\sqrt{1-e^2} \operatorname{sen}(g+\varphi)}{na \operatorname{sen}\gamma} \frac{1}{1+e \cos\varphi} |\mathcal{W}|^*.$$

Reemplazando (7) y (8) en (9), teniendo en cuenta la (6) y desarrollando las funciones de  $\varphi$  que aparecen en (9) según las clásicas series en  $\operatorname{sen}(nt)$  y  $\operatorname{cos}(nt)$ , se obtiene una integral del tipo

$$\varepsilon = \int_{t_1}^{t_2} F(t) dt$$

muy difícil de resolver debido a la complicación de la función  $F(t)$ . Por lo tanto integraremos entre dos valores próximos del tiempo  $t_1$  y  $t_2$  tal que en el intervalo  $(t_1, t_2)$  pueda considerarse  $\varrho = \varrho_1 = (\text{constante})$ ;  $\varphi = n_1 t$ , es decir pueda considerarse que la trayectoria es circular y el movimiento no perturbado, uniforme.

En (9)  $|\mathcal{W}|^*$  es la fuerza perturbadora por unidad de masa:

$$(10) \quad |\mathcal{W}|^* = \frac{|\mathcal{W}|}{m} = \frac{|V_s| \cos z}{m} \frac{dm}{dt},$$

que de acuerdo a (8) queda:

$$(11) \quad |\mathcal{W}|^* = \frac{C |V_s| \cos z}{\varrho^2}.$$

Integramos la (9) entre los dos valores  $t_1, t_2$ , teniendo en cuenta las consideraciones del párrafo anterior:

$$(12) \quad [\delta \varepsilon]_{t_1}^{t_2} = \frac{C |V_s|}{n_1 \varrho_1^2 \operatorname{sen}\gamma} \int_{t_1}^{t_2} \frac{\operatorname{sen}(g + n_1 t) \cdot \operatorname{sen}(n_1 t - \psi)}{\sqrt{\cotg^2 \theta + \operatorname{sen}^2(n_1 t - \psi)}} dt.$$

Por ser la precesión constante podemos poner:

$$(13) \quad \psi = \omega t \quad \text{con} \quad \omega = \text{constante}.$$

La raíz cuadrada del denominador la podemos descomponer en suma de potencias como sigue:

$$(14) \left\{ \begin{aligned} [\cotg^2 \theta + \operatorname{sen}^2 (n_1 t - \psi)]^{-1/2} &= \frac{1}{\cotg \theta} \left[ 1 + \frac{\operatorname{sen}^2 (n_1 - \omega) t}{\cotg^2 \theta} \right]^{-1/2} = \\ &= \frac{1}{\cotg \theta} \left[ 1 - \frac{1}{2} \frac{\operatorname{sen}^2 (n_1 - \omega) t}{\cotg^2 \theta} + \frac{3}{8} \frac{\operatorname{sen}^4 (n_1 - \omega) t}{\cotg^4 \theta} - \dots \right], \end{aligned} \right.$$

desarrollo válido para  $\{\operatorname{sen}^2 (n_1 - \omega) t\} / \cotg^2 \theta < 1$  ó sea para  $\cotg^2 \theta > 1$  ó  $\theta < \pi/4$ .

Por otra parte  $\operatorname{sen} (g + n_1 t) = \operatorname{sen} g \cos n_1 t + \cos g \operatorname{sen} n_1 t$ , de manera que la (12) se descompone en una suma de integrales:

$$(15) \left\{ \begin{aligned} [\delta \Xi]_{t_1}^{t_2} &= \frac{C |V_s|}{n_1 \rho_1^3 \operatorname{sen} \gamma \cotg \theta} \left[ \operatorname{sen} g \cdot \int_{t_1}^{t_2} \cos n_1 t \operatorname{sen} (n_1 - \omega) t \cdot \right. \\ &\quad \left. \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{\operatorname{sen}^2 (n_1 - \omega) t}{\cotg^2 \theta} + \frac{3}{8} \frac{\operatorname{sen}^4 (n_1 - \omega) t}{\cotg^4 \theta} - \dots \right) dt + \cos g \cdot \right. \\ &\quad \left. \int_{t_1}^{t_2} \operatorname{sen} n_1 t \operatorname{sen} (n_1 - \omega) t \cdot \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{\operatorname{sen}^2 (n_1 - \omega) t}{\cotg^2 \theta} + \frac{3}{8} \frac{\operatorname{sen}^4 (n_1 - \omega) t}{\cotg^4 \theta} - \dots \right) dt \right]. \end{aligned} \right.$$

Veamos las integrales del tipo siguiente:

$$(16) \quad \int_{t_1}^{t_2} \cos n_1 t \operatorname{sen} (n_1 - \omega) t dt,$$

$$(17) \quad \int_{t_1}^{t_2} \operatorname{sen} n_1 t \operatorname{sen} (n_1 - \omega) t dt,$$

que se integran fácilmente descomponiendo los productos en sumas, de acuerdo a las fórmulas siguientes:

$$\operatorname{sen} (2n_1 - \omega) t = \operatorname{sen} n_1 t \cos (n_1 - \omega) t + \cos n_1 t \operatorname{sen} (n_1 - \omega) t,$$

$$\operatorname{sen} \omega t = \operatorname{sen} n_1 t \cos (n_1 - \omega) t - \cos n_1 t \operatorname{sen} (n_1 - \omega) t.$$

Restando miembro a miembro:

$$(18) \quad \text{sen } (2n_1 - \omega) t - \text{sen } \omega t = 2 \cos n_1 t \text{ sen } (n_1 - \omega) t.$$

Per otra parte:

$$\cos (2n_1 - \omega) t = \cos n_1 t \cos (n_1 - \omega) t - \text{sen } n_1 t \text{ sen } (n_1 - \omega) t,$$

$$\cos \omega t = \cos n_1 t \cos (n_1 - \omega) t + \text{sen } n_1 t \text{ sen } (n_1 - \omega) t.$$

Restando miembro a miembro:

$$(19) \quad \cos (2n_1 - \omega) t - \cos \omega t = -2 \text{ sen } n_1 t \text{ sen } (n_1 - \omega) t.$$

La integral (16) de acuerdo a la (18) se resuelve inmediatamente:

$$(20) \quad \left\{ \begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \cos n_1 t \text{ sen } (n_1 - \omega) t \, dt &= \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \text{sen } (2n_1 - \omega) t \, dt - \\ &- \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \text{sen } \omega t \, dt = \left[ -\frac{\cos (2n_1 - \omega) t}{2(2n_1 - \omega)} + \frac{\cos \omega t}{2\omega} \right]_{t_1}^{t_2}; \end{aligned} \right.$$

lo mismo la integral (17):

$$(21) \quad \left\{ \begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \text{sen } n_1 t \text{ sen } (n_1 - \omega) t \, dt &= -\frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \cos (2n_1 - \omega) t \, dt + \\ &+ \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \cos \omega t \, dt = \left[ -\frac{\text{sen } (2n_1 - \omega) t}{2(2n_1 - \omega)} + \frac{\text{sen } \omega t}{2\omega} \right]_{t_1}^{t_2}. \end{aligned} \right.$$

Si tomamos el siguiente término del desarrollo (15) aparecen integrales del siguiente tipo:

$$(22) \quad \int_{t_1}^{t_2} \cos n_1 t \text{ sen}^3 (n_1 - \omega) t \, dt, \quad (23) \quad \int_{t_1}^{t_2} \text{sen } n_1 t \text{ sen}^3 (n_1 - \omega) t \, dt.$$

Con la fórmula (18) y la descomposición del seno cuadrado en función del coseno del arco doble, se tiene:

$$(24) \quad \text{sen}^2 (n_1 - \omega) t = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2 (n_1 - \omega) t,$$

$$(25) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_{t_1}^{t_2} \text{sen}^3 (n_1 - \omega) t \cos n_1 t \, dt = \\ = \left[ -\frac{\cos (2n_1 - \omega) t}{4 (2n_1 - \omega)} + \frac{\cos (4n_1 - 3\omega) t}{8 (4n_1 - 3\omega)} + \frac{\cos \omega t}{8\omega} + \right. \\ \left. + \frac{\cos (-\omega t)}{4\omega} + \frac{\cos (2n_1 - 3\omega) t}{8 (2n_1 - 3\omega)} - \frac{\cos (2n_1 - \omega) t}{8 (2n_1 - \omega)} \right]_{t_1}^{t_2}. \end{array} \right.$$

Empleando la fórmula (19) se tiene asimismo:

$$(26) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_{t_1}^{t_2} \text{sen } n_1 t \text{ sen}^3 (n_1 - \omega) t \, dt = \\ = \left[ -\frac{3 \text{sen } (2n_1 - \omega) t}{8 (2n_1 - \omega)} - \frac{\text{sen } (2n_1 - 3\omega) t}{8 (2n_1 - 3\omega)} + \right. \\ \left. + \frac{\text{sen } (4n_1 - 3\omega) t}{8 (4n_1 - 3\omega)} - \frac{3 \text{sen } (-\omega t)}{8 \omega} \right]_{t_1}^{t_2}. \end{array} \right.$$

Con las soluciones (20), (21), (25) y (26), despreciando además los términos que contienen  $\text{cotg}^4 \theta$  y superiores como divisor, la (15) adquiere la forma definitiva siguiente:

$$(27) \quad \left\{ \begin{array}{l} [\delta \Xi]_{t_1}^{t_2} = \\ = \frac{C |V_s|}{n_1 q_1^3 \text{sen } \gamma \text{cotg } \theta} \left[ \text{sen } g \cdot \left\{ \frac{\cos \omega t}{2\omega} - \frac{\cos (2n_1 - \omega) t}{2 (2n_1 - \omega)} + \right. \right. \\ + \frac{\cos (2n_1 - \omega) t}{8 (2n_1 - \omega) \text{cotg}^2 \theta} - \frac{\cos (4n_1 - 3\omega) t}{16 (4n_1 - 3\omega) \text{cotg}^2 \theta} - \frac{\cos \omega t}{16\omega \text{cotg}^2 \theta} - \frac{\cos \omega t}{8\omega \text{cotg}^2 \theta} \\ \left. - \frac{\cos (2n_1 - 3\omega) t}{16 (2n_1 - 3\omega) \text{cotg}^2 \theta} + \frac{\cos (2n_1 - \omega) t}{16 (2n_1 - \omega) \text{cotg}^2 \theta} \right\} + \cos g \cdot \left\{ \frac{\text{sen } \omega t}{2\omega} - \right. \\ \left. - \frac{\text{sen } (2n_1 - \omega) t}{2 (2n_1 - \omega)} + \frac{3 \text{sen } (2n_1 - \omega) t}{16 (2n_1 - \omega) \text{ctg}^2 \theta} + \frac{\text{sen } (2n_1 - 3\omega) t}{16 (2n_1 - 3\omega) \text{cotg}^2 \theta} - \right. \\ \left. - \frac{\text{sen } (4n_1 - 3\omega) t}{16 (4n_1 - 3\omega) \text{ctg}^2 \theta} - \frac{3 \text{sen } \omega t}{16 \omega \text{cotg}^2 \theta} \right\} \Big]_{t_1}^{t_2}. \end{array} \right.$$

Para tener idea del orden de magnitud del corrimiento de los nodos, integraremos la ecuación (27) entre la anomalía verdadera  $\varphi=0$  (pase al perihelio) y la anomalía  $\varphi = \pi/4$  (la influencia del sol se extiende hasta los valores límites 1,66 y 2,8 rad., según el cometa de que se trate).

Supondremos además que el radio vector se mantiene constante e igual a 2 U.A. (la influencia del sol se extiende hasta las 3 U.A. para el Brooks). La variación logarítmica de masa varía entre  $(\Delta m)/m = 10^{-3} \cdot 4,8$  y  $(\Delta m)/m = 10^{-3} \cdot 2,9$  por período, con lo que la constante  $C$  de la fórmula (8) queda:

$$C = 4 \cdot 10^{-3} n \rho^2 / (2\pi) \text{ tomando } (\Delta m)/m = 4 \cdot 10^{-3} \text{ por período.}$$

La velocidad  $V_s$  es del orden de los  $5 \cdot 10^6$  cm  $\text{seg}^{-1}$  y además es función de la distancia al sol, anulándose para  $\rho = 2$  U.A. ó  $\rho = 3$  U.A. según el cometa; a pesar de ello la consideraremos constante e igual al valor dado en el intervalo  $0 \leq \varphi \leq \pi/4$ . La velocidad angular media  $n$  es del orden de los  $5 \cdot 10^{-8}$  rad  $\text{seg}^{-1}$ . La velocidad angular de la precesión  $\omega$  la tomamos igual a la mitad de  $n$ .

La inclinación  $\theta$  del eje propio del cometa con respecto al eje normal al plano de la órbita la suponemos de  $\pi/6$ . Sea además  $\pi/2$  la longitud  $g$  del perihelio y  $\pi/6$  la inclinación  $\gamma$  del plano de la órbita.

Con todos estos supuestos, el corrimiento de los nodos, entre  $\varphi = 0$  y  $\varphi = \pi/4$  vale:

$$\begin{aligned} [\delta \mathcal{E}]_{\varphi=nt=0}^{\varphi=nt=\pi/4} &= \frac{\rho^2 \cdot 4 \cdot 10^{-3} n \cdot 5 \cdot 10^6}{n \cdot 2\pi \cdot \rho^3 \cdot \text{sen } \pi/6 \cdot \text{cotg } \pi/6} \left[ \text{sen } \pi/2 \cdot \left( \frac{\cos (nt/2)}{n} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\cos (3nt/2)}{3n} + \frac{\cos (3nt/2)}{3n \cdot (1,73)^2/4} - \frac{\cos (5nt/2)}{40 \cdot n \cdot (1,73)^2} - \frac{\cos (nt/2)}{8n \cdot (1,73)^2} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\cos (nt/2)}{4n \cdot (1,73)^2} - \frac{\cos (nt/2)}{8n \cdot (1,73)^2} + \frac{\cos (3nt/2)}{24 \cdot n \cdot (1,73)^2} \right) \right]_{nt=0}^{nt=\pi/4} = \\ &= \frac{4 \cdot 10^{-3} \cdot 5 \cdot 10^6}{2n \cdot 2 \cdot 15 \cdot 10^{12} \cdot (0,50) \cdot (1,73) \cdot 10^{-8} \cdot 5} \left( \cos \pi/8 - \frac{\cos 3\pi/8}{3} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\cos 3\pi/8}{3 \cdot (1,73)^2/4} - \frac{\cos 5\pi/8}{40 \cdot (1,73)^2} - \frac{\cos \pi/8}{8 \cdot (1,73)^2} - \frac{\cos \pi/8}{4 \cdot (1,73)^2} - \frac{\cos \pi/8}{8 \cdot (1,73)^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\cos 3\pi/8}{24 \cdot (1,73)^2} - 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{3 \cdot (1,73)^2/4} + \frac{1}{40 \cdot (1,73)^2} + \frac{1}{8 \cdot (1,73)^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4 \cdot (1,73)^2} + \frac{1}{8 \cdot (1,73)^2} - \frac{1}{24 \cdot (1,73)^2} \right) = \frac{2 \cdot (0,86)}{2\pi \cdot 15 \cdot (1,73) \cdot 5} \cong \\ &\cong \frac{1}{150 \cdot \pi} \cong \frac{1}{471} \cong \frac{2}{1000} \text{ radianes.} \end{aligned}$$



Con las condiciones y límites supuestos, el corrimiento de los nodos es de aproximadamente dos milésimos de radian.

La precesión dada por la fórmula (13) debiera estar afectada de una constante aditiva, el haberla hecho cero, indica que el ángulo de precesión  $\psi$  lo medimos a partir del perihelio.

*Consejo Nacional de Investigaciones C. y Técnicas.*

### Bibliografía.

1. F. L. WHIPPLE: *A comet model I. The acceleration of comet Encke*, Astr. J. 3 (1950), ( Enero-Mayo, n. 2).
2. P. L. BHATNAGAR and F. L. WHIPPLE: *Accretion of matter by a satellite*, Astr. J. 59 (1954), (Abril, n. 3).
3. F. L. WHIPPLE: *Comments on the Sunward tail of comet Arend-Roland*, Harvard Reprint (2) 105, Reprinted from «Sky and Telescope» 16 (1957), (Julio, n. 9).
4. C. WHITNEY: *Comet Outbursts*, Astr. J. 122 (1955), (Julio, n. 1, p. 190).
5. L. F. BIERMANN and R. LÜST: *The tails of comets*, Scient. American, Octubre 1958.
6. G. GARCÍA: *Sobre el movimiento de un punto material de masa variable sometido a la acción de la atracción y de la resistencia del medio*, Actas Acad. Nac. C.E.F. y N. de Lima 21 (1958), (fasc. 3º, 4º).

