Riv. Mat. Univ. Parma (2) 1 (1960), 21-28

MARIA ANTONIETTA BARATTA (*)

Effetto della rotazione terrestre sul moto attorno al baricentro per un solido di massa variabile. (**)

1. – Introduzione.

In questa nota mi occupo del moto, attorno al suo centro di massa G di un solido, di massa variabile, a struttura giroscopica, nel caso che sia trascurabile il momento rispetto a G di tutte le forze, ad eccezione di quelle apparenti dovute alla rotazione terrestre.

In tali condizioni vengono scritte le equazioni di moto, stabilendo l'esistenza di un solo integrale primo, contrariamente a quanto accade per i solidi di massa costante [1] (1).

Non ostante questa circostanza sfavorevole, si riesce a dimostrare l'esistenza di una classe di precessioni regolari, che possono anche degenerare in rotazioni uniformi.

2. Impostazione del problema.

Sia S un solido a struttura giroscopica di massa m variabile nel tempo, in modo però tale da non alterarne la configurazione giroscopica.

Sia S soggetto, oltre che alla forza peso, alle forze aerodinamiche, alle forze dovute all'emissione di massa, anche alle forze apparenti dovute alla rotazione terrestre.

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università, Parma, Italia.
(**) Ricevuto il 17-2-1960.
(1) I numeri in parentesi quadra si riferiscono alla Bibliografia posta alla fine del lavoro.

Indico con:

G, il centro di massa del solido S;

$\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$, i versori di una terna $\mathfrak{T}_0$ centrale principale d'inerzia, con $\boldsymbol{k}$ versore dell'asse giroscopisco;

$\boldsymbol{\omega}$, la velocità di rotazione di S rispetto a una terna di riferimento solidale con la terra;

p, q, r, le componenti di $\boldsymbol{\omega}$ rispetto a $\mathfrak{T}_0$;

σ, la velocità di rotazione terrestre supposta costante;

$\mathcal{A}_0, \mathcal{C}_0$, i momenti principali d'inerzia equatoriale ed assiale del sistema;

μ_i, $(i = 1, 2, 3,)$ le componenti in $\mathfrak{T}_0$ del momento risultante rispetto a G delle forze dovute alla variazione di massa;

$\mathfrak{M}_i$, $(i = 1, 2, 3,)$ le componenti in $\mathfrak{T}_0$ del momento risultante rispetto a G delle forze aerodinamiche;

M_i, $(i = 1, 2, 3,)$ le componenti in $\mathfrak{T}_0$ del momento delle forze apparenti dovute alla rotazione terrestre, anch'esso calcolato rispetto a G.

Non ostante la variabilità della massa, l'equazione dei momenti assume la forma (analoga a quella delle equazioni di EULERO) ([2], pp. 361-373)

$$
\left\{
\begin{aligned}
&\mathcal{A}_0\,\dot{p} - (\mathcal{A}_0 - \mathcal{C}_0)pr = \mathfrak{M}_1 - \mu_1 + M_1 \\
&\mathcal{A}_0\,\dot{q} + (\mathcal{A}_0 - \mathcal{C}_0)qr = \mathfrak{M}_2 - \mu_2 + M_2 \\
&\mathcal{C}_0\dot{r} \qquad\qquad\qquad\;\; = \mathfrak{M}_3 - \mu_3 + M_3 \,.
\end{aligned}
\right. \tag{1}
$$

Nei numeri seguenti verrà studiata, in particolare, l'influenza della rotazione terrestre, sul moto di S, trascurando, in questo primo approccio, il momento delle forze aerodinamiche e quello delle forze di getto, rispetto a G, essendo nullo rispetto a tale punto il momento delle forze peso. Il momento delle forze di getto è effettivamente trascurabile, ogni volta che il getto avviene con simmetria.

3. – Il momento risultante $\boldsymbol{M}$ delle forze dovute alla rotazione terrestre.

Avendo supposto la massa di S variabile col tempo, non si possono più ritenere, a priori, validi i calcoli relativi a corpi di massa costante ed è necessario, perciò, stabilire di nuovo la forma del momento $\boldsymbol{M}$ rispetto a G delle forze apparenti.

Sia Σ_t, il campo occupato dalla massa di S, all'istante t, P un punto generico di Σ_t e $\varrho(P)$ la densità materiale.

Si avrà:

$$\boldsymbol{M} = -2 \int_{\Sigma_t} \varrho(P-G) \wedge (\boldsymbol{\sigma} \wedge \dot{\boldsymbol{P}})\, \mathrm{d}\Sigma\,. \tag{2}$$

Introdotta ora una terna di riferimento $\mathcal{T}_R$ solidale con S di origine O, appartenente a $\boldsymbol{k}$ e parallela a $\mathcal{T}_0$ e detta $\dot{\boldsymbol{G}}_R$ la velocità di G relativamente a $\mathcal{T}_R$ è:

$$\dot{\boldsymbol{P}} = \dot{\boldsymbol{G}} - \dot{\boldsymbol{G}}_R + \boldsymbol{\omega} \wedge (P-G) = \boldsymbol{v}_\tau + \boldsymbol{\omega} \wedge (P-G). \tag{3}$$

Ne risulta quindi:

$$\boldsymbol{M} = -2 \Big\{ \int_{\Sigma t} \varrho(P-G) \wedge (\boldsymbol{\sigma} \wedge \boldsymbol{v}_\tau)\, \mathrm{d}\Sigma + \int_{\Sigma t} \varrho(P-G) \wedge [\boldsymbol{\sigma} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge (P-G))]\, \mathrm{d}\Sigma \Big\}. \tag{4}$$

Essendo $\boldsymbol{\sigma}$ e $\boldsymbol{v}_\tau$ due vettori indipendenti da P, il primo integrale della (4) è nullo e si ha:

$$\boldsymbol{M} = 2 \int_{\Sigma t} \varrho(P-G) \wedge [\boldsymbol{\omega} \wedge (P-G)] \wedge \boldsymbol{\sigma}\, \mathrm{d}\Sigma\,. \tag{5}$$

Per la supposta simmetria di S rispetto a Gz, tenendo conto delle ben note espressioni di $\mathcal{A}_0$ e $\mathcal{C}_0$, si ottiene, in fine, per $\boldsymbol{M}$ la seguente espressione vettoriale

$$\boldsymbol{M} = \mathcal{C}_0(t)\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{\sigma} + 2[\mathcal{A}_0(t) - \mathcal{C}_0(t)]\boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\sigma} \times \boldsymbol{k})\boldsymbol{k}\,. \tag{6}$$

4. - Studio del moto di S attorno a G nel caso di $\mu = \mathcal{M} = 0$.

Passo quindi a considerare il moto del solido S, attorno a G nel caso, in cui l'unico momento non nullo rispetto a tale punto, delle forze agenti sul sistema sia quello dovuto alle forze apparenti della rotazione terrestre.

Essendo $\boldsymbol{\omega} = \dot{\boldsymbol{k}} \wedge \boldsymbol{k} + r\boldsymbol{k}$ ([1], pag. 2) e $\boldsymbol{M}$ espresso dalla (6) il sistema (1) si traduce in:

$$\mathcal{A}_0 \boldsymbol{k} \wedge \ddot{\boldsymbol{k}} + \mathcal{C}_0 \dot{r}\boldsymbol{k} + \mathcal{C}_0 r\dot{\boldsymbol{k}} = \mathcal{C}_0 \boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{\sigma} + 2(\mathcal{A}_0 - \mathcal{C}_0)\boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\sigma} \times \boldsymbol{k})\boldsymbol{k}, \tag{7}$$

che non differisce dall'analoga equazione per un solido di massa costante se non per la variabilità, col tempo, di $\mathcal{A}_0$ e $\mathcal{C}_0$ ([1], pag. 7).

Moltiplicando la (7) scalarmente per $\boldsymbol{k}$ e tenendo presente che $\dot{\boldsymbol{k}} \times \boldsymbol{k} = 0$, si ha subito, non ostante la attuale variabilità di $\mathcal{A}_0$, $\mathcal{C}_0$

$$\dot{r} = -\boldsymbol{\sigma} \times \dot{\boldsymbol{k}}, \tag{8}$$

ciò che implica, per la supposta costanza di $\boldsymbol{\sigma}$, la validità dell'integrale primo

$$r = r_0 - \boldsymbol{\sigma} \times (\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k}_0), \qquad (r_0,\ \boldsymbol{k}_0,\ \text{costanti}). \tag{9}$$

Moltiplicando, poi, scalarmente per $\boldsymbol{k} \wedge \dot{\boldsymbol{k}}$ si ottiene

$$\mathcal{A}_0(\boldsymbol{k} \wedge \ddot{\boldsymbol{k}}) \times (\boldsymbol{k} \wedge \dot{\boldsymbol{k}}) = \mathcal{C}_0 r(\boldsymbol{k} \wedge \boldsymbol{\sigma}) \times (\boldsymbol{k} \wedge \dot{\boldsymbol{k}})$$

e quindi

$$\mathcal{A}_0 \frac{\mathrm{d}(\boldsymbol{k} \wedge \dot{\boldsymbol{k}})}{\mathrm{d}t} = -\mathcal{C}_0 \frac{\mathrm{d}r^2}{\mathrm{d}t}. \tag{10}$$

Posto $\alpha(t) = \mathcal{C}_0/\mathcal{A}_0$ poichè è $(\boldsymbol{k} \wedge \dot{\boldsymbol{k}})^2 = \dot{\boldsymbol{k}}^2$ la (10) equivale a

$$\frac{\mathrm{d}(\dot{\boldsymbol{k}})^2}{\mathrm{d}t} = -\alpha(t) \frac{\mathrm{d}r^2}{\mathrm{d}t}. \tag{11}$$

Se $\alpha(t)$ si riducesse a costante senza che tali divenissero $\mathcal{A}_0$ e $\mathcal{C}_0$ la (11) fornirebbe un ulteriore integrale primo della (7), come per il caso di solidi di massa costante ([1], pag. 8). In generale invece ciò non accade.

Se, infine, si moltiplica la (6) scalarmente per il vettore costante $\boldsymbol{\sigma}$ si ottiene la relazione:

$$\mathcal{A}_0(\boldsymbol{k} \wedge \ddot{\boldsymbol{k}}) \times \boldsymbol{\sigma} + \mathcal{C}_0(\dot{r}\boldsymbol{k} + r\dot{\boldsymbol{k}}) \times \boldsymbol{\sigma} = 2(\mathcal{A}_0 - \mathcal{C}_0)(\boldsymbol{\sigma} \times \boldsymbol{k})(\boldsymbol{\sigma} \times \dot{\boldsymbol{k}}) \tag{12}$$

da cui

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[(\boldsymbol{k} \wedge \dot{\boldsymbol{k}}) \times \boldsymbol{\sigma} - (\boldsymbol{\sigma} \times \boldsymbol{k})\boldsymbol{k}] \times \boldsymbol{\sigma} = -\alpha(t) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[r\boldsymbol{k} + (\boldsymbol{\sigma} \times \boldsymbol{k})\boldsymbol{k}] \times \boldsymbol{\sigma}$$

$$\left\{ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\boldsymbol{k} \wedge \dot{\boldsymbol{k}} - (\boldsymbol{\sigma} \times \boldsymbol{k})\boldsymbol{k}] + \alpha(t) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[r\boldsymbol{k} + (\boldsymbol{\sigma} \times \boldsymbol{k})\boldsymbol{k}] \right\} \times \boldsymbol{\sigma} = 0. \tag{13}$$

Può darsi che quest'ultima relazione non sia indipendente dalla (12) e dalla (9). Perchè ciò si verifichi occorre e basta che per ogni t si abbia

$$\boldsymbol{k} \wedge (\boldsymbol{k} \wedge \dot{\boldsymbol{k}}) \times \boldsymbol{\sigma} = 0. \tag{14}$$

Infatti le (9), (12), (13) sono state ottenute moltiplicando la (6) scalarmente per $\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{k} \wedge \dot{\boldsymbol{k}}$, e $\boldsymbol{\sigma}$ e la (14) esprime proprio la complanarità dei tre vettori.

Valida la (14), la (13) si riduce a

$$\boldsymbol{\sigma} \times \dot{\boldsymbol{k}} = 0,$$

da cui $\boldsymbol{\sigma} \times \boldsymbol{k} = \text{cost}$ e quindi, per la (9), $r = \text{cost}$.

4. - Precessioni regolari e rotazioni uniformi per S.

Cerco ora, se per il solido S di massa variabile, a struttura giroscopica, soggetto esclusivamente alle forze apparenti dovute alla rotazione terrestre, sono ancora possibili precessioni regolari.

Se è

$$r = r_0 = \text{cost.}, \tag{15}$$

il moto si riduce attualmente ad una precessione regolare.

In questo caso, infatti, da (9) risulta

$$\boldsymbol{\sigma} \times \boldsymbol{k} = \text{cost.}, \tag{16}$$

quindi, essendo $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{k} \wedge \dot{\boldsymbol{k}} + r\boldsymbol{k}$,

$$\boldsymbol{\sigma} \times \dot{\boldsymbol{k}} \equiv \boldsymbol{\sigma} \wedge \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{\omega} = 0,$$

ciò che esprime, insieme alla (10), la costanza dell'angolo formato da $\boldsymbol{k}$ con $\boldsymbol{\sigma}$, e la complanarità dei tre vettori.

D'altra parte dalla (11) si ha

$$|\dot{\boldsymbol{k}}| = \text{cost.} \tag{17}$$

Ciò implica che il componente equatoriale di $\boldsymbol{\omega}$ abbia modulo costante. Quindi' ricordando anche la (15), si può concludere che $\boldsymbol{\omega}$ è un vettore di modulo costante. Dopo di che si verifica, come in precedenza è stato accertato, che anche la (13) rimane automaticamente soddisfatta.

È evidente che in queste condizioni gli angoli che $\boldsymbol{\omega}$ forma con $\boldsymbol{k}$ e $\boldsymbol{\sigma}$ risultano pure costanti e quindi si può concludere che $\boldsymbol{\omega}$ ammette una decomposizione in due vettori $\boldsymbol{\omega}_1$ e $\boldsymbol{\omega}_2$ il primo costante diretto secondo $\boldsymbol{\sigma}$ e l'altro, di modulo costante, diretto secondo $\boldsymbol{k}$.

Il moto di S attorno al suo centro di massa è quindi una precessione regolare, avente per asse di figura l'asse giroscopico e per asse di precessione la parallela a $\boldsymbol{\sigma}$ per G.

Viceversa la possibilità dinamica di una tale classe di moti è accertata ove si dimostri la possibilità di scegliere una costante λ, in modo che

$$\dot{\boldsymbol{k}} = \lambda(\boldsymbol{\sigma} \wedge \boldsymbol{k}) \tag{18}$$

verifichi identicamente le equazioni di moto.

Ammessa valida tale espressione di $\boldsymbol{k}$ si ha, infatti, $\boldsymbol{\sigma} \times \dot{\boldsymbol{k}} = 0$ e perciò, per la (8), $r = \text{cost}$. Sostituendo poi in (7), l'equazione risulta identicamente soddisfatta se, posto, come in precedenza $\alpha(t) = \mathcal{C}_0(t)/(\mathcal{A}_0(t)$ e, per brevità $a = r_0 + \boldsymbol{\sigma} \times \boldsymbol{k}_0$, sarà identicamente soddisfatta la relazione

$$\lambda(\boldsymbol{\sigma} \times \boldsymbol{k})(\lambda + 2) - \alpha(t)(a\lambda + r_0) = 0\,. \tag{19}$$

Ciò si verifica solo se è contemporaneamente

$$\begin{cases} \lambda(\boldsymbol{\sigma} \times \boldsymbol{k})(\lambda + 2) = 0\,, \\ a\lambda + r_0 = 0\,. \end{cases} \tag{20}$$

Dalla (20) discendono tre possibilità:

$$\text{I)} \qquad \begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda = -r_0/a \end{cases}$$

che porta, come è facile verificare, al caso banale $\boldsymbol{\omega} = 0$.

$$\text{II)} \qquad \begin{cases} \boldsymbol{\sigma} \times \boldsymbol{k} = 0 \\ \lambda = -r_0/a \end{cases}$$

e perciò, tenuta presente l'espressione di a, $\lambda = -1$. Essendo poi per le (18

$$\boldsymbol{\omega} = \lambda\boldsymbol{\sigma} - \lambda\boldsymbol{\sigma} \times \boldsymbol{k} + r\boldsymbol{k}\,,$$

si ottiene:

$$\boldsymbol{\omega} = -\boldsymbol{\sigma} + r_0\boldsymbol{k}\,.$$

Abbiamo quindi una effettiva precessione regolare con velocità propria $r_0\boldsymbol{k}$ e velocità di precessione $-\boldsymbol{\sigma}$, e con gli assi di rotazione propria e di precessione ortogonali.

III)
$$\begin{cases} \lambda = -2 \\ \lambda = -r_0/a, \end{cases}$$

da cui, essendo $a = r_0 + \boldsymbol{\sigma} \times \boldsymbol{k}_0$,

$$\begin{cases} \lambda = -2 \\ \boldsymbol{\sigma} \times \boldsymbol{k} = -r_0/2\,. \end{cases} \tag{21}$$

Di qui

$$\dot{\boldsymbol{k}} = -2\boldsymbol{\sigma} \wedge \boldsymbol{k}$$

e quindi

$$\boldsymbol{\omega} = -2\boldsymbol{\sigma}\,.$$

Si realizza, in questo caso, una rotazione uniforme attorno a una retta uscente da G e parallela a $\boldsymbol{\sigma}$, con velocità in modulo doppia di quella della rotazione terrestre.

Fissato ad arbitrio r_0, la direzione di $\boldsymbol{k}$ resta perfettamente individuata dalla (21_{II}).

Riassumendo, quindi, si può concludere che anche per solidi giroscopici di massa variabile, girevoli attorno al centro di massa G, nell'ipotesi che siano trascurabili rispetto a G i momenti di tutte le forze agenti su S ad eccezione di quello delle forze apparenti dovute alla rotazione terrestre, sono possibili precessioni regolari che possono degenerare in rotazioni uniformi.

Bibliografia.

1. A. Signorini, *Complementi alla dinamica dei giroscopi e equazioni del problema completo della Balistica esterna*, Atti Accad. Naz. Lincei Memorie Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (8) **1**, 1-2 (1947) 4-19.

2. T. Manacorda, *Il moto di un corpo di massa variabile*, Riv. Mat. Univ. Parma **3**, (1952) 361-372.