Riv. Mat. Univ. Parma (2) 1 (1960), 45-92

P. V. GROSJEAN (*)

Fondements algébriques de l'analyse tensorielle et synthèse en géométrie semi-métrique de quelques travaux de l'école Lichnerowicz (**)

Introduction.

Les travaux auxquels il est fait allusion dans le titre sont ceux de Mesdames IDA CATTANEO-GASPARINI et FRANÇOISE MAURER-TISON, ainsi que ceux de l'auteur du présent mémoire. Comme ces noms seront très souvent cités par la suite, nous les désignerons par leurs initiales respectives, à savoir I.C.G., F.M.T. et P.V.G. . A une date plus récente, le nom de M. MARCEL LENOIR est venu se joindre à ceux que nous venons de citer. En définitive, ces quatre auteurs auront abordé le problème des connexions affines, ainsi que celui des théories unitaires, en suivant en général la voie tracée par M. LICHNEROWICZ. On trouvera dans la Bibliographie la liste des travaux de ces cinq auteurs en relation avec l'objet du présent mémoire.

La géométrie du champ unifié d'EINSTEIN peut s'élaborer en partant de deux points de vue différents. D'une part, il y a le point de vue « affine orthodoxe », le mieux représenté par HLAVATY [5] (1), et qui fut aussi celui d'EINSTEIN [1]: Pour déterminer la connexion affine de l'Univers à 4 dimensions, il suffit d'introduire un tenseur dont les composantes dissymétriques g_{ij} sont reliées aux coefficients dissymétriques L^k_{ij} de la connexion par le groupe des fameuses équations d'EINSTEIN [7]:

$$g_{\underset{+-}{ij;k}} \equiv \partial_k g_{ij} - g_{lj} L^l_{ik} - g_{il} L^l_{kj} = 0$$

(*) Maître de Conférences à l'Université Tunisienne - Tunis.

(**) Ricevuto il 27 Febbraio 1960.

(1) I numeri in parentesi [ ] si riferiscono alla bibliografia posta alla fine della Memoria.

La dite connexion est par ailleurs caractérisée par un vecteur de torsion identiquement nul:

$$L^k_{[kj]} = 0 \; .$$

Nous avons dit dans notre thèse ce que nous pensions de ce point de vue: Bien qu'il conduise à des développements mathématiques à la fois irréprochables et complets, il met la Théorie Unitaire dans une position d'infériorité vis-à-vis de la Relativité Générale. Celle-ci, en effet, dans le cas extérieur tout au moins, trouvait tous ses postulats dans une géométrie pré-existante, la gémétrie métrique de RIEMANN. La Théorie Unitaire, par contre, introduit dès la première page un tenseur dissymétrique fondamental qui se trouve à la fois dépourvu de tout sens géométrique connu et totalement étranger aux postulats de la géométrie affine. Or, comme ce tenseur reprend à son compte une partie des fonctions assumées en Relativité Générale par le tenseur métrique, on peut se demander si la géométrie de la Théorie Unitaire ne doit pas se trouver à mi-chemin entre la géométrie purement affine et la géométrie métrique.

Dans notre thèse, nous avons présenté une *géométrie semi-métrique* dont la géométrie de RIEMANN et celle de la Théorie Unitaire sont des cas particuliers. Dans cette théorie, on admet que la variété d'Univers présente deux structures, « images » l'une de l'autre, c'est-à-dire qu'elle a en chaque point, deux familles-images de bases et deux connexions-images. Les produits scalaires n'étant admissibles qu'entre vecteurs appartenant à deux familles-images différentes, ces produits seront connus dès qu'on se donnera les produits entre vecteurs de bases-images; ces derniers étant notés $\underset{+}{\vec{e}_i}$ et $\underset{-}{\vec{e}_j}$, on aura

$$\langle \underset{+}{\vec{e}_i} \cdot \underset{-}{\vec{e}_j} \rangle = \underset{+-}{g_{ij}} \, , \tag{1}$$

où les $\underset{+-}{g_{ij}}$ sont les composantes du tenseur dissymétrique fondamental d'EINSTEIN. Ces vecteurs de base étant transportables parallèlement, chacun grâce à la connexion ad hoc, on aura donc

$$\partial_i \underset{+}{\vec{e}_j} = \overset{+}{\Gamma}{}^k_{ih} \underset{+}{\vec{e}_k} \, , \qquad \partial_i \underset{-}{\vec{e}_j} = \overset{-}{\Gamma}{}^k_{ji} \underset{-}{\vec{e}_k} \, . \tag{2}$$

La différentiation des produits internes « pseudo-hermitiques » (1) conduit alors à la relation

$$\nabla_k \underset{+-}{g_{ij}} \equiv \partial_k \underset{+-}{g_{ij}} - \underset{+-}{g_{il}} \overset{-}{\Gamma}{}^l_{jk} - \underset{+-}{g_{lk}} \overset{+}{\Gamma}{}^l_{ik} = 0 \, , \tag{3}$$

qui est le type même de ce que nous appelons une « dérivée absolue mitoyenne d'un tenseur mitoyen », l'adjectif « mitoyen » signifiant: « commun aux deux structures-images ». D'autre part, (3) est la généralisation « semi-métrique » du théorème classique de RICCI en géométrie métrique; grâce à cette relation, on pourra, en géométrie semi-métrique, relever ou abaisser des indices sous les signes de différentiation, au moyen du tenseur semi-métrique $\underset{+-}{g_{ij}}$ ou de son adjoint $\overset{+-}{g^{ij}}$. Enfin, la géométrie métrique se présentera comme un cas particulier, celui d'une structure auto-image où $\underset{+-}{g_{ij}} = \underset{-+}{g_{ij}}$, tandis que la géométrie du champ unifié sera celle où

$$\overset{+}{\underset{+}{\Gamma}}{}^k_{ij} = \overset{-}{\underset{-}{\Gamma}}{}^k_{ji}. \tag{4}$$

Si on introduit (4) dans (3) on retrouve les équations fondamentales de la Théorie Unitaire, équations qui reçoivent ainsi un sens géométrique simple et suffisamment intuitif.

Ce point de vue « affine non orthodoxe » s'oppose donc au point de vue « orthodoxe », tout au moins comme moyen d'attaque de la Théorie Unitaire. Or, le même point de vue s'est trouvé développé par Mme MAURER-TISON dans sa thèse, simultanément et indépendamment de P. V. G., et ce par des procédés à première vue entièrement différents. Tout comme P.V.G., F.M.T. cherche à donner un sens physique au tenseur dissymétrique d'EINSTEIN; cet auteur va même plus loin que P.V.G. en ce sens qu'il opère une fusion géométrique entre le tenseur et la connexion, fusion parfaitement applicable à la géométrie de RIEMANN.

Or, la théorie F.M.T. avait été inspirée par les travaux de Mme I. CATTANEO-GASPARINI, travaux qui ne poursuivaient aucun but physico-mathématique. Les deux auteurs étudient l'espace fibré des repères linéaires d'une variété différentiable V_n; cet espace est doté d'une connexion « co-affine » caractérisée non seulement par la connexion affine dont on a doté V_n, mais aussi par un « tenseur caractéristique » du second ordre, tenseur qui pour I.C.G., est du type (1,1) tandis que pour F.M.T. il est du type (2,0). Le tenseur de F.M.T. s'identifie sans peine au tenseur « semi-métrique » d'EINSTEIN ou au tenseur métrique de RIEMANN, tandis que le tenseur d'I.C.G. semble jouer, dans certains cas, le rôle du champ électromagnétique; cette dernière constatation doit inviter le chercheur à approfondir la théorie d'I.C.G., et à étudier ses rapports avec la Théorie Unitaire et avec les travaux de F.M.T. . D'un point de vue strictement physico-mathématique, la théorie I.C.G. souffre d'un grave défaut: elle n'introduit pas de métrique, et on voit mal comment alors un tenseur du type (1,1) peut recevoir l'écriture du type (2,0) qui seule met en évidence les propriétés d'anti-symétrie du champ électro-magnétique.

Les deux théories conduisent à introduire une matrice, cas particulier de ce que nous appellerons tantôt une matrice de structure, et qui se note:

$$\text{pour I.C.G.: } \begin{pmatrix} 0 & \tau^U \\ 0 & \omega_U \end{pmatrix} \qquad \text{pour F.M.T.: } \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ p_U & -\omega_U \end{pmatrix}$$

l'indice U caractérisant un recouvrement; les éléments de ces matrices sont des formes différentielles, ω représente la matrice à $n \times n$ éléments connectifs; les tenseurs caractéristiques figurent dans les formes à valeur vectorielle τ_U (vecteur-ligne) et p_U (vecteur-colonne). Et dans les deux théories, ces matrices subissent des substitutions linéaires dont les matrices sont notées:

$$\text{pour I.C.G.: } \begin{pmatrix} 1 & \xi^U \\ 0 & A^U_V \end{pmatrix} \qquad \text{pour F.M.T.: } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \varphi_V & A^U_V \end{pmatrix}$$

les indices U et V caractérisant deux recouvrements. Les deux théories apparaissent donc comme « duales », au sens le plus banal du mot en géométrie projective. Ce qui est remarquable, c'est que I.C.G. et F.M.T. sont conduites à introduire à côté de la connexion initiale une connexion « image », toujours existante (grâce au tenseur caractéristique), et définissant les mêmes géodésiques que la connexion initiale; la théorie F.M.T. engendre alors la Théorie Unitaire d'EINSTEIN lorsqu'elle admet la relation (4) comme postulat nouveau.

Dans des travaux plus récents, M. LENOIR considère une matrice de structure, qui fusionne visiblement les matrices des théories I.C.G., et F.M.T., à savoir:

$$\overset{*}{\omega}_u \equiv \begin{pmatrix} q & p^u \\ m_u & \omega_u \end{pmatrix}$$

tandis qu'il envisage des substitutions linéaires

$$B^u_v \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A^u_v \end{pmatrix}$$

L'auteur semble cependant ignorer les travaux des deux mathématiciennes citées, puisqu'il n'en fait pas mention dans sa bibliographie. Aussi, nous nous sommes demandés si les travaux de M. LENOIR ne contenaient pas l'amorce d'une fusion des théories I.C.G. et F.M.T., et en même temps, si une autre fusion ne pouvait s'opérer entre ces théories et la géométrie semi-métrique de P.V.G. . Le présent mémoire constitue une réponse affirmative à ces questions.

§ 1. – Matrices, formes, tenseurs, substitutions.

1.1. – *Notation des matrices*: Soit $\mathcal{E}_{(n+1)}$ un espace projectif, $\mathcal{E}^{(n+1)}$ son dual et $\mathcal{E}_{(n+1)}^{(n+1)}$ leur réunion. Soit $\mathcal{E}_{(n)}$ et $\mathcal{E}^{(n)}$ les espaces affines déduits de ces espaces projectifs en privilégiant dans chacun d'eux un élément fondamental; soit $\mathcal{E}_{(n)}^{(n)}$ leur réunion.

Nous emploierons la notation ci-après pour les matrices carrées:

$$\boldsymbol{A} \equiv \| {}_iA_j \| \equiv \| \text{n}^\text{o} \text{ de ligne } A \text{ n}^\text{o} \text{ de colonne} \| \qquad {}^i_j\} = 1, \ldots, n.$$

Nous conviendrons qu'une notation telle que $\boldsymbol{A}$ en caractères gras désignera aussi bien la matrice ci-dessus de $\mathcal{E}_{(n)}^{(n)}$ que la matrice ci-après de $\mathcal{E}_{(n+1)}^{(n+1)}$:

$$\boldsymbol{A} \equiv \begin{Vmatrix} {}_iA_j & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Nous n'aurons à envisager dans ce mémoire que des substitutions linéaires de ce type dans les $\mathcal{E}_{(n+1)}^{(n+1)}$ tangents aux variétés étudiées (ce sont les substitutions de M. Lenoir, à un léger changement de notation près).

D'après la variance tensorielle des indices, les matrices seront évidemment de 4 types possibles, que nous noterons donc:

$$\| {}_iA_j \|, \qquad \| {}^iB^i \|, \qquad \| {}^iC_j \|, \qquad \| {}_jD^i \|.$$

La même notation s'appliquera aux matrices à une rangée, et nous retrouverons les 4 types, à savoir des vecteurs-lignes (ou « bra-vectors » de certains auteurs),

covariants: $\| M_i \|$ ou contravariants: $\| N^i \|$,

et des vecteurs-colonnes (ou « ket-vectors »),

covariants: $\| {}^iP \|$ ou contravariants: $\| {}_iQ \|$.

La multiplication des matrices se notera en employant l'habituelle convention d'Einstein, relative aux indices muets; on remarquera que les indices en contraction se trouveront toujours entre les lettres d'appui; on aura par exemple:

$$N^i \cdot {}_iA_j, \quad {}^iC_j \cdot {}^jB^k, \quad \text{etc.} \ldots$$

Nous opposerons par la suite cette notation « matricielle » à l'habituelle notation « tensorielle » où tous les indices sont inscrits à droite de la lettre d'appui. Bien qu'un peu lourde, la notation « matricielle » présentera des avantages certains dans les développements.

Enfin, nous désignerons comme suit les trois matrices toujours associées à une matrice régulière $\boldsymbol{A}$ donnée:

$$\tilde{\boldsymbol{A}} \text{ la transposée,}$$

$$\bar{\boldsymbol{A}} \text{ l'inverse: } \bar{\boldsymbol{A}} \equiv \boldsymbol{A}^{-1},$$

$$\ddot{\boldsymbol{A}} \text{ l'adjointe: } \ddot{\boldsymbol{A}} \equiv \bar{\tilde{\boldsymbol{A}}} \equiv \tilde{\bar{\boldsymbol{A}}}.$$

Il est bien entendu que si les indices d'une matrice ont une variance tensorielle donnée, la transpositionn'affecte en rien cette variance; par exemple $\| {}_jC^i \|$ sera la transposée de $\| {}^iC_j \|$. On remarquera qu'un tenseur d'ordre 2 possède deux représentations matricielles, ne différant que par une transposition; on peut toujours éliminer une des deux représentations, par une convention explicite, mais nous verrons cependant plus loin qu'il y a parfois avantage à ne pas faire de telle convention et à conserver les deux représentations, parfois dans une même formule.

Rappelons pour terminer que selon que les éléments de matrice sont commutatifs ou anti-commutatifs, un produit matriciel $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}$ se transpose selon deux règles différentes dont nous aurons à faire usage par la suite:

$$\text{commutatif: } \tilde{\boldsymbol{C}} = \tilde{\boldsymbol{B}}\cdot\tilde{\boldsymbol{A}},$$

$$\text{anticommutatif: } \tilde{\boldsymbol{C}} = -\tilde{\boldsymbol{B}}\cdot\tilde{\boldsymbol{A}}.$$

1.2. – *Scalaires généraux de l'algèbre extérieure*: L'expression « scalaire général » sera prise ici comme synonyme de *p-forme* au sens de l'algèbre extérieure; les 0-formes seront les scalaires au sens banal. On sait que si $\mathcal{E}_{(n)}$ est un espace tangent en un point d'une variété différentiable $\mathcal{V}_{(n)}$, son dual $\mathcal{E}^{(n)}$ admet une structure naturelle d'espace affine. Si on désigne comme d'habitude par $\vec{a}$ un vecteur d'un $\mathcal{E}_{(n)}$, il est tout naturel de désigner par $\underleftarrow{b}$ un vecteur de l'espace dual $\mathcal{E}^{(n)}$. Une base d'un $\mathcal{E}^{(n)}$ dual du $\mathcal{E}_{(n)}$ tangent en un point d'une $\mathcal{V}_{(n)}$ étant une suite de n formes différentielles (formes de Pfaff) linéairement indépendantes, il sera non moins naturel de désigner ces formes de base par la notation $\underleftarrow{\theta}^i$ et toute 1-forme par $\underleftarrow{a} = a_i \cdot \underleftarrow{\theta}^i$. Similairement, nous adopterons la notation $\underset{\Leftarrow}{b}$ pour les 2-formes, et plus généralement, la notation $\underset{(p)}{\overset{\leftarrow}{h}}$ pour les p-formes, c'est-à-dire les scalaires généraux.

Les scalaires généraux pourront être des éléments de matrice carrée telle que $\| {}^i\underset{\Leftarrow}{R}_j \|$ par exemple, que l'on rencontrera plus loin, ou de vecteurs-lignes ou colonnes tels que $\| \underset{\leftarrow}{\gamma}_j \|$ ou $\| {}^i\underset{\Leftarrow}{S} \|$, que l'on rencontrera aussi. Le point de vue des « scalaires généraux » remplace donc celui des « formes à valeur » classiquement employé.

Le signe de la multiplication entre scalaires généraux se notera $\overset{+}{\wedge}$ (ou simplement «·») ou bien $\overset{-}{\wedge}$ (ou simplement $\wedge$) selon que la multiplication sera commutative ou anticommutative. Employant alors les notations de crochets et de parenthèses de commutation, à savoir:

$$\begin{array}{rlll} \text{commutateurs:} & [\ ]_- & \text{ou simplement} & [\ ] \\ \text{anticommutateurs:} & [\ ]_+ & \text{ou simplement} & (\ ) \end{array}$$

nous avons le postulat fondamental

$$\boxed{[\underset{(p)}{\overset{\leftarrow}{a}} \overset{\varepsilon}{\wedge} \underset{(q)}{\overset{\leftarrow}{b}}]_{-\varepsilon} \equiv \underset{(p+q)}{\overset{\leftarrow}{0}}} \tag{1}$$

où ε désigne le signe de $(-1)^{pq}$. Il est inutile de rappeler ici les autres postulats classiques de la multiplication dite extérieure, laquelle contient comme cas particulier ($p = q = 0$) la multiplication ordinaire des scalaires banaux [4].

On ne confondra pas ces (anti-) commutateurs de grandeurs avec les (anti-) commutateurs d'indices, lesquels contiennent le facteur $1/2$; ainsi:

$$[a_i \cdot b_j] \equiv a_i b_j - b_j a_i \qquad a_{[i} b_{j]} \equiv \frac{1}{2} \{ a_i b_j - a_j b_i \}$$

$$(a_i \cdot b_j) \equiv a_i b_j + b_j a_i \qquad a_{(i} b_{j)} \equiv \frac{1}{2} \{ a_i b_j + a_i b_j \}$$

1.3. – *Tenseurs et substitutions linéaires*: La seule définition correcte et générale de la notion de tenseur au sens large est celle d'une représentation linéaire d'un groupe $\mathcal{G}$ [CARTAN: 19]; plutôt que de « tenseur » il vaut donc mieux parler de « $\mathcal{G}$-tenseur », c'est-à-dire d'une suite de grandeurs subissant une substitution linéaire T lors de toute action des opérateurs $S \in \mathcal{G}$. On parlera de même de « $\mathcal{G}$-invariants », cas particuliers des $\mathcal{G}$-tenseurs.

Au moyen des composantes d'un $\mathcal{G}$-tenseur et de celles d'un autre $\mathcal{G}$-tenseur de variance contraire, appelé base et choisi une fois pour toutes, on peut former par contraction une grandeur qu'on appelle, classiquement, un tenseur. Les tenseurs ainsi entendus s'écriront $\vec{a} = a^i \cdot \vec{e}_i$; $G = G^{ij} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j$, etc., $\otimes$ désignant le produit tensoriel [LICHNEROWICZ, **4**, **5**]. En fait, des « tenseurs » sont des « B-invariants », B étant le groupe des substitutions linéaires des bases; nous les appellerons « tenseurs au sens restreint ».

Or les substitutions linéaires générales sont de deux types littéralement complémentaires [CARTAN, **19**, et LICHNEROWICZ, **4**], qui sont:

1°) les *B-substitutions* ou *changements de base*, bien connus, et auxquels nous venons de faire allusion;

2°) Les *C-substitutions* ou *collinéations* générales, conservant les bases mais changeant les vecteurs et les tenseurs au sens restreint, c'est-à-dire changeant leurs composantes. Ainsi les $\vec{a}$, les G ci-dessus sont des B-invariants mais pas des C- invariants. Non moins bien connues en géométrie que les B- substitutions, les C-substitutions n'ont guère été introduites en analyse tensorielle... sauf implicitement dans les travaux de Mmes CATTANEO et MAURER-TISON comme nous le verrons bientôt. Il est à remarquer que les éléments des matrices des C-substitutions sont des composantes de B-tenseurs; et qu'inversément, tout B-tenseur d'ordre 2 peut servir à définir une collinéation générale (1).

Les B- comme les C-substitutions peuvent être elles-mêmes de deux types bien connus en géométrie projective, les *homographies* ou *F-substitutions* et les hétérographies ou *G-substitutions*. Nos G-substitutions sont plus générales que les polarités classiques, car nous n'imposerons aucune propriété de symétrie a priori aux matrices de ces substitutions [**20**] (1).

Pour numéroter les éléments des matrices des B-substitutions, nous emploierons, comme beaucoup d'auteurs, les indices avec apostrophes: i, h', r'', ... Pour les C-substitutions, nous ferons usage d'indices affectés d'un « indice-chiffre », par exemple: $\underset{2}{i}$ ou $\overset{2}{i}$, $\underset{3}{r}$, ...; et s'il n'est question que d'une seule C-substitution (comme dans les théories I.C.G. et F.M.T.), nous remplacerons les indices-chiffres par des « indices-signes », à savoir $\underset{+}{i}$ ou $\overset{+}{i}$, $\underset{-}{k}$ ou $\overset{-}{k}$, continuant une tradition commencée par EINSTEIN et maintenue seulement par de trop rares auteurs [TONNELAT, **7**]. En résumé, nous aurons les notations ci-après:

---

(1) Les B-substitutions sont les «alias» des auteurs anglo-saxons, les C-substitutions sont les « alibis » [**24**].

Les homographies sont les « collineations » des mêmes auteurs et les hétérographies sont les « correlations » [**25**].

BF-substitutions:

$$\boldsymbol{A} \equiv \| {}^{i}A_{r'} \| ; \qquad \bar{\boldsymbol{A}} \equiv \| {}^{r'}A_{i} \| ; \qquad \tilde{\boldsymbol{A}} \equiv \| {}_{r'}A^{i} \| ; \qquad \ddot{\boldsymbol{A}} \equiv \| {}_{i}A^{r'} \|$$

BG-substitutions: (sans intérêt pour le moment)
CF-substitutions: (avec indices-signes)

$$\boldsymbol{F} \equiv {}^{+}\boldsymbol{F}_{-} \equiv \| {}^{\overset{+}{i}}F_{\underset{-}{r}} \| ; \ \bar{\boldsymbol{F}} \equiv {}^{-}\boldsymbol{F}_{+} \equiv \| {}^{\overset{-}{r}}F_{\underset{+}{i}} \| ; \ \tilde{\boldsymbol{F}} \equiv {}_{-}\boldsymbol{F}^{+} \equiv \| {}_{\underset{-}{r}}F^{\overset{+}{i}} \| ; \ \ddot{\boldsymbol{F}} \equiv {}_{+}\boldsymbol{F}^{-} \equiv \| {}_{\underset{+}{i}}F^{\overset{-}{r}} \|$$

CG-substitutions: (avec indices-signes)

$$\boldsymbol{G} \equiv {}^{+}\boldsymbol{G}^{-} \equiv \| {}^{\overset{+}{i}}G^{\overset{-}{r}} \| ; \bar{\boldsymbol{G}} \equiv {}_{-}\boldsymbol{G}_{+} \equiv \| {}_{\underset{-}{r}}G_{\underset{+}{i}} \| ; \tilde{\boldsymbol{G}} \equiv {}^{-}\boldsymbol{G}^{+} \equiv \| {}^{\overset{-}{r}}G^{\overset{+}{i}} \| ; \ddot{\boldsymbol{G}} \equiv {}_{+}\boldsymbol{G}_{-} \equiv \| {}_{\underset{+}{i}}G_{\underset{-}{r}} \|$$

On comprendra dans un moment l'avantage des nouvelles notations telles que ${}^{+}F_{-}$ etc. .

§ 2. – L'algèbre différentielle extérieure.

2.1. – *Différentielles extérieures*: Si l'on attaque l'étude des variétés différentiables en se servant du plus puissant outil actuellement connu, l'analyse extérieure, et si en même temps on examine la question d'un point de vue *strictement algébrique*, on constate que l'on fait usage:

1°) d'une « variété », qui n'est en fait qu'un ensemble de « points »;

2°) de « nombres-c » qui sont les scalaires généraux définis ci-avant, attachés à chaque point et qui constituent les « grandeurs de champ »;

3°) d'un « nombre-q », la 1-forme de différentiation que nous noterons $\underset{\leftarrow}{\delta}$ et qui permet de passer d'un point vers un autre point, voisin par définition.

Lorsque $\underset{\leftarrow}{\delta}$ est mis à la place de $\underset{\leftarrow}{a}$ dans la formule (1) de 1.2, on aura au lieu de (1):

$$\boxed{[\underset{\leftarrow}{\delta} \overset{\varepsilon}{\wedge} \underset{(q)}{\underset{\leftarrow}{v}}]_{-\varepsilon} = \underset{(q+1)}{\underset{\leftarrow}{\delta v}}}_{\,\varepsilon=(-1)^{q}} \tag{1}$$

où le second membre est la *différentielle* (*extérieure*), en général différente de zéro; si ce second membre est nul, la forme $\underset{\leftarrow}{v}$ est dite fermée (une 0-forme fermée est une constante).

L'opérateur de différentiation infinitésimale n'est, somme toute, qu'un cas particulier de l'opérateur $\underleftarrow{\delta}$. Autrement dit, l'analyse tensorielle rentre dans un canevas algébrique très général caractérisé par l'emploi du « nombre-q » $\underleftarrow{\delta}$; ce n'est que lorsqu'on voudra appliquer ce canevas aux variétés continues qu'il y aura lieu de faire les hypothèses topologiques connues sur la variété, afin que le canevas lui soit applicable, précisément. Ces considérations expliquent ici le choix du titre du présent mémoire.

La formule (2) constitue à notre avis la définition la plus simple de la différentielle extérieure. Et toutes les formules de différentiation d'un produit se résument par l'*identité* ci-après, que nous n'écrirons que pour un produit de 3 facteurs:

$$(2)\qquad [\underleftarrow{\delta} \overset{\varrho}{\wedge} \{\underset{(p)}{\underleftarrow{u}} \wedge \underset{(q)}{\underleftarrow{v}} \wedge \underset{(r)}{\underleftarrow{w}}\}]_{-\varrho} \equiv [\underleftarrow{\delta} \overset{\alpha}{\wedge} \underleftarrow{u}]_{-\alpha} \wedge \underleftarrow{v} \wedge \underleftarrow{w} +$$
$$+ \alpha \underleftarrow{u} \wedge [\underleftarrow{\delta} \overset{\beta}{\wedge} \underleftarrow{v}]_{-\beta} \wedge \underleftarrow{w} + \alpha\beta \underleftarrow{u} \wedge \underleftarrow{v} \wedge [\underleftarrow{\delta} \overset{\gamma}{\wedge} \underleftarrow{w}]_{-\gamma}$$

avec

$$\varrho = \alpha\beta\gamma = (-1)^{p+q+r}$$

$$\alpha = (-1)^p \qquad \beta = (-1)^q \qquad \gamma = (-1)^r$$

Ajoutons, pour l'axiomatique, que $\underleftarrow{\delta}$ présentera par hypothèse toutes les propriétés des opérateurs linéaires, à condition bien entendu que les scalaires généraux employés pour les combinaisons linéaires soient des formes fermées. Il faut enfin introduire le « postulat de POINCARE » qui s'énonce: « la 2-forme $\underset{\leftleftarrows}{\delta} \equiv \underleftarrow{\delta} \wedge \underleftarrow{\delta}$ est un nombre-c », autrement dit:

$$(3)\qquad \boxed{[\underleftarrow{\delta} \overset{+}{\wedge} \underset{(p)}{\underleftarrow{u}}] \equiv \underset{(p+2)}{\underleftarrow{0}}} \qquad \forall u \text{ et } \forall p$$

Dans la présente étude, de caractère strictement algébrique, répétons-le, il s'agit bien là d'un postulat (auquel il est impossible d'échapper si l'on veut progresser), et non d'un théorème comme en analyse classique, ainsi que le lecteur s'en convaincra aisément après quelque réflexion.

A partir de cette formule (3), un calcul algébrique élémentaire restitue la relation connue

$$(4)\qquad [\underleftarrow{\delta} \overset{+}{\wedge} [\underleftarrow{\delta} \overset{-}{\wedge} \underleftarrow{u}]_+]_- \equiv [\underleftarrow{\delta} \overset{+}{\wedge} \underset{\leftleftarrows}{\delta u}]_- = \underset{\overset{\leftleftarrows}{\leftarrow}}{0}$$

2.2. – *Invariance des (anti-) commutateurs*: Dans la relation (2), on peut toujours, sans rien changer à la valeur du second membre:

1°) ajouter à $\underset{(q)}{\underleftarrow{v}}$ une forme fermée $\underset{(q)}{\underleftarrow{w}}$;

2°) ajouter à $\underleftarrow{\delta}$ un quelconque nombre-*c* $\underleftarrow{\varphi}$, c'est-à-dire une 1-forme quelconque, fermée ou non.

Nous n'insisterons pas sur la propriété (1°), aussi bien connue que ses conséquences classiques (existence de constantes d'intégration, indétermination des potentiels locaux, etc.). La propriété (2°) retiendra davantage notre attention, car elle est bien moins souvent mise en relief que (1°), les auteurs employant assez rarement la notation algébrique (crochet) des différentielles extérieures. Nous la traduirons en disant que les différentielles présentent la φ-invariance, à savoir:

$$\boxed{[\{\underleftarrow{\delta} + \underleftarrow{\varphi}\} \overset{\varepsilon}{\wedge} \underset{(p)}{\underleftarrow{u}}]_{-\varepsilon} \equiv [\underleftarrow{\delta} \overset{\varepsilon}{\wedge} \underset{(p)}{\underleftarrow{u}}]_{-\varepsilon}} \tag{1}$$

ou encore, l'*invariance géodésique*, car nous verrons que les φ-transformations laissent invariantes les géodésiques. Comme $\underleftarrow{\delta}$ n'intervient dans les calculs que par ses (anti-) commutateurs, on peut dire que cet opérateur n'est défini qu'à une 1-forme invariante additive près. Par conséquent, $\underset{\leftleftarrows}{\delta}$ n'est définie qu'à une 2-forme fermée près:

$$\{\underleftarrow{\delta} + \underleftarrow{\varphi}\} \wedge \{\underleftarrow{\delta} + \underleftarrow{\varphi}\} = \underset{\leftleftarrows}{\delta} + (\underleftarrow{\delta} \wedge \underleftarrow{\varphi}) \tag{2}$$

2-forme qui disparaîtra des anticommutateurs de $\underset{\leftleftarrows}{\delta}$.

Si $\underleftarrow{\varphi}$ est une forme fermée, l'invariance géodésique devient l'« invariance de jauge de seconde espèce »; en effet, la proprété baptisée de ce nom par certains auteurs [Bargmann, **22**; Kursunoglu, **23**] s'identifie au cas $\underset{\leftleftarrows}{\delta\varphi} = 0$ comme on le verra plus loin.

D'autre part, on peut dire qu'en fait $\underset{\leftleftarrows}{\delta}$ n'est définie qu'à une 2-forme *quelconque* près (et non nécessairement fermée, comme ci-avant), 2-forme qui s'élimine identiquement des commutateurs de $\underset{\leftleftarrows}{\delta}$:

$$[\{\underset{\leftleftarrows}{\delta} + \underset{\leftleftarrows}{\psi}\} \overset{+}{\wedge} \underleftarrow{u}] = [\underset{\leftleftarrows}{\delta} \overset{+}{\wedge} \underleftarrow{u}] \tag{3}$$

On notera que $\underset{\leftleftarrows}{\delta}$ étant d'ordre pair en tant que forme, cet opérateur ne peut figurer que dans des commutateurs et jamais dans des anticommutateurs.

2.3. – *La matrice scalaire* $\underleftarrow{\boldsymbol{\delta}}$: Pour éviter toute confusion, nous abandonnerons la notation δ^i_j du symbole de KRONECKER et représenterons par $\| {}^iI_j \|$ la matrice unité de $\mathcal{E}^{(n+1)}_{(n+1)}$. Nous introduirons alors la matrice scalaire $\underleftarrow{\boldsymbol{\delta}}$ (notée en caractères gras):

$$\underleftarrow{\boldsymbol{\delta}} \equiv \underleftarrow{\delta} \cdot \| {}^iI_j \| \tag{1}$$

Soit maintenant $\boldsymbol{A}$ une matrice de BF-substitution linéaire; si $\boldsymbol{X}$ est une matrice scalaire, X étant un scalaire général ou nombre-c quelconque, on a, comme on sait

$$\bar{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{X}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{X} \tag{2}$$

Si les scalaires de $\boldsymbol{A}$ ne sont pas des constantes, la matrice scalaire $\underleftarrow{\boldsymbol{\delta}}$ échappe à cette règle, et on a les relations

$$\bar{\boldsymbol{A}} \cdot \underleftarrow{\delta} \cdot \boldsymbol{A} = \left\{ \begin{matrix} \underleftarrow{\boldsymbol{\delta}} + \bar{\boldsymbol{A}} \cdot \delta \underleftarrow{\boldsymbol{A}} \\ \underleftarrow{\boldsymbol{\delta}} - \underleftarrow{\delta \bar{\boldsymbol{A}}} \cdot \boldsymbol{A} \end{matrix} \right\} \equiv \underleftarrow{\boldsymbol{\delta}} + \underleftarrow{\boldsymbol{\Lambda}}(\boldsymbol{A}) \tag{3}$$

relations bien connues; mais on a aussi les *transposées* de ces relations, à savoir

$$\tilde{\boldsymbol{A}} \cdot \underleftarrow{\delta} \cdot \ddot{\boldsymbol{A}} = \left\{ \begin{matrix} \underleftarrow{\boldsymbol{\delta}} + \tilde{\boldsymbol{A}} \cdot \delta \underleftarrow{\ddot{\boldsymbol{A}}} \\ \underleftarrow{\boldsymbol{\delta}} - \underleftarrow{\delta \tilde{\boldsymbol{A}}} \cdot \ddot{\boldsymbol{A}} \end{matrix} \right\} \equiv \underleftarrow{\boldsymbol{\delta}} + \underleftarrow{\boldsymbol{\Lambda}}(\ddot{\boldsymbol{A}}) = \underleftarrow{\boldsymbol{\delta}} - \underleftarrow{\tilde{\boldsymbol{\Lambda}}}(\boldsymbol{A}) \tag{4}$$

Ces relations transposées ne sont guère envisagées par les auteurs, en général; elles auront cependant autant d'importance que les relations directes, comme nous le verrons. On remarquera le changement de signe des $\underleftarrow{\boldsymbol{\Lambda}}$, conséquence de la transposition.

Ces relations s'appliquent sans plus aux CF-substitutions; remarquons en passant qu'avec la notation des indices-signes, on a:

$$\underleftarrow{\boldsymbol{\Lambda}}(\boldsymbol{F}) = {}^-\boldsymbol{F}_+ \cdot \underleftarrow{\delta^+\boldsymbol{F}_-} \equiv {}^-\underleftarrow{\boldsymbol{1}}_-; \qquad \underleftarrow{\tilde{\boldsymbol{\Lambda}}}(\boldsymbol{F}) = {}_-\underleftarrow{\boldsymbol{\Lambda}}^- = \underleftarrow{\delta_-\boldsymbol{F}^+} \cdot {}_+\boldsymbol{F}^- = -\underleftarrow{\ddot{\boldsymbol{\Lambda}}}(\boldsymbol{F})$$

Enfin, pour les CG-substitutions, on a

$$\bar{\boldsymbol{G}} \cdot \underleftarrow{\boldsymbol{\delta}} \cdot \boldsymbol{G} = \left\{ \begin{matrix} \underleftarrow{\boldsymbol{\delta}} + \bar{\boldsymbol{G}} \cdot \delta \underleftarrow{\boldsymbol{G}} \\ \underleftarrow{\boldsymbol{\delta}} - \underleftarrow{\delta \bar{\boldsymbol{G}}} \cdot \boldsymbol{G} \end{matrix} \right\} = \underleftarrow{\boldsymbol{\delta}} + \underleftarrow{\tilde{\boldsymbol{\Lambda}}}(\boldsymbol{G}) \tag{6}$$

et par transposition

$$\tilde{\boldsymbol{G}}\cdot\underset{\leftarrow}{\boldsymbol{\delta}}\cdot\ddot{\boldsymbol{G}} = \begin{Bmatrix} \underset{\leftarrow}{\boldsymbol{\delta}} + \tilde{\boldsymbol{G}}\cdot\underset{\leftarrow}{\delta\ddot{\boldsymbol{G}}} \\ \underset{\leftarrow}{\boldsymbol{\delta}} - \underset{\leftarrow}{\delta\tilde{\boldsymbol{G}}}\cdot\ddot{\boldsymbol{G}} \end{Bmatrix} = \underset{\leftarrow}{\boldsymbol{\delta}} + \underset{\leftarrow}{\tilde{\boldsymbol{\Lambda}}}(\ddot{\boldsymbol{G}}) = \underset{\leftarrow}{\boldsymbol{\delta}} - \underset{\leftarrow}{\boldsymbol{\Lambda}}(\boldsymbol{G}) \tag{7}$$

soit donc, en notation d'indices-signes:

$$\underset{\leftarrow}{\tilde{\boldsymbol{\Lambda}}}(\boldsymbol{G}) = {}_{-}\boldsymbol{G}_{+}\cdot\underset{\leftarrow}{\delta^{+}}\boldsymbol{G}^{-} \equiv {}_{-}\boldsymbol{\Lambda}^{-};\ \underset{\leftarrow}{\boldsymbol{\Lambda}}(\boldsymbol{G}) = {}^{-}\underset{\leftarrow}{\boldsymbol{\Lambda}}_{-} = \underset{\leftarrow}{\delta^{-}}\boldsymbol{G}^{+}\cdot{}_{+}\boldsymbol{G}_{-} = -\underset{\leftarrow}{\tilde{\boldsymbol{\Lambda}}}(\ddot{\boldsymbol{G}}) \tag{8}$$

2.4. – *Les matrices de structure et de différentiation*: Nous admettrons qu'en chaque point de la variété est définie une *matrice de structure* à $(n+1)\times\times(n+1)$ éléments

$$\underset{\leftarrow}{\boldsymbol{\Theta}} \equiv \begin{Vmatrix} {}^{i}\underset{\leftarrow}{\omega}_{j} & {}^{i}\underset{\leftarrow}{\theta} \\ \underset{\leftarrow}{\gamma_{j}} & \underset{\leftarrow}{0} \end{Vmatrix} \tag{1}$$

où le vecteur-colonne $({}^{i}\underset{\leftarrow}{\theta})$ et le vecteur-ligne $(\underset{\leftarrow}{\gamma_{j}})$ ont chacun des composantes linéairement indépendantes; les scalaires généraux ${}^{i}\underset{\leftarrow}{\omega}_{j}$ sont les 1-formes de connexion. On reconnaît pour ${}^{i}\underset{\leftarrow}{\theta} \equiv \underset{\leftarrow}{0}$ le type de matrice proposé par F.M.T. et pour $\underset{\leftarrow}{\gamma_{j}} \equiv \underset{\leftarrow}{0}$ le type étudié par I.C.G.; nous avons donc fusionné les deux types, reprenant ici le type de matrice introduit par M. Lenoir [**16**, **17**]. A l'encontre de ce dernier, nous avons annulé la 1-forme invariante « de coin » $\underset{\leftarrow}{q}$; en effet, à cause des φ-transformations, comme on va le voir, cette forme est totalement indéterminée.

Nous appellerons *matrice de différentiation* la matrice à $(n+1)\times(n+1)$ éléments définie par

$$\boxed{\underset{\leftarrow}{\boldsymbol{\Delta}} \equiv \underset{\leftarrow}{\boldsymbol{\delta}} + \underset{\leftarrow}{\boldsymbol{\Theta}}}\,, \tag{2}$$

et nous appellerons *transposée* de la dite matrice, la matrice

$$\boxed{\underset{\leftarrow}{\tilde{\boldsymbol{\Delta}}} \equiv \underset{\leftarrow}{\boldsymbol{\delta}} - \underset{\leftarrow}{\tilde{\boldsymbol{\Theta}}}}\,. \tag{3}$$

Nous allons voir qu'en postulant que ces matrices obéissent aux règles ordinaires de substitution linéaire, non seulement nous retrouvons les règles classiques de transformation des formes de connexion (*BF*-substitutions), mais aussi nous découvrons de nouvelles règles de transformation de ces formes, (*CF*- et *CG*-substitutions), règles qui sont celles proposées par I.C.G. et F.M.T. dans leurs théories respectives, justement. En même temps nous aurons justifié a posteriori le changement de signe de $\underleftarrow{\boldsymbol{\Theta}}$ introduit lors de la transposition de $\underleftarrow{\boldsymbol{\Delta}}$, et dont l'origine est la même que celle du changement de signe de $\underleftarrow{\boldsymbol{\Lambda}}$ par transposition, au numéro 2.3. ci-avant.

2.5. – *Substitutions linéaires*: 1°) *B-substitutions*: On aura donc, d'après ce qui vient d'être dit:

$$\underleftarrow{\boldsymbol{\Delta}}' = \bar{\boldsymbol{A}}\underleftarrow{\boldsymbol{\Delta}}\boldsymbol{A} = \bar{\boldsymbol{A}}\{\underleftarrow{\boldsymbol{\delta}} + \underleftarrow{\boldsymbol{\Theta}}\}\boldsymbol{A} = \underleftarrow{\boldsymbol{\delta}} + \{\underleftarrow{\boldsymbol{\Lambda}} + \bar{\boldsymbol{A}}\underleftarrow{\boldsymbol{\Theta}}\boldsymbol{A}\} \tag{1}$$

d'où

$$\boxed{\underleftarrow{\boldsymbol{\Theta}}' = \underleftarrow{\boldsymbol{\Lambda}} + \bar{\boldsymbol{A}}\underleftarrow{\boldsymbol{\Theta}}\boldsymbol{A}} \tag{2}$$

et en transposant

$$\underleftarrow{\tilde{\boldsymbol{\Delta}}}' = \tilde{\boldsymbol{A}}\{\underleftarrow{\boldsymbol{\delta}} - \underleftarrow{\boldsymbol{\Theta}}\}\boldsymbol{A} = \underleftarrow{\boldsymbol{\delta}} - \{\underleftarrow{\tilde{\boldsymbol{\Lambda}}} + \tilde{\boldsymbol{A}}\cdot\underleftarrow{\boldsymbol{\Theta}}\cdot\boldsymbol{A}\} \tag{3}$$

d'où

$$\underleftarrow{\tilde{\boldsymbol{\Theta}}}' = \underleftarrow{\tilde{\boldsymbol{\Lambda}}} + \tilde{\boldsymbol{A}}\cdot\underleftarrow{\tilde{\boldsymbol{\Theta}}}\,\tilde{\boldsymbol{A}}. \tag{4}$$

On retrouve ici non seulement les règles classiques de transformation des coefficients d'une connexion (5), mais aussi celles de changement de base (6):

$${}^{r'}\underleftarrow{\omega}_{s'} = {}^{r'}A_i\cdot\underleftarrow{\delta}{}^{i}A_{s'} + {}^{r'}A_i\cdot{}^{i}\underleftarrow{\omega}_j\cdot{}^{j}A_{s'}, \tag{5}$$

$${}^{r'}\underleftarrow{\theta} = {}^{r'}A_i\cdot{}^{i}\underleftarrow{\theta}, \qquad \underleftarrow{\gamma}^{s'} = \underleftarrow{\gamma}_i\cdot{}^{i}A_{s'}; \tag{6}$$

2°) *C-substitutions* du type *homographique* (*CF*-): Les formules sont évidemment les mêmes que ci-avant; avec la notation des indices-signes on aura:

$$\boxed{{}^{-}\underleftarrow{\boldsymbol{\Theta}}_{-} = {}^{-}\underleftarrow{\boldsymbol{\Lambda}}_{-} + {}^{-}\boldsymbol{F}_{+}\cdot{}^{+}\underleftarrow{\boldsymbol{\Theta}}_{+}\cdot{}^{+}\boldsymbol{F}_{-}} \tag{7}$$

3°) *C-substitutions* du type *Hétérographique* (CG —): Rappelons ce qui a déjà été sous-entendu au n. 2.3., à savoir qu'une G-substitution fait passer à la transposée de la transformée; par exemple

$$ {}_{\underset{+}{i}}g_{\overset{-}{\underset{-}{j}}} \cdot {}^{j}M_{\overset{-}{\underset{-}{k}}} \cdot {}^{k}g^{\overset{+}{l}} = {}_{\underset{+}{i}}M^{\overset{+}{l}} $$

Dès lors, en appliquant cette règle à $\underleftarrow{\Delta}$ et en tenant compte des règles des G-substitutions de $\underleftarrow{\delta}$, on aura:

$$ (8) \qquad {}_{-}G_{+} \cdot {}^{+}\underleftarrow{\Delta}_{+} \cdot {}^{+}G^{-} = {}_{-}\underleftarrow{\Delta}^{-} = \underleftarrow{\delta} - {}_{-}\underleftarrow{\Theta}^{-} \quad \therefore \quad \boxed{{}_{-}\underleftarrow{\Theta}^{-} = -{}_{-}\underleftarrow{\Lambda}^{-} - {}_{-}G_{+} \cdot {}^{+}\underleftarrow{\Theta}_{+} \cdot {}^{+}G^{-}} $$

et par transposition

$$ (9) \qquad {}^{-}G^{+} \cdot {}_{+}\underleftarrow{\Delta}^{+} \cdot {}_{+}G_{-} = {}^{-}\underleftarrow{\Delta}_{-} = \underleftarrow{\delta} + {}^{-}\underleftarrow{\Theta}_{-} \quad \therefore \quad \boxed{{}^{-}\underleftarrow{\Theta}_{-} = -{}_{-}\underleftarrow{\Lambda}^{-} - {}^{-}G^{+} \cdot {}_{+}\underleftarrow{\Theta}^{+} \cdot {}_{+}G_{-}} $$

Les formules des transformations inverses s'obtiennent en permutant les indices-signes + et —. Explicitement, on a:

$$ (10) \qquad {}^{\overset{-}{r}}\underleftarrow{\omega}_{s} = \underleftarrow{\delta}^{\overset{-}{r}}g^{\overset{+}{i}} \cdot {}_{\underset{+}{i}}g_{\underset{-}{s}} - {}^{\overset{-}{r}}g^{\overset{+}{i}} \cdot {}_{\underset{+}{i}}\underleftarrow{\omega}^{\overset{+}{j}} \cdot {}_{\underset{+}{j}}g_{\underset{-}{s}} $$

$$ (11) \qquad {}^{\overset{-}{r}}\underleftarrow{\theta} = -{}^{\overset{-}{r}}g^{\overset{+}{i}} \cdot {}_{\underset{+}{i}}\underleftarrow{\gamma} \qquad\qquad \underleftarrow{\gamma}_{\underset{-}{s}} = -\theta^{\overset{+}{i}}{}_{\underset{+}{i}}g_{\underset{-}{s}} $$

2.6. – *Groupe des φ-substitutions*: Si $\underleftarrow{\delta}$ se trouve remplacée par

$$ (1) \qquad \underleftarrow{\delta}' \equiv \underleftarrow{\delta} + \underleftarrow{\varphi} $$

$\underleftarrow{\Delta}$ et $\underleftarrow{\tilde{\Delta}}$ se trouvent remplacées respectivement par

$$ (2) \qquad \underleftarrow{\Delta}' \equiv \underleftarrow{\delta} + (\underleftarrow{\Theta} + \underleftarrow{\varphi}) \equiv \underleftarrow{\delta} + \underleftarrow{\Theta}' $$

et par

$$ (3) \qquad \underleftarrow{\tilde{\Delta}}' \equiv \underleftarrow{\delta} - (\underleftarrow{\tilde{\Theta}} - \underleftarrow{\varphi}) \equiv \underleftarrow{\delta} - \underleftarrow{\hat{\Theta}}' $$

On aura donc en particulier pour la connexion:

$$(4) \qquad \boxed{{}^i\underset{\leftarrow}{\omega}'_j = {}^i\underset{\leftarrow}{\omega}_j + \underset{\leftarrow}{\varphi}\cdot{}^iI_j} \qquad \boxed{{}_j\underset{\leftarrow}{\omega}'^i = {}_j\underset{\leftarrow}{\omega}^i - \underset{\leftarrow}{\varphi}\cdot{}_jI^i}$$

On sait que pareille transformation laisse invariants les cas de parallélisme et en particulier les géodésiques [LICHNEROWICZ, **2**, p. 248]; ceci justifie a posteriori le nom d'« invariance géodésique » donnée aux expressions invariantes pour le groupe des φ-substitutions. On remarque en même temps qu'une φ-substitution restitue à la matrice de structure la forme invariante « du coin » qui figure dans la matrice proposée par M. LENOIR; le groupe des φ-substitutions enlève donc tout caractère intrinsèque à cette forme de coin.

Il faut noter que si tout tenseur d'ordre 2 est susceptible de deux représentations matricielles équivalentes, comme nous le signalions en 1.1, il n'en va pas de même pour les 1-formes de connexion, et ce à cause du groupe des φ-substitutions; l'égalité des deux représentations aura quelque chose de privilégié correspondant à une propriété particulière de la connexion, par exemple l'annulation du vecteur de torsion. En Théorie Unitaire, lorsqu'on s'en tient aux équations du « système faible » [TONNELAT, **7**, p. 31], utilisant une connexion sans vecteur de torsion, la connexion « définitive » n'est définie qu'à une φ-substitution près. Les raisons algébriques profondes de cette particularité doivent se trouver dans l'existence de ce groupe φ.

§ 3. – Différentielles absolues mitoyennes.

3.1. – *L'opérateur* $\underset{\leftarrow}{\nabla}$: Ce sera l'élément d'une autre matrice scalaire, notée $\underset{\leftarrow}{\boldsymbol{\nabla}}$; mais à l'encontre de $\underset{\leftarrow}{\boldsymbol{\delta}}$, cette matrice commutera par définition avec *toutes* les matrices $\boldsymbol{A}$ de substitution linéaire, *de tous les types*. On aura donc

$$(1) \qquad [\underset{\leftarrow}{\boldsymbol{\nabla}}\cdot\boldsymbol{A}] \equiv \nabla\underset{\leftarrow}{\boldsymbol{A}} = \underset{\leftarrow}{0}$$

ou identiquement

$$(2) \qquad \boxed{\bar{\boldsymbol{A}}\cdot\underset{\leftarrow}{\boldsymbol{\nabla}}\cdot\boldsymbol{A} = \underset{\leftarrow}{\boldsymbol{\nabla}}}$$

ce qui signifie que $\underset{\leftarrow}{\boldsymbol{\nabla}}$ se comportera donc comme une matrice scalaire banale. Examinons tout de suite le cas classique des B-substitutions: (1) de 2.5 s'écrit identiquement:

$$(3) \qquad \boxed{\nabla\underset{\leftarrow}{\boldsymbol{A}} \equiv \boldsymbol{A}\cdot\underset{\leftarrow}{\boldsymbol{\Lambda}} + \underset{\leftarrow}{\boldsymbol{\Theta}}\cdot\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}\cdot\underset{\leftarrow}{\boldsymbol{\Theta}}' = \underset{\leftarrow}{0}}$$

ce qui définit en même temps $\underset{\leftarrow}{\nabla}\boldsymbol{A}$, la *différentielle absolue mitoyenne* de la matrice de la substitution. Comme nous l'avons dit dans l'introduction, le mot mitoyen signifie « commun à deux représentations de la structure ». Les éléments de $\boldsymbol{A}$ sont eux-mêmes des grandeurs mitoyennes en ce sens qu'elles sont relatives à deux bases différentes (et nous avons incorporé la base à la structure). Inversément, prenant (3) ci-dessus comme définition de la différentiation absolue mitoyenne, l'annulation de cette expression restitue d'abord la loi classique de transformation des coefficients d'une connexion:

(4) $$\underset{\leftarrow}{\nabla}\cdot{}^iA_{r'} \equiv \underset{\leftarrow}{\delta}{}^iA_{r'} + {}^i\underset{\leftarrow}{\omega}_j\cdot{}^jA_{r'} - {}^iA_{s'}\cdot{}^{s'}\underset{\leftarrow}{\omega}_{r'} = \underset{\leftarrow}{0}$$

ensuite les lois de transformation des scalaires généraux composantes du vecteur-ligne et du vecteur-colonne de la matrice de structure:

(5) $$\underset{\leftarrow}{\nabla}{}^0A_{r'} \equiv \underset{\leftarrow}{\delta}{}^0A_{r'} + \underset{\leftarrow}{\gamma}_j\cdot{}^jA_{r'} - {}^0A_{0'}\cdot\underset{\leftarrow}{\gamma}_{r'} = \underset{\leftarrow}{0} \quad\therefore\quad \underset{\leftarrow}{\gamma}_{r'} = \underset{\leftarrow}{\gamma}_j\cdot{}^jA_{r'}$$

(6) $$\underset{\leftarrow}{\nabla}{}^iA_{0'} \equiv \underset{\leftarrow}{\delta}{}^iA_{0'} + {}^i\underset{\leftarrow}{\theta}\cdot{}^0A_{0'} - {}^iA_{r'}\cdot{}^{r'}\underset{\leftarrow}{\theta} = \underset{\leftarrow}{0} \quad\therefore\quad {}^i\underset{\leftarrow}{\theta} = {}^iA_{r'}\cdot{}^{r'}\underset{\leftarrow}{\theta}$$

(Quant à $\underset{\leftarrow}{\nabla}{}^0A_{0'} = 0$, ce n'est qu'une identité banale $0 = 0$).

Remarquons bien ceci: Nous nous sommes refusés à considérer pour le moment des transformations où l'on ait soit ${}^0A_{r'} \neq 0$ soit ${}^iA_{0'} \neq 0$. Si cependant on admettait l'un de ces deux cas, les différentielles mitoyennes de ces expressions $\neq 0$ n'en seraient pas moins $= 0$, alors que les différentielles absolues classiques, telles que les considèrent I.C.G. et F.M.I., resteraient en général $\neq 0$, comme chez ces auteurs. Et l'annulation de notre différentielle mitoyenne restituerait soit la loi de transformation de ${}^i\underset{\leftarrow}{\theta}$ (chez I.C.G.) soit celle des $\underset{\leftarrow}{\gamma}_j$ (chez F.M.T.).

Enfin, on vérifiera sans peine que la différentielle mitoyenne présente l'*invariance géodésique*; autrement dit, c'est un φ-invariant.

L'opérateur ou nombre-q $\underset{\leftarrow}{\nabla}$ obéit comme $\underset{\leftarrow}{\delta}$ à l'identité (2) du n. 2.1 Dès lors, on pourra calculer la différentielle de n'importe quel scalaire général dès qu'on se sera donné des « prototypes » de différentielles portant sur les principaux êtres mathématiques auxquels on a affaire: invariants, vecteurs-lignes, vecteurs-colonnes, matrice connective. Puisque les invariants n'ont rien à voir avec les matrices $\boldsymbol{A}$ de substitution, la différentielle absolue d'un invariant vaudra la différentielle ordinaire (dite extérieure, selon l'usage). Quant aux autres prototypes de différentielles, on les obtiendra tout naturellement par l'étude de la matrice de structure. La notion de différentielle absolue ordinaire se présentera comme un cas particulier de celle de différentielle mitoyenne.

3.2. – *CF-substitutions et transformations de* Mme CATTANEO: Les formules seront rigoureusement les mêmes que celles des BF-substitutions, à la notation près (qui sera ici celle des indices-signes):

$$(1)\qquad \boxed{\underset{\leftarrow}{\nabla}{}^{+}\boldsymbol{F}_{-} \equiv \underset{\leftarrow}{\delta}{}^{+}\boldsymbol{F}_{-} + {}^{+}\underset{\leftarrow}{\boldsymbol{\Theta}}_{+}\cdot{}^{+}\boldsymbol{F}_{-} - {}^{+}\boldsymbol{F}_{-}\cdot{}^{-}\underset{\leftarrow}{\boldsymbol{\Theta}}_{-} = \underset{\leftarrow}{0}}$$

Nous avons fait remarquer (n. 1.3) que les éléments de la matrice ${}^{+}\boldsymbol{F}_{-}$ sont les composantes d'un B-tenseur; on peut alors appliquer à celle-ci les règles de la différentiation absolue classique (règles que nous pouvons retrouver ici en suivant la méthode esquissée in fine du n. précédent). Désignons par $\overset{(+)}{\underset{\leftarrow}{\nabla}}$ ou par $\overset{(-)}{\underset{\leftarrow}{\nabla}}$ l'opérateur $\underset{\leftarrow}{\nabla}$ lorsque pour le calcul de ses (anti-) commutateurs, on ne doit se servir que de la connexion $(+)$ ou, respectivement, de la connexion $(-)$; la notation $\overset{(+-)}{\underset{\leftarrow}{\nabla}}$ caractérisera la même opérateur dans les différentielles mitoyennes. On a alors

$$(2)\qquad \overset{(+-)}{\underset{\leftarrow}{\nabla}}{}^{+}\boldsymbol{F}_{-} \equiv \overset{(+)}{\underset{\leftarrow}{\nabla}}{}^{+}\boldsymbol{F}_{-} + {}^{+}\boldsymbol{F}_{-}\cdot{}^{+}\underset{\leftarrow}{\boldsymbol{\Theta}}_{+} - {}^{+}\boldsymbol{F}_{-}\cdot{}^{-}\underset{\leftarrow}{\boldsymbol{\Theta}}_{-} = \underset{\leftarrow}{0}$$

c'est-à-dire

$$(3)\qquad \boxed{{}^{-}\underset{\leftarrow}{\Theta}_{-} = {}^{+}\underset{\leftarrow}{\Theta}_{+} + {}^{-}\underset{\leftarrow}{\boldsymbol{F}}_{+}\cdot\overset{(+)}{\underset{\leftarrow}{\nabla}}{}^{+}\boldsymbol{F}_{-}}$$

qui est la formule fondamentale de Mme CATTANEO et que nous nommerons la *première formule I.C.G.*, formule reliant deux connexions linéaires associées selon le *B-tenseur caractéristique* du type (1,1). Explicitement, on a

$$(4)\qquad {}^{\overset{-}{i}}\underset{\leftarrow}{\omega}_{\underset{-}{j}} = {}^{\overset{+}{i}}\underset{\leftarrow}{\omega}_{\underset{+}{j}} + {}^{\overset{-}{i}}f_{\underset{+}{k}}\cdot\overset{(+)}{\underset{\leftarrow}{\nabla}}{}^{\overset{+}{k}}f_{\underset{-}{j}}$$

qui est la formule I.C.G. proprement dite, et en même temps:

$$(5)\qquad {}^{\overset{-}{i}}\underset{\leftarrow}{\theta} = {}^{\overset{-}{i}}f_{\underset{+}{j}}\cdot{}^{\overset{+}{j}}\underset{\leftarrow}{\theta} \qquad \underset{\leftarrow}{\gamma}_{j} = \underset{\leftarrow}{\gamma}_{\underset{+}{k}}\cdot{}^{\overset{+}{k}}f_{j} \qquad {}^{-}\underset{\leftarrow}{0}_{-} = 1\cdot{}^{+}\underset{\leftarrow}{0}_{+}$$

qui s'interprêtent sans plus comme des formules de collinéation (homographie) reliant des référentiels.

Les formules de Mme CATTANEO sont B-tensorielles, mais elles ne sont pas C-tensorielles puisqu'elles mélangent, sans les contracter, des indices $+$ et des indices —. L'exigence « C-tensorielle » avait d'ailleurs été indirectement formulée par EINSTEIN lui-même [1] lorsqu'il proposait les premières règles de calcul des indices signes. Le fait que la formule I.C.G. n'est pas C-tensorielle n'a d'ailleurs aucune importance dans la théorie I.C.G. puisqu'il n'y est question que d'une seule collinéation et non pas d'un groupe d'homographies.

Puisque la complémentarité des substitutions linéaires « alias » et « alibi » était connue depuis toujours, on peut donc dire qu'il aurait suffit d'ouvrir le premier traité élémentaire de géométrie pour découvrir les transformations de Mme CATTANEO. L'incontestable mérite de cet auteur est justement d'avoir pensé à une chose simple à laquelle personne ne songeait et d'avoir ainsi élargi les bases classiques du calcul tensoriel. Cette complémentarité apparaît très clairement lorsqu'on applique la notion nouvelle de différentielle mitoyenne aux B-substitution classiques et aux C-substitutions d'I.C.G.: les formules sont les mêmes.

3.3. – *CG-substitutions et transformations de* Mme MAURER-TISON: Les BG-substitutions n'étant guère utilisées en calcul tensoriel classique, comme nous l'avons déja dit, nous n'avons pas ici de point de comparaison connu et les formules prennent une allure de nouveauté. La différentielle mitoyenne devant s'annuler identiquement, nous aurons d'après (8) et (9) de 2.5.

(1)
$$\boxed{\begin{array}{c} \underset{\leftarrow}{\nabla}{}^{+}\boldsymbol{G}^{-} \equiv {}^{+}\boldsymbol{G}^{-}\cdot{}_{-}\underset{\leftarrow}{\boldsymbol{\Lambda}}^{-} + {}^{+}\underset{\leftarrow}{\boldsymbol{\Theta}}_{+}\cdot{}^{+}\boldsymbol{G}^{-} + {}^{+}\boldsymbol{G}^{-}\cdot{}_{-}\underset{\leftarrow}{\boldsymbol{\Theta}}^{-} = \underset{\leftarrow}{0} \\ \hline \underset{\leftarrow}{\nabla}{}_{-}\boldsymbol{G}_{+} \equiv {}_{-}\underset{\leftarrow}{\boldsymbol{\Lambda}}^{-}\cdot{}_{-}\boldsymbol{G}_{+} - {}_{-}\boldsymbol{G}_{+}\cdot{}^{+}\underset{\leftarrow}{\boldsymbol{\Theta}}_{+} - {}_{-}\underset{\leftarrow}{\boldsymbol{\Theta}}^{-}\cdot{}_{-}\boldsymbol{G}_{+} = \underset{\leftarrow}{0} \end{array}}$$

ce qui rend évidemment les formules explicites (10) et (11) de 2.5. Vu leur importance pour la Théorie Unitaire, nous les retranscrirons ici sous leur nouvelle forme:

(2)
$$\boxed{\begin{array}{c} \underset{\leftarrow}{\nabla}\,{}^{\overset{\pm}{i}}g^{\overset{\mp}{j}} = \underset{\leftarrow}{\delta}\,{}^{\overset{\pm}{i}}g^{\overset{\mp}{j}} + {}^{\overset{\pm}{i}}\underset{\leftarrow}{\omega}_{\underset{\pm}{k}}\cdot{}^{\overset{\pm}{k}}g^{\overset{\mp}{j}} + {}^{\overset{\pm}{i}}g^{\overset{\mp}{k}}\,{}_{\underset{\mp}{k}}\underset{\leftarrow}{\omega}^{\overset{\mp}{j}} = \underset{\leftarrow}{0} \\ \hline \underset{\leftarrow}{\nabla}\,{}_{\underset{\mp}{i}}g_{\underset{\pm}{j}} = \underset{\leftarrow}{\delta}\,{}_{\underset{\mp}{i}}g_{\underset{\pm}{j}} - {}_{\underset{\mp}{i}}g_{\underset{\pm}{k}}\cdot{}^{\overset{\pm}{k}}\underset{\leftarrow}{\omega}_{\underset{\pm}{j}} - {}_{\underset{\mp}{i}}\underset{\leftarrow}{\omega}^{\overset{\mp}{k}}\cdot{}_{\underset{\mp}{k}}g_{\underset{\pm}{j}} = \underset{\leftarrow}{0} \end{array}}$$

où les doubles signes $\pm$ signifient que les formules sont valables pour l'un et pour l'autre de ces signes; à ces relations se joignent, bien entendu:

(3)
$$\boxed{\begin{array}{c|c} {}^{\overset{\pm}{i}}\underset{\leftarrow}{\theta} = -\,{}^{\overset{\pm}{i}}g^{\overset{\mp}{j}}\cdot{}_{\underset{\mp}{j}}\underset{\leftarrow}{\gamma} & \underset{\leftarrow}{\gamma}_{\underset{\pm}{j}} = -\,\underset{\leftarrow}{\theta}^{\overset{\mp}{k}}\cdot{}_{\underset{\mp}{k}}g_{\underset{\pm}{j}} \end{array}}$$

Maintenant, les éléments de ${}^{+}G^{-}$ et de ${}_{-}G_{+}$ étant des composantes de B-tenseurs, on pourra introduire une différentielle classique non mitoyenne. On a alors:

$$\overset{(+-)}{\nabla}\underset{\leftarrow}{{}_{-}G_{+}} = \overset{(+)}{\nabla}\underset{\leftarrow}{{}_{-}G_{+}} - \underset{\leftarrow}{{}_{-}\Theta^{-}}\cdot{}_{-}G_{+} + \underset{\leftarrow}{{}_{+}\Theta^{+}}\cdot{}_{-}G_{+} = \underset{\leftarrow}{0}$$

c'est-à-dire

(4) $$\boxed{\underset{\leftarrow}{{}_{-}\Theta^{-}} = \underset{\leftarrow}{{}_{+}\Theta^{+}} + \overset{(+)}{\nabla}\underset{\leftarrow}{{}_{-}G_{+}}\cdot{}^{+}G^{-}}$$

qui est la formule fondamentale de Mme MAURER-TISON, et que nous nommerons la *première formule F.M.T.*, formule reliant deux connexions linéaires associées selon le *B-tenseur caractéristique* du type (2,0) ou (0,2) (tenseur régulier). Explicitement, (4) donne

(5) $$\underset{\overset{-}{\leftarrow}}{{}_{j}\overset{-}{\omega}{}^{i}} = \underset{\overset{+}{\leftarrow}}{{}_{j}\overset{+}{\omega}{}^{i}} + \overset{(+)}{\nabla}\underset{\overset{-+}{\leftarrow}}{{}_{j}g_{k}}\cdot{}^{k}\overset{+-}{g}{}^{i},$$

(c'est-à-dire la formule F.M.T. proprement dite), puis rend les relations de «polarité dissymétrique» (3) ci-dessus. Les formules F.M.T. sont B-tensorielles, mais elles mélangent les indices-signes $+$ et $-$. Cette violation de l'exigence C-tensorielle n'offre pas d'inconvénient tant qu'on ne s'en tient qu'à une seule CG-substitution, comme dans la théorie F.M.T. .

Les différentielles mitoyennes des ${}^{i}\overset{+-}{g}{}^{j}$ et des ${}_{i}\underset{+-}{g}{}_{j}$ présentent l'*invariance géodésique*; en effet, ces expressions contiennent des termes connectifs en écriture matricielle directe et d'autres en écriture transposée; d'après les n. 2,6, les termes en $\underset{\leftarrow}{\varphi}$ vont alors se détruire mutuellement, comme le montre un calcul algébrique facile.

On connaît l'importance qu'EINSTEIN attribuait aux φ-transformations en Théorie Unitaire: ce sont elles qui, en enlevant tout caractère intrinsèque à la séparation des coefficients de connexion Γ^{i}_{jk} en parties symétrique et antisymétrique, «mélangent» les deux types de champs physiques attachés à ces parties. On pourrait croire, avec KURSUNOGLU [23], que la même transformation «mélange» aussi les parties symétrique et antisymétrique des g_{ij}, par l'intermédiaire des équations de champ d'EINSTEIN; or comme celles-ci ne sont que des cas particuliers de nos dérivées mitoyennes, l'espoir d'un pareil mélange est anéanti par le théorème de l'invariance géodésique de ces équations, théorème que nous venons de démontrer.

§ 4. – Structures-images et géométrie semi-métrique.

4.1. – *Structures-images du type* CATTANEO: Désignons par $^+\underset{\leftarrow}{\Delta}_+$ et $^-\underset{\leftarrow}{\Delta}_-$ deux matrices de différentiation. Elles seront dites F-images, ou images selon la théorie I.C.G. s'il existe une matrice régulière $^+F_-$ de CF-substitution qui soit telle que l'on ait:

$$(1) \qquad {}^+F_- \cdot {}^-\underset{\leftarrow}{\Delta}_- \equiv {}^+\underset{\leftarrow}{\Delta}_- \equiv {}^+\underset{\leftarrow}{\Delta}_+ \cdot {}^+F_-$$

ce qui définit en même temps la matrice mitoyenne $^+\underset{\rightarrow}{\Delta}_-$. On pourrait de la même façon définir la matrice mitoyenne $^-\underset{\leftarrow}{\Delta}_+$.

Autrement dit, soit donné une matrice mitoyenne $^+\underset{\leftarrow}{\Delta}_-$ et un B-tenseur dont nous faisons la matrice mitoyenne $^+F_-$; à partir de ces éléments, on peut définir deux *structures F-images*, à savoir

$$(2) \qquad {}^+\underset{\leftarrow}{\Delta}_+ = {}^+\underset{\leftarrow}{\Delta}_- \cdot {}^-F_+ \qquad\qquad {}^-\underset{\leftarrow}{\Delta}_- = {}^-F_+ \cdot {}^+\underset{\leftarrow}{\Delta}_-$$

La matrice $^-\underset{\leftarrow}{\Delta}_+$ conduirait à des résultats analogues, puisque

$$(3) \qquad {}^+\underset{\leftarrow}{\Delta}_- = {}^+F_- \cdot {}^-\underset{\leftarrow}{\Delta}_+ \cdot {}^+F_-$$

Les deux structures se réduisent à une *structure auto-image* si

$$(4) \qquad {}^+\Delta_+ = {}^0\Delta_0 = {}^-\Delta_-$$

o indiquant l'absence d'indice-signe. Comme ceci entraîne

$$(5) \qquad \underset{\leftarrow}{\overset{(0)}{\nabla}}\, {}^i f_j = 0 \qquad \underset{\leftarrow}{{}^i\theta} = {}^i f_j \cdot \underset{\leftarrow}{{}^j\theta} \qquad \underset{\leftarrow}{\gamma_i} = \underset{\leftarrow}{\gamma_k} \cdot {}^k f_j$$

on aura évidemment une structure auto-image si $F = I$. Il sera donc tout naturel, dans le cas général, de poser, comme le fait d'ailleurs I.C.G. (écriture tensorielle):

$$(6) \qquad f^i_j = \delta^i_j + t^i_j$$

On notera que la matrice mitoyenne de différentiation présente deux écritures identiquement équivalentes,

(7) $$\left\| \begin{matrix} \overset{+(-)}{\underset{\leftarrow -}{{}^i\omega_j}} + \overset{+}{\underset{-}{{}^if_j}}\cdot\underset{\leftarrow}{\delta} & \overset{+}{\underset{\leftarrow}{{}^i\theta}} \\ \underset{\leftarrow}{\gamma_j} & \underset{\leftarrow}{\delta}\end{matrix}\right\| = {}^{+}\underset{\leftarrow}{\boldsymbol{\Delta}}_{-} = \left\| \begin{matrix} \overset{+(+)}{\underset{\leftarrow -}{{}^i\omega_j}} + \underset{\leftarrow}{\delta}\cdot\overset{+}{\underset{-}{{}^if_j}} & \overset{+}{\underset{\leftarrow}{{}^i\theta}} \\ \underset{\leftarrow -}{\gamma_j} & \underset{\leftarrow}{\delta}\end{matrix}\right\|$$

où l'on a posé

(8) $$\overset{+(-)}{\underset{\leftarrow -}{{}^i\omega_j}} \equiv \overset{+}{\underset{-}{{}^if_k}}\cdot\overset{-}{\underset{\leftarrow -}{{}^k\omega_j}} \qquad \overset{+(+)}{\underset{\leftarrow -}{{}^i\omega_j}} = \overset{+}{\underset{\leftarrow +}{{}^i\omega_k}}\cdot\overset{+}{\underset{-}{{}^kf_j}}$$

Ces deux écritures sont B — et C — tensorielles; on y voit apparaître les matrices $F\underset{\leftarrow}{\delta}$ et $\underset{\leftarrow}{\delta}F$ qui généralisent évidemment les matrices « scalaires » $I\underset{\leftarrow}{\delta} = \underset{\leftarrow}{\delta}I$. On peut donc écrire aussi:

(9) $${}^{+}\overset{(-)}{\underset{\leftarrow}{\boldsymbol{\Theta}}}_{-} + {}^{+}\boldsymbol{F}_{-}\cdot\underset{\leftarrow}{\delta} = {}^{+}\underset{\leftarrow}{\boldsymbol{\Delta}}_{-} = {}^{+}\overset{(+)}{\underset{\leftarrow}{\boldsymbol{\Theta}}}_{-} + \underset{\leftarrow}{\delta}\cdot{}^{+}\boldsymbol{F}_{-}$$

Enfin, l'égalité des deux blocs matriciels en les $\underset{\leftarrow}{\omega}$ donne la formule ci-après où nous avons réintroduit la notation des commutateurs pour les différentielles:

(10) $$\boxed{\overset{+(-)}{\underset{\leftarrow -}{{}^i\omega_j}} - \overset{+(+)}{\underset{\leftarrow -}{{}^i\omega_j}} = [\underset{\leftarrow}{\delta}\cdot\overset{+}{\underset{-}{{}^if_j}}]},$$

et qui n'est autre, encore une fois, que la première formule I.C.G., mais sous une écriture qui respecte la règle de non-mélange des indices-signes. Elle n'est tensorielle que si on fait passer tous les termes dans un même membre; anticipant ici un peu sur la suite, nous dirons que c'est déjà une formule de géométrie semi-métrique.

4.2. – *Structures-images du type* MAURER-TISON: Deux structures, de matrices de différentiation ${}^{+}\underset{\leftarrow}{\boldsymbol{\Delta}}_{+}$ et ${}^{-}\underset{\leftarrow}{\boldsymbol{\Delta}}_{-}$, seront dites G-images, ou images selon la théorie F.M.T., s'il existe une matrice régulière de CG-substitution, qui soit telle que

(1) $${}^{+}\boldsymbol{G}^{-}\cdot{}_{-}\underset{\leftarrow}{\boldsymbol{\Delta}}^{-} = {}^{+}\underset{\leftarrow}{\boldsymbol{\Delta}}^{-} = {}^{+}\underset{\leftarrow}{\boldsymbol{\Delta}}_{+}\cdot{}^{+}\boldsymbol{G}^{-},$$

ce qui définit en même temps la matrice mitoyenne ${}^{+}\underleftarrow{\Delta}^{-}$. On pourrait de même définir ${}_{-}\underleftarrow{\Delta}_{+}$ par

$$(2) \qquad {}_{-}\boldsymbol{G}_{+} \cdot {}^{+}\underleftarrow{\Delta}_{+} = {}_{-}\underleftarrow{\Delta}_{+} = {}_{-}\underleftarrow{\Delta}^{-} \cdot {}_{-}\boldsymbol{G}_{+}$$

Autrement dit, soit donné une matrice mitoyenne ${}^{+}\underleftarrow{\Delta}^{-}$ ou ${}_{-}\underleftarrow{\Delta}_{+}$ et un B-tenseur régulier dont nous formons les deux matrices inverses ${}_{-}\boldsymbol{G}_{+}$ et ${}^{+}\boldsymbol{G}^{-}$; à partir de ces éléments, on peut définir deux *structures G-images*, à savoir

$$(3) \qquad {}^{+}\underleftarrow{\Delta}_{+} = {}^{+}\underleftarrow{\Delta}^{-} \cdot {}_{-}\boldsymbol{G}_{+} = {}^{+}\boldsymbol{G}^{-} \cdot {}_{-}\underleftarrow{\Delta}_{+}$$

et

$${}^{-}\underleftarrow{\Delta}_{-} = {}^{-}\underleftarrow{\Delta}^{+} \cdot {}_{+}\boldsymbol{G}_{-} = {}^{-}\boldsymbol{G}^{+} \cdot {}_{+}\underleftarrow{\Delta}_{-}$$

Les deux structures se réduisent à une *structure auto-image* si

$$(4) \qquad {}^{+}\underleftarrow{\Delta}_{+} = {}^{0}\underleftarrow{\Delta}_{0} = {}^{-}\underleftarrow{\Delta}_{-}$$

Comme ceci entraîne

$$(5) \qquad \overset{+}{\underleftarrow{{}^{i}\theta}} = \underleftarrow{{}^{i}\theta} = \overset{-}{\underleftarrow{{}^{i}\theta}} \qquad \underset{\leftarrow +}{\gamma_j} = \underset{\leftarrow}{\gamma_j} = \underset{\leftarrow -}{\gamma_j}$$

on aura, en se reportant au n. 3.3.

$$\underleftarrow{0} = {}_{j}\underset{+}{\gamma} - {}_{j}\underset{-}{\gamma} = ({}_{j}\underset{-}{g}_{\underset{+}{i}} - {}_{j}\underset{+}{g}_{\underset{-}{i}}) \cdot \underleftarrow{{}^{i}\theta}$$

d'où, en écriture tensorielle ordinaire

$$(6) \qquad g_{[ij]} = 0 \quad \text{c'est-à-dire} \quad g_{ij} = g_{ji} = g_{(ij)}$$

et en écriture matricielle

$$(6') \qquad {}_{-}\boldsymbol{G}_{+} = {}_{0}\boldsymbol{G}_{0} = {}_{+}\boldsymbol{G}_{-}$$

Bien entendu, on a aussi

$$(7) \qquad g^{[ij]} = 0 \qquad g^{ij} = g^{ji} = g^{(ij)}$$

$${}^{+}\boldsymbol{G}^{-} = {}^{0}\boldsymbol{G}^{0} = {}^{-}\boldsymbol{G}^{+}$$

D'où l'important *théorème*: « Une structure auto-image du type F.M.T. est une structure métrique ». Il est toutefois impossible de démontrer ce théorème au moyen de la seule théorie de F.M.T., puisque cette dernière ignore les termes en $\underset{\leftarrow}{\theta}^i$ des matrices de structure. Il sera dès lors tout naturel d'envisager la décomposition des termes de g_{ij} et de g^{ij} en parties symétriques et anti-symétriques, ces dernières jouant donc, d'après notre théorème, un rôle capital dans la distinction des deux structures-images; nous reprendrons les notations de HLAVATY et de LICHNEROWICZ, et nous écrirons (notation tensorielle):

$$g_{ij} = h_{ij} + k_{ij} \qquad\qquad g^{ij} = l^{ij} + m^{ij} \tag{8}$$

On notera que la matrice mitoyenne de différentiation présente ici aussi deux écritures identiquement équivalentes:

$$\left\| \begin{matrix} \underset{-\leftarrow+}{\overset{(+)}{{}_i\omega_j}} + \underset{-\;+}{{}_ig_j}\cdot\underset{\leftarrow}{\delta} & -\underset{-\leftarrow}{{}_i\gamma} \\ \underset{\leftarrow+}{\gamma_j} & \underset{\leftarrow}{\delta} \end{matrix} \right\| = \underset{\leftarrow}{{}_-\Delta_+} = \left\| \begin{matrix} -\underset{-\;+}{\overset{(-)}{{}_i\omega_j}} + \underset{\leftarrow}{\delta}\cdot\underset{-\;+}{{}_ig_j} & -\underset{-\leftarrow}{{}_i\gamma} \\ \underset{\leftarrow+}{\gamma_j} & \underset{\leftarrow}{\delta} \end{matrix} \right\| \tag{9}$$

où l'on a posé

$$\underset{-\leftarrow+}{\overset{(+)}{{}_i\omega_j}} \equiv \underset{-\;+}{{}_ig_k}\cdot\underset{\leftarrow+}{\overset{+}{{}^k\omega_j}} \qquad \underset{-\leftarrow+}{\overset{(-)}{{}_i\omega_j}} \equiv \underset{-\leftarrow}{\overset{-}{{}_i\omega^k}}\cdot\underset{-\;+}{{}_kg_j} \tag{10}$$

Ces deux écritures sont B- et C-tensorielles; comme en théorie I.C.G., on y voit apparaître des matrices généralisant la matrice $\boldsymbol{I}\underset{\leftarrow}{\delta}$, à savoir maintenant ${}_-\boldsymbol{G}_+\cdot\underset{\leftarrow}{\delta}$ et $\underset{\leftarrow}{\delta}\cdot{}_-\boldsymbol{G}_+$, si bien qu'on peut écrire

$${}_-\boldsymbol{G}_+\cdot\underset{\leftarrow}{\delta} + \underset{\leftarrow}{{}_-\overset{(+)}{\boldsymbol{\Theta}}_+} = \underset{\leftarrow}{{}_-\boldsymbol{\Delta}_+} = \underset{\leftarrow}{\delta}\cdot{}_-\boldsymbol{G}_+ - \underset{\leftarrow}{{}_-\overset{(-)}{\boldsymbol{\Theta}}_+} \tag{11}$$

Comme dans la théorie I.C.G., la distinction entre les matrices mitoyennes de structure (+) et (—) correspond à la non-commutativité de l'opérateur $\underset{\leftarrow}{\delta}$ et de la matrice « caractéristique » formée au moyen du tenseur caractéristique; si ces grandeurs commutent, il n'existe plus qu'une écriture possible pour ces matrices. Enfin, l'égalité entre les deux blocs matriciels en les $\underset{\leftarrow}{\omega}$ donne, comme en théorie I.C.G., l'importante formule ci-après, où nous avons rétabli la notation des commutateurs pour les différentielles:

$$\boxed{\underset{-\leftarrow+}{\overset{(+)}{{}_i\omega_j}} + \underset{-\leftarrow+}{\overset{(-)}{{}_i\omega_j}} = [\underset{\leftarrow}{\delta}\cdot\underset{-\;+}{{}_ig_j}]} \tag{12}$$

C'est encore une fois la première formule de F.M.T., légèrement transformée d'un point de vue strictement formel de façon à lui faire respecter la règle fondamentale des indices signes; elle est B- et C-tensorielle si on fait passer tous les termes dans un seul membre. C'est aussi ce que nous avions appelé dans notre thèse *la formule fondamentale de la géométrie semi-métrique*, la formule qui généralise le théorème classique de RICCI en géométrie métrique. Aussi, nous nous permettrons de l'appeler la *formule de* TISON-GROSJEAN.

4.3. – *La géométrie semi-métrique*: Reprenant ici ce qui a été dit dans l'Introduction, ainsi que dans la thèse de P.V.G. [**14**], admettons l'existence, en tout point d'une variété donnée, de deux bases locales, images l'une de l'autre, et postulons que les produits internes sont admissibles entre vecteurs formés au moyen de bases-images. Ceci est le postulat fondamental de la *géométrie semi-métrique*; et la variété lui obéissant sera dite semi-métrique: elle est affine, puisque les produits internes lui sont étrangers tant qu'on ne fait usage que d'une des bases, mais elle présente quand même le caractère fondamental d'une variété métrique puisque certains produits internes sont possibles (d'où son nom). Tous les produits internes seront connus dès qu'on se sera donné le *tenseur semi-métrique* relié aux bases par les relations (notation matricielle ici, notation tensorielle dans l'Introduction):

$$(1) \qquad < \underset{-}{{}_i\vec{e}} \cdot \underset{+}{\vec{e}_j} > = \underset{-\,+}{{}_ig_j} \qquad\qquad < \underset{+}{{}_j\vec{e}} \cdot \underset{-}{\vec{e}_i} > = \underset{+\,-}{{}_jg_i}$$

Ces deux écritures sont équivalentes; elles se déduisent par transposition. Autrement dit, elles correspondent aux deux représentations matricielles possibles d'un tenseur d'ordre 2 (cfr. n. 1.1.):

$$(2) \qquad \underset{+-}{{}_ig_j} = {}_ih_j + {}_ik_j = {}_jh_i - {}_jk_i = \underset{-+}{{}_jg_i}$$

Les relations traduisant le postulat fondamental sont donc susceptibles de deux opérations unaires (c-à-d de carré $=1$) et dont le produit vaut 1: la permutation des indices lettres, et la permutation des indices-signes, ou « passage aux images ».

Les vecteurs des bases-images sont transportables parallèlement, par hypothèse, chacun selon la connexion propre à la base dont il fait partie:

$$(3) \qquad [\underset{\leftarrow}{\delta} \cdot \underset{-}{{}_i\vec{e}}] = \underset{-\;\leftarrow}{{}_i\overset{-}{\omega}{}^k} \cdot \underset{-}{{}_k\vec{e}} \qquad\qquad [\underset{\leftarrow}{\delta} \cdot \underset{+}{\vec{e}_j}] = \underset{+}{\vec{e}_k} \cdot \underset{\leftarrow\;+}{{}^k\overset{+}{\omega}_j}$$

La différentiation de (1) donne directement la formule de TISON-GROSJEAN et traduit le théorème « semi-métrique » de RICCI; si la structure est auto-image du type F.M.T., c'est-à-dire métrique, la formule de TISON-GROSJEAN restitue le théorème de RICCI (notation tensorielle):

$$\underleftarrow{\omega_{ij}} + \underleftarrow{\omega_{ji}} = \underleftarrow{\delta g_{ij}} \tag{4}$$

Nous aurons ainsi démontré, en passant, l'identité foncière des théories de F.M.T. et de P.V.G. . Ces deux géométries s'arrêtent au seuil de la Théorie Unitaire; à l'une comme à l'autre il faut un postulat nouveau pour franchir ce seuil, postulat s'exprimant par (4) de l'Introduction, c-à-d:

$$\overset{+}{\underset{+}{{}^{i}\omega_{jk}}} = \overset{-}{\underset{-}{{}^{i}\omega_{kj}}} \tag{5}$$

Nous n'irons pas plus loin ici dans cette direction; le postulat nouveau (qui introduit la pseudo-hermiticité d'EINSTEIN) se trouve en relation avec les symétries de « matrices de torsion-courbure », que l'on rencontrera au § **5**.

4.4. – *Géométrie semi-métrique et théorie I.C.G.*: L'incorporation de la théorie I.C.G. à la géométrie semi-métrique sera plus subtile, mais non moins intéressante parce qu'elle nous fera sortir radicalement des sentiers battus des géométries classiques.

Le système des $\vec{e}_i$ constituant une base d'un $\mathcal{E}_{(n)}$ tangent en un point d'une variété affine, désignons par $\overleftarrow{{}^{i}e}$ les éléments de la base de l'espace vectoriel dual $\mathcal{E}^{(n)}$ supposé existant. (La notation $\underleftarrow{{}^{i}e}$ eut été plus conforme aux indications du n. 1.2, mais nous préférons ici $\overleftarrow{{}^{i}e}$ car ces co-vecteurs ne sont pas des formes). On sait qu'entre vecteurs et co-vecteurs les produits internes sont toujours existants, même si l'espace $\mathcal{E}^{(n)}_{(n)}$ est purement affine; base et co-base sont dits naturellement associées si

$$< \overleftarrow{{}^{i}e} \cdot \vec{e}_j > = {}^{i}I_j \tag{1}$$

Cette relation élémentaire et classique est susceptible d'une généralisation immédiate. Dotons $\mathcal{E}_{(n)}$ et $\mathcal{E}^{(n)}$ chacun d'une paire de bases-images, et admettons l'existence d'un tenseur mitoyen permettant d'exécuter tous les produits internes entre vecteurs et co-vecteurs, du moment que ceux-ci puissent être rapportés à des bases-images:

$$(2) \qquad < \overset{+\leftarrow}{{}^{i}e} \cdot \underset{-}{\overset{\rightarrow}{e_j}} > = \underset{-}{\overset{+}{{}^{i}f_j}} \qquad < \underset{-}{\overset{\rightarrow}{{}_{j}e}} \cdot \overset{\leftarrow +}{e^{i}} > = \underset{-}{\overset{+}{{}_{j}f^{i}}}$$

Ainsi, si $\overrightarrow{a} = \overset{-}{a^{j}} \cdot \underset{-}{\overrightarrow{{}_{j}e}}$ est un vecteur et $\overleftarrow{b} = \underset{+}{b_i} \cdot \overset{+}{\overleftarrow{{}^{i}e}}$ un co-vecteur, on aura évidemment

$$(3) \qquad < \vec{a} \cdot \overset{\leftarrow}{b} > = a^{j} \cdot \underset{-}{\overset{-}{{}_{j}f^{i}}} \cdot \underset{+}{\overset{+}{{}_{i}b}}$$

ce qui généralise la relation classique qui se serait présentée si nous n'avions pas introduit ces systèmes-images, à savoir:

$$< \vec{a} \cdot \overset{\leftarrow}{b} > = a^{i} \cdot {}_{i}b$$

Remarquons cependant qu'on a toujours, comme en géométrie ordinaire:

$$(4) \qquad < \overset{+\leftarrow}{{}^{i}e} \cdot \underset{+}{\overset{\rightarrow}{e_j}} > = \underset{+}{\overset{+}{{}^{i}\boldsymbol{I}_j}} \qquad < \overset{-\leftarrow}{{}^{i}e} \cdot \underset{-}{\overset{\rightarrow}{e_j}} > = \underset{-}{\overset{-}{{}^{i}\boldsymbol{I}_j}}$$

ce qui revient à dire que

$$(5) \qquad \overset{+\leftarrow}{{}^{i}e} = \underset{-}{\overset{+}{{}^{i}f_j}} \cdot \overset{-\leftarrow}{{}^{j}e} \qquad \underset{-}{\overset{\rightarrow}{e_j}} = \underset{-}{\overset{\rightarrow}{e_k}} \cdot \underset{+\ -}{\overset{+}{{}^{k}f_j}}$$

Les vecteurs des bases et des co-bases sont transportables parallèlement selon les lois:

$$(6) \qquad \underset{\leftarrow}{[\delta \cdot \overset{+\leftarrow}{{}^{i}e}]} = - \underset{\leftarrow +}{\overset{+}{{}^{i}\omega_j}} \cdot \overset{+\leftarrow}{{}^{j}e} \qquad [\delta \cdot \underset{\leftarrow\ -}{\overset{\rightarrow}{e_j}}] = \underset{-}{\overset{\rightarrow}{e_k}} \cdot \underset{\leftarrow}{\overset{-}{{}^{k}\omega_j}}$$

Si alors nous différentions (2), nous retrouvons, sans plus, la formule de I.C.G. sous la forme que nous lui avons donnée en 4.1. (10). La formule n'a pas d'équivalent « métrique » ou autre, comme la formule de TISON-GROSJEAN, et c'est ici que nous sortons des sentiers battus, en même temps que nous voyons la théorie de I.C.G. venir rejoindre une idée que nous avions développée il y a trois ans [1] et que nous avons résumée comme suit dans la préface de notre Thèse [**14**]:

[1] Non publié, mais communiqué.

« On sait que la géométrie projective engendre la géométrie affine puis la géométrie métrique en privilégiant d'abord un élément « de l'infini » puis une *polarité*. Or les deux opérations fondamentales de la projective sont la polarité et l'*homographie*. Que se passerait-il si on privilégiait *aussi* une homographie? Un examen élémentaire montre que la géométrie prend une allure un peu étrange: dans le plan algébrique, deux droites déterminent un point qui n'est pas leur intersection; un référentiel projectif se dissocie en un trilatère et un tri-point bien distincts, etc. . Si ${}_jf^i$ est l'homographie privilégiée, les relations d'appartenance des points aux droites s'écrivent $a^j \cdot {}_jf^k \cdot {}_kb = 0$. L'idée des produits mitoyens de la géométrie semi-métrique se trouvait déjà là ... ».

4.5. – *Tenseurs caractéristiques en géométrie semi-métrique*: Nous allons maintenant faire apparaître le lien « semi-métrique » entre les théories I.C.G. et F.M.T., en même temps que *nous ferons entrer le tenseur d'I.C.G. dans la Théorie Unitaire* d'EINSTEIN. Nous étudierons d'abord les tenseurs caractéristiques puis les connexions.

Soit d'abord deux structures métriques, c'est-à-dire auto-images F.M.T.; soit ${}_{\underset{+}{i}}a_{\underset{+}{j}}$ et ${}_{\underset{-}{i}}a_{\underset{-}{j}}$ leurs tenseurs métriques respectifs; on a donc:

$$\text{(1)} \qquad \underset{\leftarrow}{\gamma}_{\underset{\pm}{j}} = - \underset{\leftarrow}{\theta}^{\overset{\pm}{i}} \cdot {}_{\underset{\pm}{i}}a_{\underset{\pm}{j}} \qquad \underset{\leftarrow}{\theta}^{\overset{\pm}{i}} = - \underset{\leftarrow}{\gamma}_{\underset{\pm}{j}} \cdot {}^{\overset{\pm}{j}}a^{\overset{\pm}{i}}$$

Admettons que les $\underset{\leftarrow}{\theta}$ et les $\underset{\leftarrow}{\gamma}$ soient aussi images au sens I.C.G., c'est-à-dire qu'il existe un tenseur régulier mitoyen ${}_if^i$ tel que l'on ait:

$$\text{(2)} \qquad \underset{\leftarrow}{\theta}^{\overset{\pm}{i}} = \underset{\leftarrow}{\theta}^{\overset{\mp}{j}} \cdot {}_{\underset{\mp}{j}}f^{\overset{\pm}{i}} \qquad \underset{\leftarrow}{\gamma}_{\underset{\pm}{i}} = \underset{\leftarrow}{\gamma}_{\underset{\mp}{j}} \cdot {}^{\overset{\mp}{j}}f_{\underset{\pm}{i}}$$

Les tenseurs métriques sont alors images au sens I.C.G., c-à-d *F*-images

$$\text{(3)} \qquad {}_{\underset{\pm}{i}}a_{\underset{\pm}{j}} = {}_{\underset{\pm}{i}}f^{\overset{\mp}{k}} \cdot {}_{\underset{\mp}{k}}a_{\underset{\mp}{l}} \cdot {}^{\overset{\mp}{l}}f_{\underset{\pm}{j}} \qquad {}^{\overset{\pm}{i}}a^{\overset{\pm}{j}} = {}^{\overset{\pm}{i}}f_{\underset{\mp}{k}} \cdot {}^{\overset{\mp}{k}}a^{\overset{\mp}{l}} \cdot {}_{\underset{\mp}{l}}f^{\overset{\pm}{j}}$$

On voit ainsi apparaître un tenseur régulier caractéristique du type F.M.T., c-à-d un tenseur semi-métrique d'EINSTEIN

$$\text{(4)} \qquad {}_{\underset{\pm}{i}}g_{\underset{\mp}{j}} = {}_{\underset{\pm}{i}}a_{\underset{\pm}{k}} \cdot {}^{\overset{\pm}{j}}f_{\underset{\mp}{j}} = {}_{\underset{\pm}{i}}f^{\overset{\mp}{k}} \cdot {}_{\underset{\mp}{k}}a_{\underset{\mp}{j}}; \qquad {}^{\overset{\mp}{j}}g^{\overset{\pm}{i}} = \dots$$

Les deux représentations matricielles de ce tenseur, correspondant aux deux images, sont elles-mêmes F-images:

$$(5) \qquad {}_{\underset{\pm}{i}}g_{\underset{\mp}{j}} = {}_{\underset{\pm}{i}}f^{\overset{\mp}{k}} \cdot {}_{\underset{\mp}{k}}g_{\underset{\pm}{l}} \cdot {}^{\overset{\pm}{l}}f_{\underset{\mp}{j}} \qquad {}^{\overset{\pm}{i}}g^{\overset{\mp}{j}} = {}^{\overset{\pm}{i}}f_{\underset{\mp}{k}} \cdot {}^{\overset{\mp}{k}}g^{\overset{\pm}{l}} \cdot {}_{\underset{\pm}{l}}f^{\overset{\mp}{j}}$$

De (4) on tire aussi les relations

$$(6) \qquad {}_{\underset{\pm}{i}}a_{\underset{\pm}{j}} = {}_{\underset{\pm}{i}}g_{\underset{\mp}{k}} \cdot {}^{\overset{\mp}{k}}f_{\underset{\pm}{j}} = {}_{\underset{\pm}{i}}f^{\overset{\mp}{k}} \cdot {}_{\underset{\mp}{k}}g_{\underset{\pm}{j}}; \qquad {}^{\overset{\pm}{i}}a^{\overset{\pm}{j}} = \dots$$

et les relations

$$(7) \qquad {}_{\underset{\pm}{i}}f^{\overset{\mp}{j}} = {}_{\underset{\pm}{i}}g_{\underset{\mp}{k}} \cdot {}^{\overset{\mp}{k}}a^{\overset{\mp}{j}} = {}_{\underset{\pm}{i}}a_{\underset{\pm}{k}} \cdot {}^{\overset{\pm}{k}}g^{\overset{\mp}{j}}; \quad {}^{\overset{\mp}{j}}f_{\underset{\pm}{i}} = \dots$$

Les deux tenseurs métriques transforment les deux tenseurs caractéristiques en leurs inverses

$$(8) \qquad {}_{\underset{\pm}{i}}g_{\underset{\mp}{j}} = {}_{\underset{\pm}{i}}a_{\underset{\pm}{k}} \cdot {}^{\overset{\pm}{k}}g^{\overset{\mp}{l}} \cdot {}_{\underset{\mp}{l}}a_{\underset{\mp}{j}} \qquad {}_{\underset{\pm}{i}}f^{\overset{\mp}{j}} = {}_{\underset{\pm}{i}}a_{\underset{\pm}{k}} \cdot {}^{\overset{\mp}{k}}f_{\underset{\mp}{l}} \cdot {}^{\overset{\mp}{l}}a^{\overset{\mp}{j}} .$$

Et le tenseur semi-métrique interchange les deux tenseurs métriques

$$(9) \qquad {}^{\overset{\pm}{i}}a^{\overset{\pm}{j}} = {}^{\overset{\pm}{i}}g^{\overset{\pm}{k}} \cdot {}_{\underset{\mp}{k}}a_{\underset{\mp}{l}} \cdot {}^{\overset{\mp}{l}}g^{\overset{\pm}{j}}; \qquad {}_{\underset{\pm}{i}}a_{\underset{\pm}{j}} = \dots ,$$

de même que les deux raprésentations du tenseur d'I.C.G., transposées l'une de l'autre

$$(10) \qquad {}_{\underset{\pm}{i}}f^{\overset{\mp}{j}} = {}_{\underset{\pm}{i}}g_{\underset{\mp}{k}} \cdot {}^{\overset{\mp}{k}}f_{\underset{\pm}{l}} \cdot {}^{\overset{\pm}{l}}g^{\overset{\mp}{j}}; \qquad {}^{\overset{\mp}{j}}f_{\underset{\pm}{i}} = \dots$$

Nous avons ainsi résumé toutes les relations existant entre les tenseurs caractéristiques introduits: deux tenseurs de RIEMANN, un tenseur de Mme CATTANEO et un tenseur d'EINSTEIN ou de Mme MAURER-TISON. Par convention de notation, lorsqu'il s'agit de tenseurs caractéristiques, la même lettre d'appui désigne à la fois le tenseur et le tenseur inverse.

4.6. – *La « vraie métrique »*: A ce stade de la discussion se lève tout naturellement la question de la « vraie » métrique, comme dit Mme TONNELAT. Nous renverrons d'abord à cet auteur [**7**, Ch VI] pour une revue assez complète du problème. Puis nous nous permettrons de nous demander ce qu'est en fait une « vraie » métrique dans une Théorie Unitaire qui sollicite visiblement une géométrie plus vaste que la géométrie métrique. Il faudrait aussi se mettre d'accord sur ce que l'on attend de la « vraie métrique »: représenter le champ gravifique? déterminer les géodésiques? fixer l'équation caractéristique des ondes? élever et abaisser les indices sous les signes de différentiation absolue? mesurer les distances et les angles, et ainsi déterminer le cône isotrope ou cône de lumière?

Rien ne nous dit que dans une géométrie plus large que celle de RIEMANN, la géométrie semi-métrique précisément, et dans une théorie plus vaste que la Relativité Gravifique, à savoir la Théorie Unitaire, ces différents rôles ne seront pas tenus par deux ou plusieurs tenseurs, tels que nos deux tenseurs métriques ci-dessus et le tenseur semi-métrique. La Théorie Unitaire fournit deux tenseurs symétriques du type riemannien, qui sont ${}_ih_j$ et ${}^ik^j$ dans les décompositions que nous rappelons ici

$$(1) \qquad {}_i\underset{\pm\mp}{g}_j = {}_ih_j \pm {}_ik_j \qquad {}^i\overset{\mp\pm}{g}{}^k = {}^il^k \pm {}^im^k$$

Sans entrer ici dans le détail des suggestions faites par de nombreux auteurs au sujet de la « vraie » métrique, signalons simplement que pour HLAVATY [**6**, p. 3] le tenseur métrique est ${}_ih_j$, tandis que pour LICHNEROWICZ [**2**, p. 288] c'est ${}^il^k$. Puisque notre géométrie introduit deux métriques riemanniennes images l'une de l'autre selon le tenseur ${}_if^j$ d'I.C.G., il devient tentant de poser, à titre d'essai tout au moins

$${}_i\underset{--}{a}_j \equiv {}_ih_j \qquad {}^i\overset{++}{a}{}^j \equiv {}^il^j$$

Bien entendu, pareilles relations n'ont de sens que si ${}_ih_j$ et ${}^il^j$ obéissent aux diverses relations du n. 4.5; or il en est bien ainsi, comme la suite des calculs va le démontrer. Cette hypothèse n'aura évidemment pas répondu à la question de la « vraie métrique », en supposant que cette question ait un sens, mais elle aura réconcilié (à ce stade tout au moins) les deux points de vue opposés de HLAVATY et de LICHNEROWICZ. En outre, non seulement elle aura élargi le débat, mais elle nous aura permis d'interpréter en Théorie Unitaire le tenseur de Mme CATTANEO, comme on va le voir.

4.7. – *Le tenseur de* Mme CATTANEO *en Théorie Unitaire*: Rappelons d'abord qu'entre les termes de la décomposition du tenseur métrique existent les relations ci-après, faciles à démontrer [**13**]:

$$
{}_ih_j\cdot{}^jl^k + {}_ik_j\cdot{}^jm^k = {}_i\boldsymbol{I}^k
$$

$$
\text{(1)} \qquad {}_ih_j\cdot{}^jm^k + {}_ik_j\cdot{}^jk^k = 0 \qquad {}^jm^k\cdot{}_kl_i + {}^jh^k\cdot{}_kk_i = 0
$$

les deux dernières se déduisant l'une de l'autre.
Ceci posé, on a

$$
\text{(2)} \qquad {}_{\underset{+}{i}}f^{\overset{-}{j}} = \left\{ \begin{array}{l} {}_{\underset{+}{i}}a_{\underset{+}{k}}\cdot{}^{\overset{+}{k}}g^{\overset{-}{j}} = {}_il_k\cdot{}^kl^j - {}_il_k\cdot{}^km^j \\ {}_{\underset{+}{i}}g_{\underset{-}{k}}\cdot{}^{\overset{-}{k}}a^{\overset{-}{j}} = {}_ih_k\cdot{}^kh^i + {}_ih_k\cdot{}^kh^j \end{array} \right\} = {}_iI^j + {}_it^j
$$

avec

$$
\text{(3)} \qquad {}_it^j \equiv {}_ik_k\cdot{}^kh^j = - {}_il_k\cdot{}^km^j
$$

les deux valeurs de ${}_it^j$ étant égales d'après (1) ci-dessus. On a ainsi retrouvé la décomposition du tenseur d'I.C.G., décomposition (6) de 4.1. déjà signalée par son auteur, et en même temps on a identifié ${}_it^j$ à une grandeur bien connue de la Théorie Unitaire: c'est le tenseur k_i^j de HLAVATY [**6**, p. XI].

D'autre part, on sait que d'après l'équation de champ ci-après de la Théorie Unitaire

$$
\partial_i(\sqrt{|g|}\cdot{}^im^j) = 0
$$

on est tenté d'assimiler le tenseur

$$
H_{ij} \equiv \frac{1}{2}\sqrt{|g|}\cdot\varepsilon_{ijkl}\, m^{kl}
$$

au champ électro-magnétique. Cette hypothèse fournirait ainsi une relation entre le champ électro-magnétique et le tenseur d'I.C.G., relation déja pressentie par cet auteur, sous une forme quelque peu différente, il est vrai [**10**, p. 54].

Le tenseur inverse d'I.C.G. ne présente pas tout-à-fait la même décomposition en fonction des tenseurs de la Théorie Unitaire; on a en effet:

$$
\text{(4)} \qquad {}_{\underset{-}{i}}f^{\overset{+}{j}} = \left\{ \begin{array}{l} {}_{\underset{-}{i}}a_{\underset{-}{k}}\cdot{}^{\overset{-}{k}}g^{\overset{+}{j}} = {}_ih_k\cdot{}^kl^j + {}_ih_k\cdot{}^km^j \\ {}_{\underset{-}{i}}g_{\underset{+}{k}}\cdot{}^{\overset{+}{k}}a^{\overset{+}{j}} = {}_ih_k\cdot{}^kl^j - {}_ik_k\cdot{}^kl^j \end{array} \right\} = {}_ih_k\cdot{}^kl^j({}_iI^j - {}_it^j)
$$

Le calcul de ces deux décompositions, en pouvant s'exercer par deux voies différentes, aura démontré la compatibilité des hypothèses $\underset{-}{a} = h$ et $\underset{+}{a} = l$. Il va de soi que les hypothèses contraires $\underset{+}{a} = h$ et $\underset{-}{a} = l$ conduisent à des résultats similaires, tout aussi satisfaisants, mais où t aura changé de signe.

4.8. – *Connexions-images*: Il ne faut pas s'attendre à trouver en général des connexions qui soient à la fois F-images et G-images; nous allons voir cependant qu'il existe des relations simples entre les connexions associées aux différents tenseurs caractéristiques. Soit p l'un de ceux-ci; nous désignerons par ${}^{+}\underset{\leftarrow}{\overset{(p)}{\omega}}{}_{+}$, et ${}^{-}\underset{\leftarrow}{\overset{(p)}{\omega}}{}_{-}$ les deux connexions qui sont images selon p; le même indice (p) affectera la différentiation mitoyenne calculée au moyen de ces connexions. On devra donc toujours avoir, par définition de notation

(1) $$ {}^{+}\underset{\leftarrow}{\overset{(p)}{\nabla}}{}^{-}\, p = \underset{\leftarrow}{0} $$

ce qui constitue en même temps une définition de la notion de tenseur caractéristique.

Pour alléger les écritures, nous exécuterons cette fois les calculs en notation matricielle sans indices-lettres, mais en conservant les indices-signes; les matrices sont à n^2 éléments et sont représentées par des minuscules. Soit donc ${}^{\pm}\underset{\leftarrow}{\omega}{}_{\pm}$ les deux matrices connectives associées aux deux métriques; leurs coefficients sont les symboles de Christoffel associés à ces tenseurs symétriques. On a ainsi

(2) $$ \underset{\leftarrow}{\overset{(a)}{\nabla}}{}_{\pm} a_{\pm} = \underset{\leftarrow}{\delta}{}_{\pm} a_{\pm} - {}_{\pm}a_{\pm} \cdot {}^{\pm}\underset{\leftarrow}{\omega}{}_{\pm} - {}_{\pm}\underset{\leftarrow}{\omega}{}^{\pm} \cdot {}_{\pm}a_{\pm} = \underset{\leftarrow}{0} $$

et on notera qu'il s'agit ici de différentielles du type classique, non mitoyennes. Soit d'autre part ${}^{\pm}\underset{\leftarrow}{\overset{(g)}{\omega}}{}_{\mp}$ les matrices connectives associées au tenseur semi-métrique, et posons

(3) $$ {}^{\pm}\underset{\underset{\pm}{\leftarrow}}{\tau}{}_{\pm} = {}^{\pm}\underset{\leftarrow}{\overset{(g)}{\omega}}{}_{\pm} - {}^{\pm}\underset{\leftarrow}{\overset{(a)}{\omega}}{}_{\pm} $$

les éléments des deux matrices ${}^{+}\underset{\underset{+}{\leftarrow}}{\tau}{}_{+}$ et ${}^{-}\underset{\underset{-}{\leftarrow}}{\tau}{}_{-}$ étant des 1-formes à valeur tensorielle.

On voit alors aisément que

(4) $$ \underset{\leftarrow}{\overset{(a)}{\nabla}}{}_{\pm} g_{\mp} = {}_{\pm}g_{\mp} \cdot {}^{\mp}\underset{\leftarrow}{\tau}{}_{\mp} + {}_{\pm}\underset{\leftarrow}{\tau}{}^{\pm} \cdot {}_{\pm}g_{\mp} $$

Or nous disposons ici d'une des formules typiques de la géométrie semi-métrique:

$$(5) \qquad \overset{(a)}{\underset{\leftarrow}{\nabla}}{}_{+}g_{-} = \overset{(a)}{\nabla}({}_{+}\underset{\leftarrow}{f}{}^{-}\cdot{}_{-}a_{-}) = \overset{(a)}{\underset{\leftarrow}{\nabla}}{}_{+}f^{-}\cdot{}_{-}a_{-} + {}_{+}f^{-}\cdot\overset{(a)}{\underset{\leftarrow}{\nabla}}{}_{-}a_{-} = \overset{(a)}{\underset{\leftarrow}{\nabla}}{}_{+}f^{-}\cdot{}_{-}a_{-}$$

formule dont le lecteur fera aisément la démonstration. Dès lors on a:

$$(6) \qquad \overset{(a)}{\nabla}\underset{\leftarrow}{\cdot}{}_{+}f^{-} = {}_{+}g_{-}\cdot{}^{-}\underset{\underset{-}{\leftarrow}}{\tau}{}_{-}\cdot{}^{-}a^{-} + {}_{+}\underset{\underset{+}{\leftarrow}}{\tau}{}^{+}\cdot{}_{+}g_{-}\cdot{}^{-}a^{-}$$

$$= {}_{+}f^{-}\cdot{}_{-}a_{-}\cdot{}^{-}\underset{\underset{-}{\leftarrow}}{\tau}{}_{-}\cdot{}^{-}a^{-} + {}_{+}\underset{\underset{+}{\leftarrow}}{\tau}{}^{+}\cdot{}_{+}f^{-}$$

On définira les connexions F-images en posant

$$(7) \qquad \overset{(f)}{\underset{\leftarrow}{\nabla}}{}_{+}f^{-} = \underset{\leftarrow}{0}$$

ce qui par comparaison avec (6) donne

$$(8) \qquad {}_{-}\overset{(f)}{\underset{\leftarrow}{\omega}}{}^{-} = {}_{-}\overset{(a)}{\underset{\leftarrow}{\omega}}{}^{-} - {}_{-}\overset{\wedge}{\underset{\underset{-}{\leftarrow}}{\tau}}{}^{-}; \qquad {}_{+}\overset{(f)}{\underset{\leftarrow}{\omega}}{}^{+} = {}_{+}\overset{(a)}{\underset{\leftarrow}{\omega}}{}^{+} + {}_{+}\underset{\underset{+}{\leftarrow}}{\tau}{}^{+} = {}_{+}\overset{(g)}{\underset{\leftarrow}{\omega}}{}^{+}$$

où l'on a posé

$$(9) \qquad {}_{\pm}\overset{\wedge}{\underset{\underset{\pm}{\leftarrow}}{\tau}}{}^{\pm} \equiv {}_{\pm}a_{\pm}\cdot{}^{\pm}\underset{\leftarrow}{\tau}{}_{\pm}\cdot{}^{\pm}a^{\pm}$$

Or un calcul similaire peut se faire relativement à ${}_{-}f^{+}$, inverse de ${}_{+}f^{-}$. Il conduit à une seconde paire de connexions images, garantissant la relation

$$(10) \qquad \overset{\overset{-}{(f)}}{\underset{\leftarrow}{\nabla}}{}_{-}f^{+} = \underset{\leftarrow}{0}$$

connexions définies par la relation « image » de (8), c'est-à-dire une relation déduite de (9) en permutant les $+$ et les $-$. Comme les relations (7) et (10) impliquent les relations

$$(11) \qquad \overset{(f)}{\underset{\leftarrow}{\nabla}}{}_{-}f^{+} = \underset{\leftarrow}{0} \qquad \overset{\overset{-}{(f)}}{\underset{\leftarrow}{\nabla}}{}_{+}f^{-} = \underset{\leftarrow}{0}$$

il doit donc exister des relations entre les deux paires de connexions F-images; on voit aisément que ces relations sont

$$(12) \qquad {}_{+}f^{-}\cdot{}_{-}(\tau \underset{\underset{-}{\leftarrow}}{+} \overset{\wedge}{\tau})^{-} = {}_{+}(\tau \underset{\underset{+}{\leftarrow}}{+} \overset{\wedge}{\tau})^{+}\cdot{}_{+}f^{-}$$

et qu'elles permettent de faire passer de $\underset{-}{\tau}$ à $\underset{+}{\tau}$ et inversément.

Chemin faisant, nous aurons rencontré deux matrices dont les éléments sont des 1-formes à valeur tensorielle, à savoir

$$(13) \qquad {}_{+}\underset{\leftarrow}{\varrho}^{+} \equiv {}_{+}(\underset{\underset{+}{\leftarrow}}{\tau} + \underset{\underset{+}{\leftarrow}}{\overset{\wedge}{\tau}})^{+} \qquad {}_{-}\underset{\leftarrow}{\varrho}^{-} \equiv {}_{-}(\underset{\underset{-}{\leftarrow}}{\tau} + \underset{\underset{-}{\leftarrow}}{\overset{\wedge}{\tau}})^{-}$$

et qui possèdent les intéressantes propriétés d'être à la fois: 1°) auto-images pour les métriques correspondantes

$$(14) \qquad {}^{\pm}a^{\pm}\cdot{}_{\pm}\underset{\leftarrow}{\varrho}^{\pm}\cdot{}_{\pm}a_{\pm} = {}^{\pm}\underset{\leftarrow}{\varrho}_{\pm}$$

2°) F-images comme on le voit d'après (12)

$$(15) \qquad {}_{\pm}f^{\mp}\cdot{}_{\mp}\underset{\leftarrow}{\varrho}^{\mp}\cdot{}_{\mp}f^{\pm} = {}_{\pm}\underset{\leftarrow}{\varrho}^{\pm}$$

3°) G-images, ce qui résulte des deux propriétés précédentes:

$$(16) \qquad {}_{\pm}g_{\mp}\cdot{}^{\mp}\underset{\leftarrow}{\varrho}_{\mp}\cdot{}^{\mp}g^{\pm} = {}_{\pm}\underset{\leftarrow}{\varrho}^{\pm}$$

On aura remarqué le jeu des quatre tenseurs caractéristiques, élevant et abaissant les indices- lettres, changeant ou respectant les indices-signes, et on aura ainsi vu dans quel sens la géométrie semi-métrique généralise une propriété bien connue du tenseur métrique. On peut dire que ces deux matrices ϱ ne ne constituent qu'un seul être géométrique, et c'est pour cela d'ailleurs que nous les avons notées ${}_{+}\underset{\leftarrow}{\varrho}^{+}$ et ${}_{-}\underset{\leftarrow}{\varrho}^{-}$, mais non point ${}_{+}\underset{\underset{+}{\leftarrow}}{\varrho}^{+}$ et ${}_{-}\underset{\underset{-}{\leftarrow}}{\varrho}^{-}$ comme c'était le cas pour les τ.

Le cas $\underset{\leftarrow}{\varrho} \equiv \underset{\leftarrow}{0}$ est celui où il n'existe plus qu'une seule paire de connexions, lesquelles seront à la fois F-images et G-images.

§ 5. – Courbure et torsion.

5.1. – *Matrice de torsion-courbure*: Introduisons le produit extérieur de la matrice de différentiation par elle-même; ce sera

$$\underset{\leftleftarrows}{\boldsymbol{\Omega}} \equiv \underset{\leftarrow}{\boldsymbol{\Delta}} \wedge \underset{\leftarrow}{\boldsymbol{\Delta}} \equiv \underset{\leftleftarrows}{\boldsymbol{\delta}} + \underset{\leftleftarrows}{\boldsymbol{r}} \tag{1}$$

avec

$$\underset{\leftleftarrows}{\boldsymbol{r}} \equiv (\underset{\leftarrow}{\boldsymbol{\delta}} \wedge \underset{\leftarrow}{\boldsymbol{\Theta}}) + \underset{\leftarrow}{\boldsymbol{\Theta}} \wedge \underset{\leftarrow}{\boldsymbol{\Theta}} \equiv \underset{\leftleftarrows}{\boldsymbol{P}} + \underset{\leftleftarrows}{\boldsymbol{U}} \tag{2}$$

et avec

$$\underset{\leftleftarrows}{\boldsymbol{P}} \equiv \left\| \begin{matrix} \underset{\leftleftarrows}{{}^iR_j} & \underset{\leftleftarrows}{{}^iS} \\ \underset{\leftleftarrows}{T_j} & \underset{\leftleftarrows}{0} \end{matrix} \right\| \qquad \underset{\leftleftarrows}{\boldsymbol{U}} \equiv \left\| \begin{matrix} \underset{\leftarrow}{{}^i\theta} \wedge \underset{\leftarrow}{\gamma_j} & \underset{\leftleftarrows}{0} \\ \underset{\leftleftarrows}{0} & \underset{\leftarrow}{\gamma_k} \wedge \underset{\leftarrow}{{}^k\theta} \end{matrix} \right\| \tag{3}$$

La matrice $\underset{\leftleftarrows}{\boldsymbol{P}}$ sera dite de « torsion-courbure »; ses éléments sont des scalaires généraux d'ordre 2, c'est-à-dire des 2-formes à valeur tensorielle. Un calcul simple donne ces éléments qui seront

la torsion:

$$\underset{\leftleftarrows}{{}^iS} \equiv (\underset{\leftarrow}{\delta} \wedge \underset{\leftarrow}{{}^i\theta}) + \underset{\leftarrow}{{}^i\omega_k} \wedge \underset{\leftarrow}{{}^k\theta} \equiv (\underset{\leftarrow}{\nabla} \wedge \underset{\leftarrow}{{}^i\theta}) \equiv \underset{\leftleftarrows}{\nabla {}^i\theta} \tag{4}$$

la co-torsion

$$\underset{\leftleftarrows}{T_j} \equiv (\underset{\leftarrow}{\delta} \wedge \underset{\leftarrow}{\gamma_j}) + \underset{\leftarrow}{\gamma_k} \wedge \underset{\leftarrow}{{}^k\omega_j} \equiv (\underset{\leftarrow}{\nabla} \wedge \underset{\leftarrow}{\gamma_j}) \equiv \underset{\leftleftarrows}{\nabla \gamma_j} \tag{5}$$

la courbure

$$\underset{\leftleftarrows}{{}^iR_j} \equiv (\underset{\leftarrow}{\delta} \wedge \underset{\leftarrow}{{}^i\omega_j}) + \underset{\leftarrow}{{}^i\omega_k} \wedge \underset{\leftarrow}{{}^k\omega_j} \equiv (\underset{\leftarrow}{\nabla} \wedge \underset{\leftarrow}{{}^i\omega_j}) \equiv \underset{\leftleftarrows}{\nabla {}^i\omega_j} \tag{6}$$

Ces éléments seront par définition les différentielles absolues des éléments de la matrice de structure; c'est d'ailleurs ce que rappelent les 3es et 4es membres des relations ci-dessus.

La transposition donne

$$-\underset{\leftleftarrows}{\tilde{\Omega}} = \underset{\leftarrow}{\tilde{\Delta}} \wedge \underset{\leftarrow}{\tilde{\Delta}} = \underset{\leftleftarrows}{\delta} - \underset{\leftleftarrows}{\tilde{r}} \tag{7}$$

avec

$$\underset{\leftleftarrows}{\tilde{r}} \equiv (\underset{\leftarrow}{\delta} \wedge \underset{\leftarrow}{\tilde{\Theta}}) - \underset{\leftarrow}{\tilde{\Theta}} \wedge \underset{\leftarrow}{\tilde{\Theta}} \equiv \underset{\leftleftarrows}{\tilde{P}} + \underset{\leftleftarrows}{\tilde{U}} \tag{8}$$

et avec

$$\underset{\leftleftarrows}{\tilde{P}} \equiv \begin{Vmatrix} \underset{\leftleftarrows}{{}_jR^i} & \underset{\leftleftarrows}{{}_jT} \\ \underset{\leftleftarrows}{S^i} & \underset{\leftleftarrows}{0} \end{Vmatrix} \qquad \underset{\leftleftarrows}{\tilde{U}} = \begin{Vmatrix} -\underset{\leftarrow}{{}_j\gamma} \wedge \underset{\leftarrow}{\theta^i} & \underset{\leftleftarrows}{0} \\ \underset{\leftleftarrows}{0} & -\underset{\leftarrow}{\theta^k} \wedge \underset{\leftarrow}{{}_k\gamma} \end{Vmatrix} \tag{9}$$

La matrice $\underset{\leftleftarrows}{U}$ est inconnue du calcul tensoriel classique; elle est identiquement nulle dans les théories de F.M.T. et de I.C.G., mais par contre on la trouvera dans les travaux de M. LENOIR. Nous n'aurons pas à en discuter dans le présent mémoire, et nous renvoyons aux travaux de M. LENOIR à ce sujet [16], [17], [18].

5.2. – *Substitutions linéaires*: 1°) *B-substitutions* (changements de base): Nous venons de signaler le caractère *B-tensoriel des matrices* $\underset{\leftleftarrows}{\Omega}$ *et* $\underset{\leftleftarrows}{P}$; il s'agit là d'une propriété bien connue du calcul tensoriel classique. Nous pouvons toutefois la démontrer directement et d'une façon extrêmement simple:

$$\underset{\leftarrow}{\Delta'} = \bar{A}\, \underset{\leftarrow}{\Delta}\, A \implies \underset{\leftleftarrows}{\Omega'} = \bar{A}\, \underset{\leftarrow}{\Delta}\, A \wedge \bar{A}\, \underset{\leftarrow}{\Delta}\, A = \bar{A}\, \underset{\leftleftarrows}{\Omega}\, A \tag{1}$$

d'où en particulier

$$\underset{\leftleftarrows}{r'} = \bar{A}\, \underset{\leftleftarrows}{r}\, A \qquad \underset{\leftleftarrows}{P'} = \bar{A}\, \underset{\leftleftarrows}{P}\, A \tag{2}$$

On trouvera cette dernière formule chez M. LENOIR [17], démontrée par des procédés plus classiques et plus longs.

2°) *CF-substitutions* (homographies) ou transformations de Mme CATTANEO: La démonstration sera formellement la même que pour les B-substitutions, et on aura

$$(3)\qquad {}^{-}\underset{\leftleftarrows}{\boldsymbol{\Omega}}{}_{-} = {}^{-}\boldsymbol{F}_{+}\cdot{}^{+}\underset{\leftarrow}{\boldsymbol{\Delta}}{}_{+}\cdot{}^{+}\boldsymbol{F}_{-} \wedge {}^{-}\boldsymbol{F}_{+}\cdot{}^{+}\underset{\leftarrow}{\boldsymbol{\Delta}}{}_{+}\cdot{}^{+}\boldsymbol{F}_{-} = {}^{-}\boldsymbol{F}_{+}\cdot{}^{+}\underset{\leftleftarrows}{\boldsymbol{\Omega}}{}_{+}\cdot{}^{+}\boldsymbol{F}_{-}$$

d'où notamment

$$(4)\qquad \boxed{{}^{-}\underset{\leftleftarrows}{\boldsymbol{P}}{}_{-} = {}^{-}\boldsymbol{F}_{+}\cdot{}^{+}\underset{\leftleftarrows}{\boldsymbol{P}}{}_{+}\cdot{}^{+}\boldsymbol{F}_{-}}$$

et en particulier

$$(5)\qquad \boxed{\overset{\pm}{{}^{i}}R_{\underset{\pm}{j}} = \overset{\pm}{{}^{i}}f_{\underset{\mp}{k}}\cdot\overset{\mp}{{}^{k}}R_{\underset{\mp}{l}}\cdot\overset{\mp}{{}^{l}}f_{\underset{\pm}{j}}}$$

qui est ce que nous appellerons la *seconde formule de* Mme CATTANEO. La démonstration en est donnée ici d'une façon synthétique et directe, sans passer par les longs intermédiaires de calcul qui sont d'habitude nécessaires [10, p. 50], [**9**]. Notons qu'on a en même temps démontré que

$$(6)\qquad \boxed{\overset{\pm}{{}^{i}}\underset{\leftleftarrows}{S} = \overset{\pm}{{}^{i}}f_{\underset{\mp}{j}}\cdot\overset{\mp}{{}^{j}}\underset{\leftleftarrows}{S}} \qquad \boxed{T_{\underset{\pm}{j}} = \underset{\leftleftarrows}{T}{}_{\underset{\mp}{k}}\cdot\overset{\mp}{{}^{k}}f_{\underset{\pm}{j}}}$$

3°) *CG-substitutions* (hétérographies) ou transformations de Mme MAURER-TISON: La démonstration suit les mêmes principes que les précédentes:

$$(7)\qquad -{}^{-}\underset{\leftleftarrows}{\boldsymbol{\Omega}}{}_{-} = {}^{-}\boldsymbol{G}^{+}\cdot{}_{+}\underset{\leftarrow}{\boldsymbol{\Delta}}{}^{+}\cdot{}_{+}\boldsymbol{G}_{-} \wedge {}^{-}\boldsymbol{G}^{+}\cdot{}_{+}\underset{\leftarrow}{\boldsymbol{\Delta}}{}^{+}\cdot{}_{+}\boldsymbol{G}_{-} = {}^{-}\boldsymbol{G}^{+}\cdot{}_{+}\underset{\leftleftarrows}{\boldsymbol{\Omega}}{}^{+}\cdot{}_{+}\boldsymbol{G}_{-}$$

d'où notamment

$$(8)\qquad \boxed{{}^{-}\underset{\leftleftarrows}{\boldsymbol{P}}{}_{-} = -{}^{-}\boldsymbol{G}^{+}\cdot{}_{+}\underset{\leftleftarrows}{\boldsymbol{P}}{}^{+}\cdot{}_{+}\boldsymbol{G}_{-}}$$

et en particulier

$$(9)\qquad \boxed{\overset{\pm}{{}^{i}}\underset{\leftleftarrows}{R}{}_{\underset{\pm}{j}} = -\overset{\pm}{{}^{i}}g^{\overset{\mp}{k}}\cdot{}_{\underset{\mp}{k}}\underset{\leftleftarrows}{R}{}^{\overset{\mp}{l}}\cdot{}_{\underset{\mp}{l}}g_{\underset{\pm}{j}}}$$

relation que nous appellerons la *seconde formule de* Mme MAURER-TISON (¹). Notre démonstration appelle les mêmes remarques qu'à propos du (2°) ci-dessus; on trouvera en [**12**] la démonstration donnée par cet auteur. En même temps, nous avons démontré que

(10) $$\boxed{\underset{\leftleftarrows}{\overset{\pm}{{}^iS}} = -\,\underset{\mp\leftleftarrows}{\overset{\pm\mp}{{}^ig^j}}\cdot{}_jT} \qquad \boxed{\underset{\mp\leftleftarrows}{{}_jT} = -\,\underset{\mp\pm}{{}_jg_k}\cdot\underset{\leftleftarrows}{\overset{\pm}{{}^kS}}}$$

5.3. – *φ-substitutions* (changements de jauge de seconde espèce): Il nous faut envisager ici les φ-substitutions de Ier et de 2d ordre affectant $\underset{\leftleftarrows}{\delta}$. On aura:

(1) $$\underset{\leftleftarrows}{\Omega'} = \{\underset{\leftleftarrows}{\delta} + \underset{\leftleftarrows}{\Phi}\} + \underset{\leftleftarrows}{r} = \underset{\leftleftarrows}{\delta} + \{\underset{\leftleftarrows}{\boldsymbol{r}} + \underset{\leftleftarrows}{\Phi}\}$$

et par transposition

(2) $$\underset{\leftleftarrows}{\tilde{\Omega}'} = \{-\underset{\leftleftarrows}{\delta} - \underset{\leftleftarrows}{\Phi}\} + \underset{\leftleftarrows}{r} = -\underset{\leftleftarrows}{\delta} + \{\underset{\leftleftarrows}{r} - \underset{\leftleftarrows}{\Phi}\}$$

(rappelons que $\underset{\leftleftarrows}{\Phi}$ est diagonale et ainsi égale à sa transposée).

De ce caractère diagonal de $\underset{\leftleftarrows}{\Phi}$ résulte un *théorème* important: « Les termes $\underset{\leftleftarrows}{{}^i\boldsymbol{r}}$ et $\underset{\leftleftarrows}{\boldsymbol{r}_j}$ de la matrice $\underset{\leftleftarrows}{\boldsymbol{r}}$ présentent l'invariance géodésique ». Un calcul direct montre d'ailleurs que si l'on introduit

(3) $$\underleftarrow{\delta'} = \underleftarrow{\delta} + \underleftarrow{\varphi}, \qquad \underset{\leftleftarrows}{\Phi} \equiv (\underleftarrow{\delta} \wedge \underleftarrow{\varphi})$$

on aura

(4) $$\underset{\leftleftarrows}{\boldsymbol{r}'} = \left\| \begin{array}{ll} \underset{\leftleftarrows}{{}^iR_j} + \underset{\leftleftarrows}{\Phi}\cdot{}^iI_j + \underleftarrow{{}^i\theta} \wedge \underleftarrow{\gamma_j} & \underset{\leftleftarrows}{{}^iS} + \underleftarrow{\varphi} \wedge \underleftarrow{{}^i\theta} + \underleftarrow{{}^i\theta} \wedge \underleftarrow{\varphi} \\ \underset{\leftleftarrows}{T_j} + \underleftarrow{\gamma_j} \wedge \underleftarrow{\varphi} + \underleftarrow{\varphi} \wedge \underleftarrow{\gamma_j} & \underset{\leftleftarrows}{\Phi} + \underleftarrow{\gamma_k} \wedge \underleftarrow{{}^k\theta} \end{array} \right\|$$

(¹) En Théorie Unitaire, ces relations constituent les conditions d'intégrabilité de BOSE-SCHRÖDINGER [7, p. 48].

Ici, deux points de vue différents vont s'affronter: Si l'on considère ${}^i\underset{\leftleftarrows}{\boldsymbol{r}}$ comme représentant la torsion, on a le surprenant théorème: « La torsion est φ-invariante ». Ainsi, aucune φ-transformation ne pourrait alors servir à annuler le vecteur de torsion, comme cela se fait en Théorie Unitaire; ceci est tout-à-fait contraire à l'opinion généralement admise, «opinion» qui n'est qu'une simple conséquence de la définition classiquement admise pour la torsion. Selon ce point de vue, le vecteur de torsion retrouve le caractère intrinsèque qui lui manquait dans la géométrie affine classique de CARTAN.

Mais on peut tout aussi bien s'en tenir au point de vue classique selon lequel ${}^i\underset{\leftleftarrows}{S}$ de la définition (4) n. 5. 1 représente la torsion. Alors une φ-substitution remplace ${}^i\underset{\leftleftarrows}{S}$ par

$$ {}^i\underset{\leftleftarrows}{S'} = {}^i\underset{\leftleftarrows}{S} + \underleftarrow{\varphi} \wedge {}^i\underleftarrow{\theta} $$

mais en même temps, le terme ${}^i\underset{\leftleftarrows}{U}$ qui était identiquement nul devient

$$ {}^i\underset{\leftleftarrows}{U'} = {}^i\underleftarrow{\theta} \wedge \underleftarrow{\varphi} $$

ce qui assure l'invariance de ${}^i\underset{\leftleftarrows}{\boldsymbol{r}}$. Les mêmes remarques s'appliquent à la co-torsion, à ceci près que cette notion est étrangère à la géométrie affine classique.

Une dualité assez semblable de points de vue se retrouve à propos de la courbure. On sait que si l'on exécute une φ-substitution où $\underleftarrow{\varphi}$ est une forme ouverte, le tenseur de courbure subit une transformation par addition de $\underset{\leftleftarrows}{\Phi} \cdot {}^iI_j$ à la 2-forme ${}^i\underset{\leftleftarrows}{R}_j$. Dans notre géométrie, nous retrouvons la même propriété si nous admettons que les termes ${}^i\underset{\leftleftarrows}{U}_j$ de la matrice $\underset{\leftleftarrows}{\boldsymbol{U}}$ sont φ-invariants. Mais nous pouvons tout aussi bien considérer la courbure comme φ-invariante et reporter sur ${}^i\underset{\leftleftarrows}{U}_j$ les termes en $\underset{\leftleftarrows}{\Phi}$.

Une autre remarque se présente d'elle-même ici. Nous avons déjà dit que les matrices de structure de M. LENOIR présentent une « forme-origine » $\underleftarrow{p} \neq 0$ dans le coin inférieur droit. Si nous introduisons une pareille 1-forme dans notre matrice de structure, nous obtiendrons

$$ \begin{aligned} (5) \qquad {}^i\underset{\leftleftarrows}{r} &= {}^i\underset{\leftleftarrows}{S} + {}^i\underleftarrow{\theta} \wedge \underleftarrow{\varphi} = (\underleftarrow{\delta} \wedge \underleftarrow{\theta^i}) + \{ {}^i\underleftarrow{\omega}_j - \underleftarrow{\varphi} \cdot {}^iI_j \} \wedge {}'\underleftarrow{\theta} \\ \underset{\leftleftarrows}{r_j} &= \underset{\leftleftarrows}{T_j} + \underleftarrow{\varphi} \wedge \underleftarrow{\gamma_j} = (\underleftarrow{\delta} \wedge \underleftarrow{\gamma_j}) + \underleftarrow{\gamma_i} \wedge \{ {}^i\underleftarrow{\omega}_j - \underleftarrow{\varphi} \cdot {}^iI_j \} \end{aligned} $$

Tout se passera donc comme si nous étions partis quand même d'une matrice de structure à forme-origine identiquement nulle, mais à connexion représentée par

$$(6) \qquad \underset{\leftarrow}{{}^i\omega'_j} \equiv \underset{\leftarrow}{{}^i\omega_j} - \underset{\leftarrow}{\varphi} \cdot {}^iI_j$$

Dans les applications de notre géométrie à la Théorie Unitaire, on pourra donc introduire des connexions à vecteur de torsion non nul, à condition de faire figurer dans le coin de la matrice de structure une forme-origine appropriée.

Une dernière remarque a trait aux « transformations de jauge de seconde espèce et de second ordre », c'est-à-dire celles où à $\underset{\leftleftarrows}{\delta}$ on substitue

$$\underset{\leftleftarrows}{\delta'} \equiv \underset{\leftleftarrows}{\delta} + \underset{\leftleftarrows}{\psi}$$

la 2-forme $\underset{\leftleftarrows}{\psi}$ pouvant être ouverte. Ces transformations modifient les termes diagonaux de $\underset{\leftleftarrows}{r}$ exactement comme le faisait la forme fermée $\underset{\leftleftarrows}{\Phi}$ ci-avant.

5.4. – *Courbures-images*: Nous pouvons appliquer ici dans ses grandes lignes le procédé d'exposé des n. 4.1. et 4.2., et nous aurons ainsi:

1°) *Courbures-images du type I.C.G.*: On voit apparaître deux matrices mitoyennes:

$$(1) \qquad {}^{\pm}\boldsymbol{F}_{\mp} \cdot \underset{\leftleftarrows}{{}^{\mp}\boldsymbol{\Omega}_{\mp}} = \underset{\leftleftarrows}{{}^{\pm}\boldsymbol{\Omega}_{\mp}} = \underset{\leftleftarrows}{{}^{\pm}\boldsymbol{\Omega}_{\pm}} \cdot {}^{\pm}\boldsymbol{F}_{\mp}$$

Contrairement à ce qui se passait pour la matrice de différentiation, cette nouvelle matrice n'admet qu'une écriture:

$$(2) \qquad \underset{\leftleftarrows}{{}^{\pm}\boldsymbol{\Omega}_{\mp}} = \underset{\leftleftarrows}{\boldsymbol{\delta}} + \begin{Vmatrix} \underset{\leftleftarrows}{{}^{\pm}\boldsymbol{R}_{\mp}} & \underset{\leftleftarrows}{{}^{\pm}\boldsymbol{S}} \\ \underset{\leftleftarrows}{\boldsymbol{T}_{\mp}} & \underset{\leftleftarrows}{0} \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} \underset{\leftarrow}{{}^{\pm}\theta} \wedge \underset{\leftarrow}{\gamma_{\mp}} & \underset{\leftleftarrows}{0} \\ \underset{\leftleftarrows}{0} & \underset{\leftarrow}{\gamma_{\pm}} \wedge \underset{\leftarrow}{{}^{\pm}\theta} \end{Vmatrix}$$

2°) *Courbures-images du type F.M.T.*: Ici se présentent les matrices mitoyennes

$$\text{(3)} \qquad \underset{\leftleftarrows}{\overset{(+)}{{}^{+}\Omega^{-}}} = \underset{\leftleftarrows}{{}^{+}\Omega_{+}} \cdot {}^{+}G^{-} \qquad \underset{\leftleftarrows}{\overset{(+)}{{}_{-}\Omega_{+}}} = {}_{-}G_{+} \cdot \underset{\leftleftarrows}{{}^{+}\Omega_{+}}$$

$$\underset{\leftleftarrows}{\overset{(-)}{{}^{+}\Omega^{-}}} = {}^{+}G^{-} \cdot \underset{\leftleftarrows}{{}_{-}\Omega^{-}} \qquad \underset{\leftleftarrows}{\overset{(-)}{{}^{-}\Omega_{+}}} = \underset{\leftleftarrows}{{}_{-}\Omega^{-}} \cdot {}_{-}G_{+}$$

La seconde formule de F.M.T., genéralisée comme nous l'avons fait, permet de ramener ces matrices à deux:

$$\text{(4)} \qquad \underset{\leftleftarrows}{{}^{+}\Omega^{-}} \equiv \underset{\leftleftarrows}{\overset{(+)}{{}^{+}\Omega^{-}}} = - \underset{\leftleftarrows}{\overset{(-)}{{}^{+}\Omega^{-}}} \qquad \underset{\leftleftarrows}{{}_{-}\Omega_{+}} \equiv \underset{\leftleftarrows}{\overset{(+)}{{}_{-}\Omega_{+}}} = - \underset{\leftleftarrows}{\overset{(-)}{{}_{-}\Omega_{+}}}$$

Nous aurons ainsi défini une matrice mitoyenne de torsion-courbure qui soit telle que son image soit sa transposée *changée de signe*:

$$\text{(5)} \qquad \underset{\leftleftarrows}{{}_{-}P_{+}} = \begin{Vmatrix} \underset{\leftleftarrows}{{}_{-}R_{+}} & - \underset{\leftleftarrows}{{}_{-}T} \\ \underset{\leftleftarrows}{T_{+}} & \underset{\leftleftarrows}{O} \end{Vmatrix}$$

Si maintenant nous envisageons le cas d'une structure auto-image, nous aurons en même temps démontré le *théorème*: « Si une structure est auto-image au sens de la théorie F.M.T., sa matrice de torsion-courbure est antisymétrique ». On a ainsi retrouvé un résultat classique (notation tensorielle) de la géométrie métrique:

$$\text{(6)} \qquad \underset{\leftleftarrows}{R_{ij}} + \underset{\leftleftarrows}{R_{ji}} = 0$$

5.5. – *Notion d'« einsteinicité »*: On sait qu'EINSTEIN a introduit dans la Théorie Unitaire la notion particulièrement féconde de « pseudo-hermiticité »; nous remplacerons ce vocable un peu lourd par celui d'« einsteinicité », et nous l'emploierons comme on emploie le mot « hermiticité »; « einsteinique » sera le pendant de « hermitique », etc.

Soit $\overset{(+)}{{}_{-}M_{+}}$ et $\overset{(-)}{{}_{+}M_{-}}$ deux matrices dont les éléments sont des scalaires généraux; leurs transposées seront notées respectivement $\overset{(+)}{{}_{+}M_{-}}$ et $\overset{(-)}{{}_{-}M_{+}}$. Il est entendu qu'il existe une opération unaire, appelée « passage aux images » et qui transforme $\overset{(+)}{M}$ en $\overset{(-)}{M}$ et vice-versa. Nous dirons alors que ces deux matrices sont *einsteiniques* si

$$ {}_{\pm}\overset{(+)}{M}_{\mp} - {}_{\pm}\overset{(-)}{M}_{\mp} = 0 $$

Par contre deux matrices $\overset{(+)}{N}$ et $\overset{(-)}{N}$ seront *anti-einsteiniques* si

$$ {}_{\pm}\overset{(+)}{N}_{\mp} + {}_{\pm}\overset{(-)}{N}_{\mp} = 0 $$

La matrice $\boldsymbol{G}$, représentant le tenseur semi-métrique, est un exemple de matrice einsteinique, tandis que la matrice de courbure ${}_{-}\underset{\Leftarrow}{\boldsymbol{R}}_{+}$ à n^2 éléments, et la matrice de torsion-courbure ${}_{-}\underset{\Leftarrow}{\boldsymbol{P}}_{+}$ à $(n+1)^2$ éléments, sont des exemples de matrices anti-einsteiniques.

Deux matrices $\overset{(\pm)}{L}$ seront dites *auto-images* si

$$ {}_{\pm}\overset{(+)}{L}_{\mp} - {}_{\mp}\overset{(-)}{L}_{\pm} = 0 $$

et *anti-auto-images* si

$$ {}_{\pm}\overset{(+)}{L}_{\mp} + {}_{\mp}\overset{(-)}{L}_{\pm} = 0 $$

Si nous combinons ces diverses possibilités, on voit aisément qu'une matrice

$$ \left.\begin{array}{ll} & \text{einsteinique et auto-image} \\ \text{ou} & \text{anti-einsteinique et anti-auto-image} \end{array}\right\} \text{est symétrique} $$

$$ \left.\begin{array}{ll} & \text{anti-einsteinique et auto-image} \\ \text{ou} & \text{einsteinique et anti-auto-image} \end{array}\right\} \text{est anti-symétrique.} $$

Soit alors $\underset{\pm}{\lambda}$ une variable ne pouvant prendre que les valeurs ± 1, et changeant de valeur lors du passage aux images; soit $\boldsymbol{H}$ une matrice symétrique et $\boldsymbol{K}$ une matrice anti-symétrique, toutes deux auto-images. On voit facilement qu'on fabrique une matrice einsteinique en posant

$$ \boldsymbol{G} = \boldsymbol{H} + \underset{\pm}{\lambda}\boldsymbol{K} $$

et une matrice anti-einsteinique en posant

$$R = \underset{\pm}{\lambda} H + K$$

(on obtiendrait des cas d'hermiticité et d'anti-hermiticité en remplaçant $\underset{\pm}{\lambda} = \pm\sqrt{+1}$ par $\underset{\pm}{i} = \pm\sqrt{-1}$).

Une dernière remarque se place ici: Nous ne pouvons plus confondre géométrie métrique et géométrie riemannienne. Une structure G-auto-image est telle que la matrice $\boldsymbol{G}$ est symétrique et la matrice $\boldsymbol{P}$ définie en (5) de 5.4. est anti-symétrique; dans cette dernière, les termes $\underset{\leftleftarrows}{\boldsymbol{T}}$ de co-torsion peuvent être différents de zéro. Ce n'est que si ces derniers sont identiquement nuls que la structure est riemannienne; sinon, elle est seulement métrique. De même, nous ne pouvons confondre géométrie semi-métrique et géométrie einsteinienne (géométrie propre à la Théorie Unitaire). Une structure semi-métrique possède une matrice de torsion-courbure anti-einsteinique; mais dans la géométrie de la Théorie Unitaire, on postule *en outre* que cette matrice est *symétrique sur les termes de torsion*, c'est-à-dire que *la torsion est anti-auto-image*. Une structure métrique non riemannienne aura donc des coefficients de connexion Γ^k_{ij} dissymétriques sur leurs indices inférieurs, et différents des symboles de CHRISTOFFEL; ceci implique l'existence d'un tenseur τ^k_{ij}, dissymétrique sur ses indices de covariance, et tel que la matrice $\| \underset{\leftarrow}{{}^i\varrho_j} \|$ définie à partir de τ^k_{ij} selon la formule (13) du n. 4.8., soit identiquement nulle. Enfin, la structure riemannienne associée à une métrique donnée, de même que la structure einsteinienne associée à une semi-métrique donnée, sont uniques, en vertu des théorèmes bien connus d'unicité en Relativité Gravifique et en Théorie Unitaire.

5.6. – *Identités de* BIANCHI: Ces identités, étendues par CARTAN aux variétés affines, se démontrent ici très aisément. On a identiquement:

$$[\underset{\leftarrow}{\delta} \wedge \underset{\leftleftarrows}{r}] = [\underset{\leftarrow}{\delta} \wedge \{ \underset{\leftarrow}{\Theta} \wedge \underset{\leftarrow}{\Theta} \}] + [\underset{\leftarrow}{\delta} \wedge \{ \underset{\leftarrow}{\delta} \wedge \underset{\leftarrow}{\Theta} \}]$$

Le dernier terme, identiquement nul, peut être remplacé par un autre terme identiquement nul; on a ainsi

$$\begin{aligned}[\underset{\leftarrow}{\delta} \wedge \underset{\leftleftarrows}{r}] &= [\{ \underset{\leftarrow}{\delta} \wedge \underset{\leftarrow}{\Theta} \} \wedge \underset{\leftarrow}{\Theta}] + [\{ \underset{\leftarrow}{\Theta} \wedge \underset{\leftarrow}{\Theta} \} \wedge \underset{\leftarrow}{\Theta}] \\ &= [\{ (\underset{\leftarrow}{\delta} \wedge \underset{\leftarrow}{\Theta}) + \underset{\leftarrow}{\Theta} \wedge \underset{\leftarrow}{\Theta} \} \wedge \underset{\leftarrow}{\Theta}] \equiv -[\underset{\leftarrow}{\Theta} \wedge \underset{\leftleftarrows}{r}]\end{aligned}$$

soit, en faisant passer tout dans le premier membre

$$\boxed{[\underleftarrow{\boldsymbol{\Delta}} \wedge \underset{\leftleftarrows}{\boldsymbol{r}}] \equiv \underset{\substack{\leftarrow\\\leftarrow\\\leftarrow}}{0}} \tag{1}$$

Les deux matrices du produit étant B-tensorielles, il en va de même pour les identités.

Si nous décomposons $\underset{\leftleftarrows}{\boldsymbol{r}}$ nous obtenons d'abord les identités de BIANCHI proprement dites

$$\boxed{[\underleftarrow{\boldsymbol{\nabla}} \wedge \underset{\leftleftarrows}{{}^iR_j}] \equiv [\underset{\leftleftarrows}{\boldsymbol{\nabla}} \wedge \underleftarrow{{}^i\omega_j}] = \underset{\substack{\leftarrow\\\leftarrow\\\leftarrow}}{0}} \tag{2}$$

(les termes de la matrice $\underset{\leftleftarrows}{\boldsymbol{U}}$ disparaissent identiquement) et ensuite les autres identités de CARTAN, qui ne sont autre chose que les identités de RICCI appliquées aux formes $\underleftarrow{{}^i\theta}$ et $\underleftarrow{\gamma_i}$, à savoir

$$\boxed{\begin{aligned} [\underleftarrow{\boldsymbol{\nabla}} \wedge \underset{\leftleftarrows}{{}^iS}] &\equiv [\underset{\leftleftarrows}{\boldsymbol{\nabla}} \wedge \underleftarrow{{}^i\theta}] = \underset{\leftleftarrows}{{}^iR_k} \wedge \underleftarrow{{}^k\theta} \\ [\underleftarrow{\boldsymbol{\nabla}} \wedge \underset{\leftleftarrows}{T_j}] &\equiv [\underset{\leftleftarrows}{\boldsymbol{\nabla}} \wedge \underleftarrow{\gamma_j}] = -\underleftarrow{\gamma_k} \wedge \underset{\leftleftarrows}{{}^kR_j} \end{aligned}} \tag{3}$$

On voit aisément que ces identités sont indifférentes aux « transformations de jauge de seconde espèce » du premier ordre ($\underleftarrow{\varphi}$ — substitutions) et même du second ordre ($\underset{\leftleftarrows}{\Phi}$-substitutions) à condition alors que $\underset{\leftleftarrows}{\Phi}$ soit une 2-forme fermée.

Summary.

At first, a survey is given on the basis of the theory of the linear substitutions in the n-dimentional spaces; the wellknown existence of two complementary types of substitutions has been emphasized upon: the changes of the base vectors (matrixes denoted by $\boldsymbol{A}$) and the collineations (matrixes denoted by $\boldsymbol{F}$ for the homographies and $\boldsymbol{G}$ for the heterographies). Then, the first principles of the exterior analysis and of the tensorial analysis are examined from a purely algebraic point of view, where the differentials are assimilated to commutators or anticommutators according to the parity of the diffe-

rentiated form. This enables to introduce an operator-matrix Δ with $(n+1)^2$ elements which are of a tensorial nature; the external product of this matrix with itself gives the forms of torsion and of curvature. This product commutes identically with the matrix Δ, and this identity is nothing else but the BIANCHI identity.

Then the operator-matrix ∇ is introduced, whose commutators and anticommutators are the absolute differentials. This operator shall commute with all the substitution matrixes, of all the above mentioned types, and these commutators represent a new sort of absolute differentiation, the « joint differentiation » using *two* different connections simultaneously. The annulation of the joint differentials of the $\boldsymbol{A}$'s gives the classical connection transformation for a change of the vectorial bases. And the commutativity of ∇ with the $\boldsymbol{F}$'s and with the $\boldsymbol{G}$'s introduces the geometries of Mrs CATTANEO and of Mrs MAURER-TISON, respectively; the same property leads to an elegant demonstration of the relations, discovered by these two mathematicians, between connections wich are « images » of each other, and between the curvatures associated with those connections.

The *semi-metric geometry* of the autor is then presented, i.e. the geometry of varieties which possess two structures, « images » of each other. It is pointed out that this geometry includes the main results obtained by Mrs CATTANEO and by Mrs MAURER-TISON. The « characteristical tensor » of Mrs CATTANEO gets in this way a simple interpretation and a physical significance in the Unified Field Theory of EINSTEIN and SCHRÖDINGER. Moreover it appears that the semi-metric geometry is the key to the Unified Theory, exactly as the metric geometry was the key to the Gravitational Relativity. The fundamental non-symmetric tensor of EINSTEIN g_{ij} plays here the part of a « semi-metric » tensor: it lowers indices « through » the symbol ∇. In a semi-metric variety they are two (symmetrical) metric tensors, simoultaneously; one of these may be assimilated to the metric tensor admitted by HLAVATY and the other to the one proposed by LICHNEROWICZ. And the tensor of Mrs CATTANEO transforms those two tensors one into the other.

Bibliographie.

[1] EINSTEIN A. – *The Meaning of Relativity*, Princeton, 1955, (5th ed.).

[2] LICHNEROWICZ A. – *Théories relativistes de la gravitation et de l'électro-magnétisme*, Masson, Paris, 1955.

[3] LICHNEROWICZ A. – *Théorie globale des connexions et des groupes d'holonomie*, Cremonese, Roma, 1955.

[4] LICHNEROWICZ A. – *Algèbre et analyse linéaires*, Masson, Paris, 1955.

[5] LICHNEROWICZ A. – *Calcul tensoriel*, A. Colin, Paris, 1955.

[6] HLAVATY V. – *Geometry of Einstein's Unified Field Theory*, Noordhoff, Groningen, 1957.

[7] TONNELAT M. A. (Mme) – *La théorie du champ unifié d'Einstein*, Gauthier-Villars, Paris, 1955.

[8] CATTANEO-GASPARINI I. (Mme) – *Sulle geodetiche di una V_n relative a una connessione affine,* Atti Accad. Naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat., (8) **27** (1957), 146-154.

[9] CATTANEO-GASPARINI I. (Mme) – *Sur une classe de connexions linéaires à groupes d'holonomie isomorphes,* C. R. Acad. Sci., Paris, **246** (1958), 1145-47

[10] CATTANEO-GASPARINI I. (Mme) – *Sulle connessioni infinitesimali nello spazio fibrato dei riferimenti affini di una V_n* , Univ. Roma Ist. Naz. Alta Mat. Rend. Mat. e Appl., (3-4) **17** (1958), 327-404.

[11] MAURER-TISON F. (Mme) – *L'espace fibré des co-repères affines et son rôle fondamental en théorie unitaire d'Einstein-Schrödinger,* C. R. Acad. Sci. Paris, **246**, 2 (1958), 38-40.

[12] MAURER-TISON F. (Mme) – *Les tenseurs de courbure de deux connexions linéaires associées par l'intermédiaire d'un tenseur régulier de type* (0,2), C. R. Acad. Sci. Paris, **246**, 2 (1958), 240-43.

[13] MAURER-TISON F. (Mme) – *Aspects mathématiques de la théorie unitaire du champ d'Einstein,* Thèse polycopiée, Paris (1958).

[14] GROSJEAN P. V. – *Les variétés semi-métriques et la théorie unitaire des champs,* Thèse polycopiée, Université de Liège (1958).

[15] GROSJEAN P. V. – *La géométrie « semi-métrique » et le théorie unitaire d'Einstein-Schrödinger,* C. R. Acad. Sci. Paris, **247** (1958) 1562-65.

[16] LENOIR M. – *Principe d'une théorie unitaire. Interprétation basée sur l'emploi d'un espace fibré.,* C. R. Acad. Sci., Paris, **248** (1959), 1944-46.

[17] LENOIR M. – *Principe d'une théorie unitaire. Interprétation basée sur l'emploi d'une hypersurface d'un espace pentadimensionnel,* C. R. Acad. Sci. Paris, **248** (1959), 2074-76.

[18] LENOIR M. – *Identités de conservation en théorie du champ unifié,* C. R. Acad. Sci. Paris, **249**, 1 (1959), 44-46.

[19] CARTAN E. – *Théorie des spineurs,* Hermann, Paris, 1935.

[20] GODEAUX et ROZET – *Leçons de géométrie projective,* Masson, Paris, 1951.

[21] BRILLOUIN L. – *Les tenseurs en mécanique et en élasticité,* Masson, Paris, 1949.

[22] BARGMANN V. – *Relativity,* Rev. Mod. Phys., **29**, 2 (1957), 161-74.

[23] KURSUNOGLU B. – *Fields, Particles and Quantum Theory.* Communication ronéotypée du Colloque internat. de Relativité et de Gravitation, Royaumont (France) (1959).

[24] THRALL and TORNHEIM – *Vectors space and matrices,* J. Wiley, New York, 1957.

[25] COXETER H. S. M. – *Non-euclidean Geometry,* Toronto Press, Toronto, 1947.

Table des matières.