

CARLO SILLI (*)

Un'osservazione
sulle somme parziali dello sviluppo in serie
di alcuni sistemi ortogonali di una funzione discontinua ()**

Sia $g(x)$ una funzione definita in (α, β) , finito o infinito, eccettuato un numero finito d di punti ove presenta discontinuità di prima specie [1] ⁽¹⁾ e per il resto è continua.

Considerata una successione $\{f_r(x)\}$ di funzioni normalizzate e ortogonali in (α, β) , ed ivi continue, considerata la somma:

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n a_k f_k(x)$$

con:

$$a_k = \int_{\alpha}^{\beta} g(x) f_k(x) dx \quad \text{e} \quad n > d$$

supponiamo che esistano n funzioni:

$$Z_r(x; \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{r-1}); \alpha < x < \beta \quad \text{e} \quad r = 1, 2, \dots, n,$$

che si annullano, e semplicemente, negli $r-1$ punti assegnati $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{r-1}$ interni ad (α, β) e che verificano le n relazioni:

$$(1) \quad \int_{\alpha}^{\beta} Z_r(x; \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{r-1}) [S_n(x) - g(x)] dx = 0; \quad r = 1, 2, \dots, n,$$

(*) Indirizzo: Istituto Matematico, Università, Firenze (Italia).

(**) Ricevuto il 4 maggio 1960.

⁽¹⁾ I numeri in parentesi quadra si riferiscono alla Bibliografia posta al termine del lavoro.

Posto allora $r = 1$ si ha:

$$(1.1) \quad \int_{\alpha}^{\beta} Z_1(x) [S_n(x) - g(x)] dx = 0.$$

Da questa risulta che, non coincidendo identicamente $g(x)$ con $S_n(x)$ ed essendo $Z_1(x)$ diversa da zero in tutto (α, β) vi è un punto interno α detto intervallo dove $g(x) > S_n(x)$ ed uno dove $g(x) < S_n(x)$. Ne risulta allora che la somma parziale $S_n(x)$, o interseca [2] almeno una volta la funzione $g(x)$ in un punto η_1 , o non la interseca in tutto (α, β) l'intersezione in questo caso andando perduta in uno dei d punti di discontinuità di $g(x)$.

Supposto ora che la somma parziale $S_n(x)$ intersechi $g(x)$ solo nel punto η_1 , considerata la funzione $Z_2(x; \eta_1)$ si ha dalla seconda delle (1):

$$(1.2) \quad \int_{\alpha}^{\beta} Z_2(x; \eta_1) [S_n(x) - g(x)] dx = 0.$$

Da questa risulta che la somma parziale $S_n(x)$ interseca la funzione $g(x)$ almeno due volte in (α, β) , oppure una sola volta o mai le intersezioni in questi ultimi due casi andando perdute in due dei d punti di discontinuità di $g(x)$.

Ripetendo il ragionamento altre $n - 2$ volte ed osservando che al più potranno andar perdute d intersezioni nei d punti di discontinuità, si ha che la somma parziale $S_n(x)$ (con $n > d$) interseca la funzione $g(x)$ in almeno $n - d$ punti interni ad (α, β) .

Ne risulta, dunque, che, sotto le ipotesi dichiarate, la somma parziale $S_n(x)$ dello sviluppo in serie del sistema $\{f_r(x)\}$ della funzione $g(x)$, per tutti gli n maggiori di d , rappresenta una interpolare di $g(x)$ intersecando la funzione stessa almeno $n - d$ volte in (α, β) .

Qualora si supponga che la funzione $g(x)$ sia definita in $(0, 2\pi)$, o in (a, b) finito o infinito, ed ivi continua, e che il sistema di funzioni ortogonali $\{f_r(x)\}$ sia il sistema:

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}; \frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}}; \frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}} \right\},$$

oppure il sistema:

$$\{p^{1/2}(x) P_k(x)\},$$

dove $\{P_k(x)\}$ è una successione di polinomi normalizzati e ortogonali rispetto al peso $p(x)$ in (a, b) , si ritrovano dalla precedente proposizione i due seguenti teoremi del Prof. PICONE [2] e del Prof. MERLI [3].

Il teorema del PICONE è il seguente:

« Se una funzione reale $f(x)$, continua nell'intervallo aperto $0 < x < 2\pi$, non è un polinomio trigonometrico di ordine n , il polinomio di Fourier:

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

con:

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos kt \, dt; \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin kt \, dt; \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

ad essa relativo, interseca la funzione stessa, in almeno $2n + 1$ punti interni a $(0, 2\pi)$, e in almeno $2n + 2$ se, essendo σ una certa quantità positiva, $f(x) - S_n(x)$ conserva ugual segno nei due intervalli aperti $0 < x < \sigma$ e $2\pi - \sigma < x < 2\pi$ ».

Il teorema del MERLI è il seguente:

« Sia $p(x)$ una funzione continua definita in (a, b) , finito o infinito, ed ivi positiva salvo al più un numero finito di punti nei quali può anche annullarsi, ed esistano e siano finiti i suoi « momenti » in (a, b) . Considerata allora la successione dei polinomi normalizzati e ortogonali rispetto al peso $p(x)$ in (a, b) , considerata la relativa serie:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k P_k(x),$$

con:

$$a_k = \int_a^b p(x) P_k(x) f(x) \, dx$$

se la somma:

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k P_k(x)$$

non coincide identicamente con la funzione $f(x)$, la interseca almeno $n + 1$ volte in (a, b) .

Ne viene, quindi, che in ambedue i casi, la somma parziale $S_n(x)$, per valori di n sufficientemente grandi, rappresenta una interpolare di $f(x)$.

Questi due teoremi sono naturalmente estendibili, per diretto confronto con la serie di FOURIER, al caso delle funzioni di BESSEL di indice $\pm 1/2$, come del resto si può vedere direttamente nel seguente modo.

Data una funzione $f(x)$, continua in $(0,1)$, considerato il sistema:

$$\left\{ \frac{\sqrt{2x}}{J_{3/2}(j_k)} J_{1/2}(j_k x) \right\}; \quad k = 1, 2, \dots,$$

ortogonale e normale in $(0,1)$, si consideri la differenza:

$$\varphi_n(x) = f(x) - S_n(x),$$

dove:

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n a_k J_{1/2}(j_k x)$$

e

$$a_k = \frac{2}{J_{3/2}(j_k)} \int_0^1 x f(x) J_{1/2}(j_k x) dx.$$

Per l'ortonormalità si ha:

$$\int_0^1 x \varphi_n(x) J_{1/2}(j_k x) dx = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

e da questa:

$$(2) \quad \int_0^1 x \varphi(x) \vartheta_r(x) dx = 0, \quad r = 1, 2, \dots, n,$$

con:

$$\vartheta_r(x) = \sum_{k=1}^n C_k J_{1/2}(j_k x)$$

funzione che si annulla solo e semplicemente in $r-1$ punti assegnati interni a $(0,1)$.

Dalle (2) ne segue, come si voleva, che, anche in questo caso, la somma parziale $S_n(x)$ interseca la funzione $f(x)$ almeno n volte in $(0,1)$.

Con ragionamenti del tutto analoghi si prova la proprietà nel caso delle funzioni di BESSEL di indice $-1/2$.

Poichè in questi quattro casi da noi considerati sono soddisfatte le ipotesi della proposizione precedentemente dimostrata, ne risulta, ed è questo che volevamo mettere in rilievo, che le somme parziali dei quattro sistemi ortogonali:

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}; \frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}}; \frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}} \right\}; \left\{ p^{1/2}(x) P_k(x) \right\}; \left\{ \frac{\sqrt{2x}}{J_{3/2}(j_k)} J_{1/2}(j_k x) \right\}; \left\{ \frac{\sqrt{2x}}{J_{1/2}(j'_k)} J_{-1/2}(j'_k x) \right\}$$

rappresentano, nei loro rispettivi intervalli, delle interpolari della funzione $g(x)$ dotata di d discontinuità di prima specie e benchè non sia detto affatto che il $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x)$ sia la $g(x)$ stessa, pur tuttavia questo risultato fa presumere che la $S_n(x)$, per n sufficientemente grande, si presti in pratica a rappresentare approssimativamente la funzione $g(x)$ nell'intervallo in cui è definita.

Bibliografia.

- [1] G. SANSONE, R. CONTI, *Lezioni di Analisi Matematica*, Vol. I (9ª ed.). CEDAM Padova 1958 (p. 187).
- [2] M. PICONE, *Appunti di Analisi Superiore*, Vol. I. (2ª ed.). Napoli 1946, (pp. 235-238).
- [3] L. MERLI, *Una proprietà delle somme parziali ecc.*, Boll. Un. Mat. Ital. (3) 6 (1951), 285-288.

S u m m a r y.

In this paper it is shown that the sum of the first n terms of the development of discontinuous functions in series of orthogonal functions may, under certain hypothesis on the function and on the orthogonal system, allow the interpolings of the very function.

