

BIANCA M A N F R E D I (*)

**Su la risoluzione
di alcuni sistemi differenziali della Meccanica non lineare
mediante il metodo delle differenze finite. (**)**

§ 1. - Introduzione. (*)**

I problemi della Meccanica non lineare (cioè quasi tutti i problemi della tecnica moderna) si traducono in sistemi differenziali non lineari: la risoluzione di tali sistemi non è quasi mai possibile in modo completo e rigoroso, e la loro linearizzazione porta ad approssimazioni di incerta validità per i sistemi stessi.

La letteratura che in proposito, da oltre un trentennio, appare copiosissima per le esigenze della tecnica, si orienta sia verso questioni riguardanti l'esistenza e l'unicità delle soluzioni e l'andamento delle soluzioni stesse (metodo qualitativo), sia verso la costruzione di successioni approssimanti il valore numerico di dette soluzioni (metodo quantitativo), senza escludere una fusione dei due metodi (metodo qualitativo-quantitativo). A quest'ultimo procedimento misto va ricollegato il « metodo delle differenze finite » che seguo in questo lavoro relativamente al classico problema della Meccanica non lineare, studiato ampiamente dal GRAFFI [6] ⁽¹⁾, [7], [8],

$$(D) \quad \begin{cases} \ddot{x}(t) + f(x, \dot{x}) \cdot \dot{x} + \varphi(x) = 0 & (0 < t < +\infty) \\ x(0) = a \\ \dot{x}(0) = b, \end{cases}$$

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università, Parma, (Italia).

(**) Ricevuto il 2 aprile 1960.

(***) Questo lavoro è stato in parte riassunto in una comunicazione al 6° Congresso della « Unione Matematica Italiana » (Napoli, 11-16 settembre 1959).

⁽¹⁾ I numeri in parentesi quadre si riferiscono alla Bibliografia al termine del lavoro.

dove l'equazione differenziale generalizza le note equazioni di CARTAN [5], di VAN DER POL [15], di LIÉNARD [11], [12], di LEVINSON-SMITH [10], di SIGNORINI [18], di KRALL [9].

Il metodo, qui seguito, delle differenze finite, permette di ottenere « nel discontinuo » i risultati qualitativi fondamentali, già noti, relativamente alla soluzione di (D), inoltre porta ad individuare, dal punto di vista quantitativo, un procedimento di calcolo effettivo per la soluzione stessa.

Per l'applicazione di tale metodo, limito la variabile temporale t ad assumere solo valori razionali e sostituisco al sistema differenziale (D) un'opportuna successione di sistemi alle differenze finite (nn. 2.1, 2.2, 2.3). Osservo che ciascuno di tali sistemi ha una, ed una sola, soluzione (n. 2.2); dimostro (sotto ipotesi poco onerose) che tale soluzione è oscillante (n. 3.1); inoltre [aggiungendo l'ipotesi della limitazione di $f(u,v)$ ⁽²⁾], provo che essa è positiva nei punti di massimo e negativa nei punti di minimo (nn. 3.2, 3.3).

Dimostro poi che la successione delle soluzioni dei sistemi alle differenze finite è equilimitata (§. 4) e che, supponendo la « regolarità » (cfr. n. 5.1) del sistema differenziale, è uniformemente convergente in modo asintotico alla soluzione del sistema differenziale (n. 5.2).

Termino con alcune precisazioni relative all' « errore numerico » che si commette, in un dato istante, nel calcolo pratico della soluzione di uno dei considerati sistemi alle differenze finite (§ 6).

§ 2. - Generalità.

2.1 - Il problema differenziale.

Considero il sistema differenziale non lineare

$$(D) \begin{cases} \ddot{x} + f(x, \dot{x}) \cdot \dot{x} + \varphi(x) = 0 & (0 < t < +\infty) \\ x(0) = a \\ \dot{x}(0) = b, \end{cases}$$

⁽²⁾ « A priori » può sembrare che tale ipotesi sia alquanto restrittiva perchè, in generale, $f(u, v)$ viene assunta in forma polinomiale. Ma essa non è tale in effetti se si tiene presente che detto polinomio è di solito [3] il risultato di uno sviluppo in serie (arrestato ad un grado conveniente d'approssimazione) di una funzione limitata.

dove:

1°) $f(u, v)$ è una data funzione definita in tutto il piano cartesiano (u, v) , continua e limitata inferiormente; inoltre esistono due numeri r e R , con $0 < r < R$, tali che sia

$$\begin{aligned} f(u, v) < 0 & \quad \text{per } |u| \leq r, \quad |v| \leq r, \\ f(u, v) > 0 & \quad \text{per } |u| \geq R, \quad |v| \geq R; \end{aligned}$$

2°) $\varphi(u)$ è una funzione definita nell'intervallo $(-\infty, +\infty)$, ivi continua e crescente, con

$$\varphi(-\infty) = -\infty, \quad \varphi(0) = 0, \quad \varphi(+\infty) = +\infty;$$

3°) a e b sono due assegnati numeri razionali.

2.2. — Il problema alle differenze finite.

Considero ora un sistema alle differenze finite corrispondente al precedente sistema differenziale (D) .

Ad ogni unità frazionaria $l = 1/N$ (N numero naturale) corrisponde una suddivisione $\sigma^{(l)}$ del semiasse temporale $0 \leq t \leq +\infty$, i cui punti di divisione sono i numeri razionali

$$(1) \quad t = t_n = nl \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Una tale $\sigma^{(l)}$ si dirà una *suddivisione razionale* del semiasse temporale ed l si dirà l'*unità frazionaria generatrice* di $\sigma^{(l)}$. Considerato un intervallo finito $(0, T)$ (con T razionale), i precedenti punti t_n con $t_n \leq T$ danno una *suddivisione razionale* di $(0, T)$.

Posto

$$(2) \quad \begin{cases} \Delta_x(t_n) = \{x(t_n) - x(t_{n-1})\}/l \\ \Delta_x^2(t_n) = \{x(t_n) - 2x(t_{n-1}) + x(t_{n-2})\}/l^2, \end{cases}$$

si dirà un sistema (Δ) alle differenze finite il seguente sistema non lineare:

$$(\Delta) \quad \begin{cases} \Delta_i^2 x(t_n) + f_{n-1} \cdot \Delta_i x(t_{n-1}) + \varphi(x(t_{n-2})) = 0 & (n \geq 2) \\ x(t_0) = a \\ \Delta_i x(t_1) = b, \end{cases}$$

dove:

1°) risulta

$$(3) \quad f_{n-1} = f(x(t_{n-1}), \Delta_i x(t_{n-1}));$$

2°) le funzioni $f(u, v)$ e $\varphi(u)$ soddisfano alle stesse ipotesi del n. 2.1. Per le (2) tale sistema può scriversi più estesamente:

$$(\Delta') \quad \begin{cases} x(t_n) = (2 - lf_{n-1}) \cdot x(t_{n-1}) - (1 - lf_{n-1}) \cdot x(t_{n-2}) - l^2 \cdot \varphi(x(t_{n-2})) & (n \geq 2) \\ x(t_0) = a \\ x(t_1) = a + lb. \end{cases}$$

Si può subito affermare:

Esiste ed è unica la soluzione $x(t_n)$ del sistema (Δ') , ed essa è identicamente nulla se, e solo se, sono contemporaneamente nulli i valori iniziali.

Infatti dal sistema (Δ') discende facilmente che, per ogni $n \geq 2$, i valori di $x(t_n)$ s'ottengono univocamente passo passo partendo dai valori iniziali, risultando in particolare tutti nulli se, e solo se, tali sono i suoi valori iniziali.

Per il seguito interessa la seguente

Osservazione. *Se la $x(t_n)$ non è identicamente nulla e in due punti consecutivi t_{n-2} , t_{n-1} è $x(t_{n-2}) = x(t_{n-1})$, allora:*

1°) *se tali valori eguali sono < 0 , risulta*

$$(4) \quad x(t_{n-1}) < x(t_n);$$

2°) *se tali valori eguali sono > 0 , risulta*

$$(4') \quad x(t_{n-1}) > x(t_n);$$

3°) se tali valori eguali sono $= 0$, risulta

$$(5) \quad x(t_{n'-1}) = x(t_{n'}),$$

e quindi $x(t_n) = 0$ per ogni $n \geq n'$.

Infatti dal sistema (A) segue, per $x(t_{n'-2}) = x(t_{n'-1})$,

$$x(t_{n'}) = x(t_{n'-1}) - l^2 \cdot \varphi(x(t_{n'-1})),$$

uguaglianza che prova la validità delle affermazioni fatte.

2.3. - Alcune utili definizioni ed osservazioni.

Per ciò che segue è utile porre alcune definizioni ed osservazioni sulle successioni di numeri.

Definizione I. Una successione di numeri si dirà *ultimamente monotona* quando risulta monotona la successione che si ottiene dalla data sopprimendo un conveniente numero finito ν di termini iniziali (se è $\nu = 0$ la successione è, più precisamente, monotona). Le successioni ultimamente monotone sono quelle «ultimamente costanti, ultimamente crescenti, ultimamente decrescenti, ...».

Definizione II. Una successione di numeri si dirà *oscillante* quando non è ultimamente monotona ⁽³⁾.

Osservazione I. Se una successione di numeri a_n ($n = 0, 1, 2, \dots$) è limitata inferiormente, non può essere

$$(6) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - a_{n-1}) = -\infty.$$

Infatti, se valesse (6), preso un $N > 0$, comunque grande, esisterebbe un n_N tale che

$$a_n - a_{n-1} < -N \quad \text{per } n > n_N;$$

⁽³⁾ Pertanto una successione oscillante può anche avere limite; per evitare equivoci le successioni senza limite si chiameranno successioni *indeterminate*.

ne seguirebbe

$$a_{n+m} < a_{n-1} - mN \quad \text{per ogni intero } m,$$

onde la successione considerata non potrebbe essere limitata inferiormente.

Osservazione II. *Se una successione di numeri a_n ($n = 0, 1, 2, \dots$) è limitata inferiormente (superiormente) e l'estremo inferiore (superiore) è valore d'accumulazione per la successione, risulta necessariamente*

$$(7) \quad a_n - a_{n-1} < 0 \quad (a_n - a_{n-1} > 0)$$

per infiniti n .

Infatti se esistesse un n_0 tale che fosse

$$a_n - a_{n-1} \geq 0 \quad (a_n - a_{n-1} \leq 0) \quad \text{per } n > n_0,$$

cioè se la successione fosse ultimamente non decrescente (non crescente), il suo estremo inferiore (superiore) non potrebbe essere un valore di accumulazione.

§ 3. - Oscillatorietà di $x(t_n)$.

3.1. - Teorema di oscillatorietà.

In parallelo alle considerazioni del GRAFFI [6] circa l'oscillatorietà della soluzione $x(t)$ del sistema differenziale, vale il seguente

Teorema I (di oscillatorietà). *La soluzione $x(t_n)$ del sistema alle differenze finite, se non è identicamente nulla, è oscillante.*

Dimostrazione. Provo che la soluzione $x(t_n)$ non può essere ultimamente non decrescente (cfr. Definizione I).

Ragiono per assurdo. Se la soluzione $x(t_n)$ è ultimamente non decrescente, esiste (finito o infinito) il limite

$$(8) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x(t_n) = \lambda,$$

e quindi anche il limite di $\varphi(x(t_n))$, ed inoltre si ha

$$(9) \quad \Delta x(t_n) \geq 0.$$

Distinguo due casi:

1°) caso. Il limite λ sia finito.

Allora è

$$(10) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \Delta x(t_n) = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \Delta^2 x(t_n) = 0,$$

ed anche tenendo presente la (9), preso ad arbitrio un $\varepsilon > 0$, esiste un n_ε tale che

$$(11) \quad 0 \leq \Delta x(t_n) < \varepsilon \quad \text{per } n > n_\varepsilon.$$

Ed ancora, per la continuità di $|f(u, v)|$ nel punto $(\lambda, 0)$, preso ad arbitrio un $\varepsilon' > 0$, esiste un $n_{\varepsilon'}$ tale che

$$|f_n| < |f(\lambda, 0)| + \varepsilon' \quad \text{per } n > n_{\varepsilon'};$$

e posto $\bar{n} = \max(n_\varepsilon, n_{\varepsilon'})$, si ha

$$(12) \quad |f_n \cdot \Delta x(t_n)| < \{|f(\lambda, 0)| + \varepsilon'\} \cdot \varepsilon = \sigma \quad \text{per } n > \bar{n},$$

dove σ è positivo e arbitrariamente piccolo con ε .

Se ora è $\lambda > 0$, sarà $\varphi(x(t_n)) > 0$ per ogni n sufficientemente grande (suppongo il precedente numero \bar{n} abbastanza grande in modo che valga la detta disuguaglianza); allora dal sistema (Δ), tenendo presente la (12), segue

$$\Delta^2 x(t_n) \leq |f_{n-1} \cdot \Delta x(t_{n-1})| - \varphi(x(t_{n-2})) < \sigma - \varphi(x(t_{n-2})) \quad \text{per } n \geq \bar{n} + 2,$$

ed anche

$$\Delta^2 x(t_n) < \sigma - \varphi(x(t_n)) \quad \text{per } n \geq \bar{n} + 2,$$

ciò che, per l'arbitrarietà di σ e per essere $\varphi(x(t_n)) > 0$, è manifestamente assurdo in virtù della seconda delle (10).

Se invece è $\lambda < 0$, sarà $\varphi(x(t_n)) < 0$ per ogni n sufficientemente grande e

posso dire per $n > \bar{n}$ (supponendo il precedente numero \bar{n} abbastanza grande); allora dal sistema (Δ), tenendo presente la (12), segue

$$\Delta^2 x(t_n) \geq -|f_{n-1} \cdot \Delta x(t_n) - \varphi(x(t_{n-2}))| > -\sigma - \varphi(x(t_{n-2})), \quad \text{per } n \geq \bar{n} + 2,$$

ed anche

$$\Delta^2 x(t_n) > -\sigma - \varphi(\lambda) \quad \text{per } n \geq \bar{n} + 2,$$

ciò che, per l'arbitrarietà di σ e per essere $\varphi(\lambda) < 0$, è manifestamente assurdo in virtù della seconda delle (10).

Se infine è $\lambda = 0$, preso ad arbitrio un $\varepsilon > 0$, esisterà un n_ε tale che $|x(t_n)| < \varepsilon$ per ogni $n > n_\varepsilon$, e sarà $\varphi(x(t_n)) < 0$ per ogni $n > n_\varepsilon$. Supposto il precedente $\bar{n} > n_\varepsilon$, tenendo presenti le ipotesi su $f(u, v)$ e $\varphi(u)$ ed in virtù delle (9) e (11), risulta

$$\Delta^2 x(t_n) = -f_{n-1} \cdot \Delta x(t_{n-1}) - \varphi(x(t_{n-2})) > 0 \quad \text{per } n \geq \bar{n} + 2,$$

ma ciò è assurdo per l'Osservazione II (cfr. n. 2.3).

2° caso. Il limite λ sia $+\infty$.

Dal sistema (Δ) segue

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta^2 x(t_n) = -\lim_{n \rightarrow \infty} [f_{n-1} \cdot \Delta x(t_{n-1}) + \varphi(x(t_{n-2}))] = -\infty,$$

in quanto nella parentesi quadra a secondo membro il primo termine è limitato inferiormente (come prodotto di due fattori limitati inferiormente), mentre il secondo termine ha limite $+\infty$. Ma l'uguaglianza precedente è assurda per l'Osservazione I (cfr. n. 2.3).

Rimane così provato che $x(t_n)$ non può essere ultimamente non decrescente; in modo analogo si proverebbe che non può essere ultimamente non crescente.

Infine non può essere ultimamente costante in quanto, se ciò fosse, dal sistema (Δ') risulterebbe, a partire da un n' abbastanza grande,

$$x(t_n) = 0 \quad \text{per } n > n',$$

cioè la (8) con $\lambda = 0$, il che, come abbiamo visto, è assurdo.

Pertanto la soluzione $x(t_n)$, se non è identicamente nulla, è oscillante.

3.2. - Alcuni risultati ausiliari.

In virtù del Teorema I ora dimostrato e per l'Osservazione del n. 2.2, rimane subito provato il seguente

Corollario I. *La soluzione $x(t_n)$, se non è identicamente nulla, non può, per n sufficientemente grande, nè annullarsi in due punti consecutivi, nè assumere valori eguali in tre punti consecutivi.*

D'altra parte conviene osservare che se $x(t_n)$ non è identicamente nulla e in due punti consecutivi assume valori eguali (necessariamente non nulli), la $x(t_n)$ soddisfa alla (4) o alla (4') (cfr. Osservazione del n. 2.2), a seconda che i detti valori eguali sono negativi o positivi. Per il Teorema I (dell'oscillatorietà) e per quanto ho ora osservato, esistono necessariamente infiniti interi n' tali che sia

$$(13) \quad x(t_{n'-2}) \geq x(t_{n'-1}), \quad x(t_{n'-1}) < x(t_{n'}) \quad \text{per } x(t_{n'-1}) < 0,$$

oppure

$$(13') \quad x(t_{n'-2}) > x(t_{n'-1}), \quad x(t_{n'-1}) \leq x(t_{n'}) \quad \text{per } x(t_{n'-1}) > 0.$$

Per ragioni evidenti un punto come $t_{n'-1}$ si dirà di *minimo relativo* per $x(t_n)$ (4).
Siano

$$t'_1, t'_2, t'_3, \dots$$

questi punti di minimo relativo ordinati in modo crescente.

Così pure esistono necessariamente infiniti interi n'' tali che sia

$$(14) \quad x(t_{n''-2}) < x(t_{n''-1}), \quad x(t_{n''-1}) \geq x(t_{n''}) \quad \text{per } x(t_{n''-1}) < 0,$$

(4) È bene notare che, secondo la definizione sopra data, non è di minimo relativo un punto t_{n-1} per il quale si abbia

$$0 > x(t_{n-2}) > x(t_{n-1}) = x(t_n).$$

oppure

$$(14') \quad x(t_{n-2}) \leq x(t_{n-1}), \quad x(t_{n-1}) > x(t_n) \quad \text{per } x(t_{n-1}) > 0.$$

Un punto come t_{n-1} si dirà di *massimo relativo* per $x(t_n)$ ⁽⁵⁾.

Siano

$$t_1'', t_2'', t_3'', \dots$$

questi punti di massimo relativo ordinati in modo crescente.

Dal Teorema I (*di oscillatorietà*) segue poi il

Corollario II. *La $x(t_n)$ se non è identicamente nulla, ammette infiniti punti di minimo relativo, infiniti punti di massimo relativo, ed essi si separano. Precisamente:*

$$\text{se è } t_1' < t_1'' \quad \text{risulta } t_1' < t_1'' < t_2' < t_2'' < t_3' < t_3'', \dots,$$

$$\text{se è } t_1'' < t_1' \quad \text{risulta } t_1'' < t_1' < t_2'' < t_2' < t_3'' < t_3', \dots.$$

3.3. – Sul segno dei massimi e dei minimi della soluzione $x(t_n)$.

Si ha:

Teorema II. *Se la funzione $f(u, v)$ è limitata in tutto il piano (u, v) ⁽⁶⁾, esiste un $l_0 = 1/N_0$ tale che la soluzione $x(t_n)$ (non identicamente nulla) di ogni sistema (Δ) con $l = 1/N \leq l_0$ ha i minimi relativi tutti negativi o nulli, i massimi relativi tutti positivi o nulli.*

⁽⁵⁾ Anche qui è bene osservare che, secondo la definizione, non è di massimo relativo un punto t_{n-1} per il quale sia

$$0 < x(t_{n-2}) < x(t_{n-1}) = x(t_n).$$

⁽⁶⁾ Circa l'ipotesi della limitazione di $f(u, v)$ si ricordi quanto è stato osservato nella annotazione ⁽²⁾.

Dimostrazione. Se è $f(u, v) \leq 0$, risulta

$$(15) \quad 1 - lf(x(t_{n-1}), \Delta x(t_{n-1})) = 1 - lf_{n-1} \geq 0$$

per ogni l ; in caso opposto, detto $\gamma > 0$ l'estremo superiore di $f(u, v)$ ed N_0 un intero positivo $\geq \gamma$, la (15) vale certamente per ogni

$$l \leq l_0 \quad \left(\begin{array}{l} l_0 = 1/N_0 \\ l = 1/N \end{array} \right).$$

In un punto t' di minimo relativo per la corrispondente soluzione $x(t_n)$ di (Δ) , dall'equazione alle differenze scritta nella forma

$$(16) \quad x(t' + l) - x(t') - (1 - lf_{n-1}) \cdot \{x(t') - x(t' - l)\} = -l^2 \cdot \varphi(x(t' - l)),$$

segue necessariamente $\varphi(x(t' - l)) \leq 0$, e quindi, per le ipotesi fatte sulla φ , $x(t' - l) \leq 0$; per le (13) sarà allora

$$(17) \quad x(t') \leq 0.$$

Analogo ragionamento porta a concludere che nei punti di massimo relativo si ha

$$(17') \quad x(t') \geq 0.$$

Osservazione. Dal Teorema II ora dimostrato segue che se per un $l^* = 1/N^*$ scelto a piacere, la soluzione $x(t_{n^*})$ del corrispondente sistema (Δ) , in un punto di minimo relativo o di massimo relativo *non* soddisfa a (17) o a (17'), sarà *necessariamente*

$$l^* > l_0 \geq 1/\gamma,$$

cioè

$$(18) \quad \gamma < 1/l^*.$$

Ciò può riuscire utile per individuare il valore di γ .

§ 4. - Equilimitazione.

4.1. - Alcune premesse.

fissato un t razionale e interno ad un intervallo finito $(0, T)$ (con T razionale), considero tutte le suddivisioni razionali di $(0, T)$ aventi t come punto di suddivisione (cfr. n. 2.2). Siano

$$l_1, l_2, l_3, \dots$$

le unità frazionarie generatrici (ordinate in senso decrescente) corrispondenti a tali suddivisioni, e

$$x_1(t), x_2(t), x_3(t), \dots$$

siano le soluzioni dei sistemi alle differenze finite

$$\left(\Delta\right)_{l_1}, \left(\Delta\right)_{l_2}, \left(\Delta\right)_{l_3}, \dots$$

corrispondenti ad l_1, l_2, l_3, \dots .

4.2. - Equilimitazione delle funzioni $x_i(t)$ e $\Delta_{l_i} x_i(t)$ ($i = 1, 2, 3, \dots$).

Si ha:

Teorema III. *Le funzioni $x_i(t)$, $\Delta_{l_i} x_i(t)$ ($i = 1, 2, 3, \dots$) sono equilimitate in ogni intervallo $(0, T)$ (con T razionale) quando $f(u, v)$ è limitata in tutto il piano (u, v) e $\varphi(u)$ è lipschitziana in $(-\infty, +\infty)$.*

Dimostrazione. Per maggiore chiarezza suddivido la dimostrazione in due parti.

PARTE I. L'equilimitazione delle $x_i(t)$ discende subito dall'equilimitazione delle $\Delta_{l_i} x_i(t)$. Infatti se esiste una costante ω tale che in tutto l'intervallo $(0, T)$ sia

$$(19) \quad \left| \Delta_{l_i} x_i(t) \right| \leq \omega \quad (i = 1, 2, \dots),$$

in virtù dell'espressione di $\Delta_{l_i} x_i(t)$, è

$$(20) \quad |x_i(t)| \leq |x_i(t-l_i)| + l_i \omega,$$

ed anche (sommando membro a membro le n_i relazioni ottenute da (20) mutando t in $l_i, 2l_i, 3l_i, \dots, n_i l_i = t$)

$$(21) \quad |x_i(t)| \leq a_0 + t\omega \leq a_0 + T\omega,$$

con $a_0 = |a|$.

PARTE II. Provo allora la (19).

Per le ipotesi fatte esiste una costante γ tale che

$$|f(u, v)| < \gamma$$

per ogni (u, v) , onde si ha

$$(22) \quad |1 - l_i f(x_i(t), \Delta_{l_i} x_i(t))| \leq 1 + l_i \gamma = \alpha_i.$$

Sempre per le ipotesi fatte, esiste una costante μ tale che

$$(23) \quad |\varphi(u_1) - \varphi(u_2)| < \mu \cdot |u_1 - u_2|$$

per ogni (u_1, u_2) in $(-\infty, +\infty)$, onde

$$(23') \quad |\varphi(x_i(t))| \leq |\varphi(x_i(t-l_i))| + \mu l_i |\Delta_{l_i} x_i(t)|,$$

da cui risulta (sommando membro a membro le n_i relazioni ottenute dalla precedente disuguaglianza mutando t in $l_i, 2l_i, 3l_i, \dots, n_i l_i = t$)

$$(23'') \quad |\varphi(x_i(t))| \leq \varphi_0 + \mu l_i \sum_{v=1}^{n_i} |\Delta_{l_i} x_i(v l_i)|,$$

con

$$\varphi_0 = |\varphi(x_i(0))| = |\varphi(a)|.$$

Dall'equazione alle differenze del sistema (Δ) scritta nella forma

$$\Delta_{l_i} x_i(t) = (1 - l_i f_{n_i-1}) \cdot \Delta_{l_i} x_i(t - l_i) - l_i \varphi(x_i(t - 2l_i)),$$

segue allora per (22) e (23'')

$$(24) \quad \left| \Delta_{l_i} x_i(t) \right| \leq \alpha_i \left| \Delta_{l_i} x_i(t - l_i) \right| + l_i \varphi_0 + \mu l_i^2 \sum_{\nu=1}^{n_i-2} \left| \Delta_{l_i} x_i(\nu l_i) \right|.$$

In particolare, ponendo

$$b_0 = |b|,$$

si ha:

per $t = 2l_i$

$$\left| \Delta_{l_i} x_i(2l_i) \right| \leq \alpha_i b_0 + l_i \varphi_0;$$

per $t = 3l_i$

$$\left| \Delta_{l_i} x_i(3l_i) \right| \leq \alpha_i \left| \Delta_{l_i} x_i(2l_i) \right| + l_i \varphi_0 + \mu l_i^2 b_0,$$

cioè

$$\left| \Delta_{l_i} x_i(3l_i) \right| \leq \alpha_i^2 b_0 + l_i (1 + \alpha_i) \varphi_0 + \mu l_i^2 b_0;$$

per $t = 4l_i$

$$\left| \Delta_{l_i} x_i(4l_i) \right| \leq \alpha_i \left| \Delta_{l_i} x_i(3l_i) \right| + l_i \varphi_0 + \mu l_i^2 \{ b_0 + \Delta_{l_i} x_i(2l_i) \},$$

cioè

$$\left| \Delta_{l_i} x_i(4l_i) \right| \leq \alpha_i^3 b_0 + l_i (1 + \alpha_i + \alpha_i^2) \varphi_0 + \mu l_i^2 (1 + 2\alpha_i) b_0 + \mu l_i^3 \varphi_0.$$

In generale si ha

$$(25) \quad \left| \Delta_{l_i} x_i(t) \right| = \left| \Delta_{l_i} x_i(n_i l_i) \right| \leq \alpha_i^{n_i-1} \cdot b_0 + l_i \sum_{r=0}^{n_i-2} \alpha_i^r \varphi_0 + \\ + \mu \sum_{r=1}^{n_i} \left\{ l_i^{2r} P_{2r}^{(n_i)} b_0 + l_i^{2r+1} P_{2r+1}^{(n_i)} \varphi_0 \right\},$$

indicando $P_{\varrho}^{(n_i)}$ un polinomio intero in α_i di grado $n_i - \varrho - 1$.

D'altra parte, essendo

$$n_i = t/l_i \leq T/l_i,$$

per (22) si ha

$$(26) \quad \alpha_i^{n_i-1} < \alpha_i^{n_i} \leq \left(1 + \frac{\gamma}{1/l_i} \right)^{T/l_i} < e^{\gamma T},$$

da cui segue

$$(27) \quad l_i \sum_{r=0}^{n_i-2} \alpha_i^r = l_i \frac{\alpha_i^{n_i-1} - 1}{\alpha_i - 1} < \frac{\alpha_i^{n_i-1}}{\gamma} < e^{\gamma T} / \gamma.$$

Inoltre esaminando i $P_{\varrho}^{(n_i)}$ ($\varrho = 2, 3, 4, \dots$) si trova

$$P_2^{(n_i)} > P_3^{(n_i)} > P_4^{(n_i)} > \dots$$

con

$$(28) \quad P_2^{(n_i)} = 1 + 2 \alpha_i + 3 \alpha_i^2 + \dots + (n_i - 2) \alpha_i^{n_i-3}.$$

Allora l'ultimo termine del secondo membro di (25) può maggiorarsi nel modo seguente:

$$(29) \quad \mu \sum_{r=1}^{n_i} \left\{ l_i^{2r} \cdot P_{2r}^{(n_i)} \cdot b_0 + l_i^{2r+1} P_{2r+1}^{(n_i)} \varphi_0 \right\} < \mu l_i^2 P_2^{(n_i)} \left\{ b_0 \sum_{r=1}^{n_i} l_i^{2(r-1)} + \varphi_0 \sum_{r=1}^{n_i} l_i^{2r-1} \right\} \\ < \mu l_i^2 P_2^{(n_i)} \left\{ b_0 \frac{1 - l_i^{2n_i}}{1 - l_i^2} + \varphi_0 l_i \frac{1 - l_i^{2n_i}}{1 - l_i^2} \right\} \\ < \mu l_i^2 P_2^{(n_i)} \frac{1}{1 - l_i^2} \left\{ b_0 + l_i \varphi_0 \right\}.$$

D'altra parte per (28) essendo $l_i \leq 1/2$ e tenendo presente l'espressione (22) di α_i , si ha:

$$l_i^2 P_2^{(n_i)} < l_i^2 (n_i - 2) \sum_{\nu=0}^{n_i-3} \alpha_i^\nu < l_i^2 \frac{l_i - 2l_i}{l_i} \cdot \frac{1 - \alpha_i^{n_i-2}}{1 - \alpha_i} < T \cdot \frac{\alpha_i^{n_i}}{\gamma}$$

cioè per (26)

$$l_i^2 P_2^{(n_i)} < (T/\gamma) e^{\gamma T}.$$

Sostituendo nella (29) risulta, per $l_i \leq 1/2$,

$$(29') \quad \mu \sum_{\nu=1}^{n_i} \{ l_i^{2\nu} \cdot P_{2\nu}^{(n_i)} \cdot b_0 + l_i^{2\nu+1} P_{2\nu+1}^{(n_i)} \varphi_0 \} < 2\mu \frac{T}{\gamma} e^{\gamma T} \left\{ b_0 + \frac{1}{2} \varphi_0 \right\} \\ < 2\mu \{ b_0 + \varphi_0 \} T e^{\gamma T} / \gamma.$$

Infine per le maggiorazioni (26), (27) e (29') segue dalla (25) la limitazione (19) che dovevamo provare, essendo

$$(30) \quad \omega = \{ (\gamma + 2\mu T) b_0 + (1 + 2\mu T) \varphi_0 \} e^{\gamma T} / \gamma.$$

§ 5. - Convergenza.

5.1. - Alcune premesse.

Le questioni di esistenza e di unicità della soluzione $x(t)$ del sistema differenziale (D) hanno dato luogo, com'è ben noto, a numerosissimi lavori italiani, francesi, americani, russi e giapponesi [1], [2], [3], [4].

Se nel sistema differenziale (D) alle ipotesi del n. 2.1 sulle funzioni $f(u, v)$ e $\varphi(u)$ si aggiunge la limitazione e la lipschitzianità di $f(u, v)$ in tutto il piano (u, v) e la lipschitzianità di $\varphi(u)$ in $(\infty, +\infty)$, dirò, per comodità di linguaggio, che il sistema differenziale (D) è regolare. Allora [3] si ha certamente che « un sistema differenziale (D) regolare ha sempre una, e una sola, soluzione ».

Indicherò con $X(t)$ la soluzione del sistema differenziale (D) regolare.

I sistemi alle differenze finite (Δ) che corrispondono ad un sistema differenziale (D) regolare, si diranno regolari..

Infine, la successione $x_i(t)$ ($i = 1, 2, 3, \dots$) delle soluzioni dei sistemi alle differenze finite $(\Delta)_{l_i}$ si dirà uniformemente convergente in modo asintotico a $X(t)$ in $(0, T)$ (con T razionale), quando preso un $\varepsilon > 0$, è possibile determinare un δ_ε tale che sia

$$|X(t) - x_i(t)| < \varepsilon$$

per ogni $l_i < \delta_\varepsilon$ e per ogni t di $(0, T)$.

5.2. — Convergenza.

Si ha:

Teorema IV. *La successione delle soluzioni $x_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots$) dei sistemi regolari alle differenze $(\Delta)_{l_i}$ ($i = 1, 2, \dots$) è uniformemente convergente in modo asintotico alla soluzione $X(t)$ del sistema differenziale regolare (D) .*

Dimostrazione. Per il seguito sono utilissimi due simboli. Il simbolo $\mathcal{O}^{(h)}(l_i^r)$ indicherà, per $h = 1, 2, 3, \dots$, delle quantità positive infinitesime con l_i d'ordine maggiore od uguale ad r ($r = 1, 2, 3, \dots$). Analogamente il simbolo $\mathcal{O}_t^{(h)}(l_i^r)$ indicherà, in un certo istante t e per $h = 1, 2, 3, \dots$, delle quantità (non necessariamente positive) infinitesime con l_i d'ordine maggiore od uguale ad r ($r = 1, 2, 3, \dots$).

Ciò premesso, per comodità, suddivido la dimostrazione in tre parti.

PARTE I. Considero l'equazione alle differenze del sistema $(\Delta)_{l_i}$ posta sotto la forma con cui figura nel sistema (Δ') (cfr. n. 2.2):

$$(31) \quad x_i(t) = (2 - l_i f_{n_i-1})x_i(t - l_i) - (1 - l_i f_{n_i-1})x_i(t - 2l_i) - l_i^2 \varphi(x_i(t - 2l_i)),$$

dove

$$(31') \quad f_{n_i-1} = f(x_i(t_{n_i-1}), \Delta_{l_i} x_i(t_{n_i-1})) = f(x_i(t - l_i), \Delta_{l_i} x_i(t - l_i)).$$

Sostituisco nel secondo membro di (31) a $x_i(t)$ la soluzione $X(t)$ del sistema differenziale regolare (D) :

$$(32) \quad H = (2 - l_i F(t - l_i)) \cdot X(t - l_i) - (1 - l_i \cdot F(t - l_i)) \cdot X(t - 2l_i) - l_i^2 \varphi(X(t - 2l_i)),$$

avendo posto, per brevità,

$$(32') \quad F(t-l_i) = f(X(t-l_i), \Delta_{l_i} X(t-l_i)).$$

Ora si ha:

$$(33) \quad \begin{cases} X(t-l_i) = X(t) + \mathcal{O}_i^{(1)}(l_i) \\ \Delta_{l_i} X(t-l_i) = \dot{X}(t) + \mathcal{O}_i^{(2)}(l_i), \end{cases}$$

e per la lipschitzianità in $(0, T)$ di $X(t)$, e $\dot{X}(t)$ esisterà un $\mathcal{O}^{(1)}(l_i)$ tale che

$$(34) \quad |\mathcal{O}_i^{(1)}(l_i)| < \mathcal{O}^{(1)}(l_i), \quad |\mathcal{O}_i^{(2)}(l_i)| < \mathcal{O}^{(1)}(l_i) \text{ }^{(5)}.$$

Per la lipschitzianità di f e φ è allora

$$(35) \quad \begin{cases} F(t-l_i) \equiv f(X(t) + \mathcal{O}_i^{(1)}(l_i), \dot{X}(t) + \mathcal{O}_i^{(2)}(l_i)) = f(X(t), \dot{X}(t)) + \mathcal{O}_i^{(3)}(l_i) \\ \varphi(X(t-2l_i)) = \varphi(X(t)) + \mathcal{O}_i^{(4)}(l_i), \end{cases}$$

⁽⁵⁾ Infatti per lipschitzianità di $X(t)$ esiste una costante χ_1 tale che

$$|X(t-l_i) - X(t)| < \chi_1 l_i,$$

ossia

$$|\mathcal{O}_i^{(1)}(l_i)| < \chi_1 l_i;$$

inoltre per essere

$$\Delta_{l_i} X(t-l_i) = \dot{X}(t - (1+\theta)l_i)$$

con $0 < \theta < 1$, esisterà una costante χ_2 tale che

$$|\Delta_{l_i} X(t-l_i) - \dot{X}(t)| < \chi_2 \cdot (1+\theta) \cdot l_i,$$

ossia

$$|\mathcal{O}_i^{(2)}(l_i)| < \chi_2 \cdot (1+\theta) \cdot l_i.$$

ed esisterà un $\mathcal{O}^{(2)}(l_i)$ tale che

$$(36) \quad |\mathcal{O}_t^{(3)}(l_i)| < \mathcal{O}^{(2)}(l_i), \quad |\mathcal{O}_t^{(4)}(l_i)| < \mathcal{O}^{(2)}(l_i) \text{ (6)}.$$

Per la formula di TAYLOR si ha:

$$(37) \quad \begin{cases} X(t-l_i) = X(t) - l_i \dot{X}(t) + (l_i^2/2) \ddot{X}(t) + \mathcal{O}_t^{(5)}(l_i^3) \\ X(t-2l_i) = X(t) - 2l_i \dot{X}(t) + 2l_i^2 \ddot{X}(t) + \mathcal{O}_t^{(6)}(l_i^3) \end{cases}$$

e per la lipschitzianità di $\ddot{X}(t)$ (conseguenza della regolarità del sistema (D)), esisterà un $\mathcal{O}^{(3)}(l_i^3)$ tale che

$$(38) \quad |\mathcal{O}_t^{(5)}(l_i^3)| < \mathcal{O}^{(3)}(l_i^3), \quad |\mathcal{O}_t^{(6)}(l_i^3)| < \mathcal{O}^{(3)}(l_i^3) \text{ (7)}.$$

Sostituendo (35) e (37) in (32), ottengo

$$(39) \quad H = X(t) - l_i^2 \{ \ddot{X}(t) + f(X(t), \dot{X}(t)) \cdot \dot{X}(t) + \varphi(X(t)) \} + \mathcal{O}_t^{(7)}(l_i^3),$$

con

$$(39') \quad \mathcal{O}_t^{(7)}(l_i^3) = \{ -l_i^2 \ddot{X}(t) + (3/2) l_i^3 \ddot{X}(t) \} \mathcal{O}_t^{(3)}(l_i) - l_i^4 \mathcal{O}_t^{(4)}(l_i) + \\ + \{ 1 - l_i f(X, \dot{X}) - l_i \mathcal{O}_t^{(3)}(l_i) \} \mathcal{O}_t^{(5)}(l_i^3) - \{ 1 - l_i f(X, \dot{X}) - l_i \mathcal{O}_t^{(3)}(l_i) \} \mathcal{O}_t^{(6)}(l_i^3).$$

Per (34), (36) e (38) esisterà un $\mathcal{O}^{(4)}(l_i^3)$ tale che

$$(40) \quad |\mathcal{O}_t^{(7)}(l_i^3)| < \mathcal{O}^{(4)}(l_i^3).$$

Infine ricordando che $X(t)$ è soluzione del problema differenziale (D), la (39) si riduce a

$$H = X(t) + \mathcal{O}_t^{(7)}(l_i^3),$$

(6) Come si vede con un ragionamento analogo a quello fatto nell'annotazione (5).

(7) Cfr. annotazione (6).

ossia tenendo presente l'espressione (32) di H , si ha infine:

$$(41) \quad X(t) + \mathcal{O}_i^{(7)}(l_i^3) = \{2 - l_i \cdot F(t - l_i)\} \cdot X(t - l_i) - \\ - \{1 - l_i \cdot F(t - l_i)\} \cdot X(t - 2l_i) - l_i^2 \varphi(X(t - 2l_i)).$$

PARTE II. Pongo:

$$(42) \quad w_i(t) = X(t) - x_i(t);$$

sarà allora

$$\Delta_{l_i} w_i(t) = \{w_i(t) - w_i(t - l_i)\} / l_i = \Delta_{l_i} X(t) - \Delta_{l_i} x_i(t).$$

Sottraendo membro a membro dalla (41) la (31), risulta

$$w_i(t) + \mathcal{O}_i^{(7)}(l_i^3) = 2w_i(t - l_i) - w_i(t - 2l_i) - l_i^2 \cdot F(t - l_i) \cdot \Delta_{l_i} w_i(t - l_i) - \\ - l_i^2 \{ \varphi(X(t - 2l_i)) - \varphi(x_i(t - 2l_i)) \} - l_i^2 \{ F(t - l_i) - f_{n_i-1} \} \cdot \Delta_{l_i} x_i(t - l_i),$$

ed anche

$$\Delta_{l_i} w_i(t) = \{1 - l_i F(t - l_i)\} \Delta_{l_i} w_i(t - l_i) - l_i \{ \varphi(X(t - 2l_i)) - \varphi(x_i(t - 2l_i)) \} - \\ - l_i \cdot \{ F(t - l_i) - f_{n_i-1} \} \Delta_{l_i} x_i(t - l_i) - (1/l_i) \cdot \mathcal{O}_i^{(7)}(l_i^3).$$

Ne segue, tenendo presente (40),

$$(43) \quad | \Delta_{l_i} w_i(t) | \leq | 1 - l_i F(t - l_i) | \cdot | \Delta_{l_i} w_i(t - l_i) | + \\ + l_i | \varphi(X(t - 2l_i)) - \varphi(x_i(t - 2l_i)) | + \\ + l_i | F(t - l_i) - f_{n_i-1} | \cdot | \Delta_{l_i} x_i(t - l_i) | + (1/l_i) \cdot \mathcal{O}_i^{(4)}(l_i^3).$$

Per migliorare opportunamente il 2° membro di (43), osservo che si ha:

$$| 1 - l_i F(t - l_i) | \leq 1 + l_i \gamma = \alpha_i,$$

analogamente alla (22);

$$|\varphi(X(t-2l_i)) - \varphi(x_i(t-2l_i))| < \mu |w_i(t-2l_i)|,$$

analogamente alla (23'); inoltre per la lipschitzianità di f , esisterà un A tale che

$$\begin{aligned} |F(t-l_i) - f_{n_i-1}| &\equiv |f(X(t-l_i), \Delta_{l_i} X(t-l_i)) - f(x_i(t-l_i), \Delta_{l_i} x_i(t-l_i))| \\ &\leq A \{ |w_i(t-l_i)| + |\Delta_{l_i} w_i(t-l_i)| \}, \end{aligned}$$

da cui, con ovvi passaggi e tenendo presente (19), si trova

$$|F(t-l_i) - f_{n_i-1}| \cdot |\Delta_{l_i} x_i(t-l_i)| \leq A \cdot \omega \cdot \{ |w_i(t-2l_i)| + 2 |\Delta_{l_i} w_i(t-2l_i)| \}.$$

Allora posso sostituire la (43) con

$$(44) \quad |\Delta_{l_i} w_i(t)| \leq \alpha_i^* \cdot |\Delta_{l_i} w_i(t-l_i)| + l_i \mu^* |w_i(t-2l_i)| + (1/l_i) \cdot \mathcal{O}^{(4)}(l_i^3),$$

avendo posto

$$\begin{cases} \alpha_i^* = \alpha_i + 2A\omega l_i = 1 + (\gamma + 2A\omega) l_i \\ \mu^* = \mu + \omega A. \end{cases}$$

Notando poi che è

$$|w_i(t-2l_i)| \leq l_i \sum_{\tau=l_i}^{t-2l_i} |\Delta_{l_i} w_i(\tau)|,$$

[essendo per ipotesi $w(0) = X(0) - x_i(0) = 0$] la (44) diventa infine

$$(45) \quad |\Delta_{l_i} w_i(t)| \leq \alpha_i^* \cdot |\Delta_{l_i} w_i(t-l_i)| + l_i \cdot \mathcal{O}^{(5)}(l_i) + \mu^* \cdot l_i^2 \sum_{\tau=l_i}^{t-2l_i} |\Delta_{l_i} w_i(\tau)|.$$

PARTE III. Noto che la (45) si ottiene formalmente dalla (24) in modo molto semplice: basta nella (24) scambiare ordinatamente le quantità

$$w_i(t), \quad \alpha_i, \quad \varphi_0, \quad \mu$$

con le quantità

$$w_i(t), \quad \alpha_i^*, \quad \mathcal{O}^{(5)}(l_i), \quad \mu^*,$$

ed osservare che le quantità che si scambiano fra loro sono della stessa natura ⁽⁸⁾.

Pertanto il procedimento di maggiorazione applicato al secondo membro di (24) (cfr. n. 4.2) può senz'altro trasportarsi al secondo membro di (45) e si concluderà

$$(46) \quad \left| \Delta_{l_i} w_i(t) \right| < \Omega,$$

dove Ω sarà la quantità corrispondente alla ω data dalla (30).

Inoltre l'espressione di Ω seguirà da quella di ω mediante lo scambio di convenienti quantità corrispondenti ⁽⁹⁾, e sarà precisamente

$$(46') \quad \Omega = \{A + 2\mu^* T\} \mathcal{O}^{(7)}(l_i) + (1 + 2\mu^* T) \mathcal{O}^{(6)}(l_i) = \mathcal{O}^{(8)}(l_i).$$

La (46) diventa allora

$$\left| \Delta_{l_i} w_i(t) \right| < \mathcal{O}^{(8)}(l_i),$$

da cui segue

$$(47) \quad |w_i(t)| < |w_i(t - l_i)| + l_i \cdot \mathcal{O}^{(8)}(l_i).$$

⁽⁸⁾ Precisamente: $x_i(t)$ e $w_i(t)$ sono entrambe definite in $(0, T)$;

α_i e α_i^* dipendono linearmente da l_i ;

μ e μ^* non dipendono entrambi nè da t nè da l_i .

⁽⁹⁾ Precisamente le quantità γ , μ e b_0 di ω hanno per corrispondenti in Ω le quantità A , μ^* e $|\Delta_{l_i} w_i(l_i)|$, dove è

$$\begin{aligned} \left| \Delta_{l_i} w_i(l_i) \right| &= \left| \frac{\{X(l_i) - x_i(l_i)\} - \{X(0) - x_i(0)\}}{l_i} \right| = \left| \frac{X(l_i) - X(0)}{l_i} - \frac{x_i(l_i) - x_i(0)}{l_i} \right| \\ &= \left| \frac{l_i b + \mathcal{O}_{l_i}^{(7)}(l_i^2)}{l_i} - b \right| < \mathcal{O}^{(7)}(l_i). \end{aligned}$$

Sommando membro a membro le n_i relazioni ottenute da (47) dando a t i valori $l_i, 2 l_i, 3 l_i, \dots, n_i l_i = t$, si ottiene [a riduzioni fatte e tenendo presente che $w_i(0) = 0$]:

$$(48) \quad |w_i(t)| < t \cdot \mathcal{O}^{(s)}(l_i) < T \cdot \mathcal{O}^{(s)}(l_i),$$

il che prova l'uniforme convergenza in modo asintotico della successione $x_i(t)$ ($i = 1, 2, 3, \dots$) alla funzione $X(t)$.

§ 6. - Errore numerico.

6.1. - Valutazione approssimata di $x_i(t)$.

Supponiamo che nel calcolare il valore numerico della soluzione $x_i(t)$, in un certo istante t^* ($t^* \geq 0$), si commetta un certo errore ε^* : indicando con $\tilde{x}_i(t)$ la conseguente valutazione approssimata di $x_i(t)$ per $t \geq t^*$, l'errore sarà

$$(49) \quad \varepsilon_i = \varepsilon_i(t) = x_i(t) - \tilde{x}_i(t) \quad (t \geq t^*).$$

In generale ε^* è dovuto ad un arrotondamento delle cifre decimali del valore numerico di $x_i(t^*)$. Per esempio, se si prendono le prime ρ cifre decimali, sarà $|\varepsilon^*| \leq 10^{-\rho}$. Ora se all'istante t^* si tiene fisso il numero ρ e si fa tendere a zero l'unità frazionaria generatrice l_i , è chiaro che la successione $\tilde{x}_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots$), in ogni istante $t \geq t^*$, non potrà ritenersi convergente ad $X(t)$ (soluzione del sistema (D)). È naturale perciò pensare ε^* funzione di l_i e precisamente infinitesimo almeno dello stesso ordine di l_i ⁽¹⁰⁾:

$$(50) \quad |\varepsilon^*| = \mathcal{O}(l_i).$$

6.2. - Valutazione dell'errore numerico.

Vale il seguente

Teorema V. *L'errore $\varepsilon_i(t)$ per ogni $t \geq t^*$ è un infinitesimo almeno del primo ordine rispetto ad l_i , se tale risulta all'istante t^* .*

Dimostrazione. Senza perdere in generalità, pongo $t^* = 0$ ed indico con (\tilde{A}) il sistema *variato* ottenuto sostituendo in (A) le seguenti condizioni iniziali:

$$(51) \quad \tilde{a} = a + \varepsilon^* \quad \tilde{b} = b.$$

⁽¹⁰⁾ Riguardo alle quantità $\mathcal{O}(l_i)$ di questo paragrafo confronta pag. 24.

Ovviamente è $\tilde{x}_i(t)$ la soluzione di $(\tilde{A})_{l_i}$. Osservo subito che il confronto di $(\tilde{A})_{l_i}$ con $(A)_{l_i}$ permette di estendere passo passo alla funzione $|\Delta_{l_i} \tilde{x}_i(t)|$ le considerazioni già fatte nel § 4 sulla funzione $|\Delta_{l_i} x_i(t)|$; si ottiene così invece di (19)

$$(52) \quad |\Delta_{l_i} \tilde{x}_i(t)| \leq \tilde{\omega} \quad (i = 1, 2, \dots),$$

dove l'espressione di

$$\tilde{\omega} = \omega + \mathcal{O}^{(2)}(l_i)$$

è ottenuta da quella di ω , data dalla (30), sostituendo in questa al posto di φ_0 la quantità $\varphi_0 + \mathcal{O}^{(1)}(l_i)$.

Da (52) segue

$$(52') \quad |\tilde{x}_i(t)| \leq |\tilde{x}_i(t-l_i)| + \tilde{\omega} l_i \quad (i = 1, 2, \dots),$$

ed anche (sommando membro a membro le n_i relazioni ottenute da (52') dando a t i valori $l_i, 2l_i, 3l_i, \dots, n_i l_i = t$):

$$(53) \quad |\tilde{x}_i(t)| \leq a_0 + \mathcal{O}^{(3)}(l_i) \quad (i = 1, 2, \dots).$$

Ora il confronto di (53) con la (21) permette di estendere alla funzione

$$\tilde{w}_i(t) = X(t) - \tilde{x}_i(t)$$

l'analisi già seguita nel § 5 sulla funzione $w_i(t) = X(t) - x_i(t)$. Osservato poi che per $t = 0$ è $\tilde{w}_i(0) = \varepsilon^*$, si ottiene subito come formula analoga alla (48):

$$(54) \quad |\tilde{w}_i(t)| \leq \mathcal{O}^{(4)}(l_i),$$

risultando, pertanto, la successione $\tilde{x}_i(t)$, in ogni istante $t \geq t^*$, uniformemente convergente in modo asintotico ad $X(t^*)$ (cfr. n. 5.1).

Infine dall'identità

$$|\varepsilon_i| = |\varepsilon_i(t)| = |\{X(t) - \tilde{x}_i(t)\} - \{X(t) - x_i(t)\}| \leq |\tilde{w}_i(t)| + |w_i(t)|,$$

in virtù delle (48) e (54) segue

$$(55) \quad |\varepsilon_i| = \mathcal{O}^{(5)}(l_i),$$

rimanendo così provato che in ogni istante $t \geq t^*$, l'errore numerico risulta dello stesso ordine di grandezza del suo valore iniziale.

§ 7. - Bibliografia.

Per un'ampia Bibliografia su le equazioni differenziali della Meccanica non lineare vedasi:

- [1] CH. HAVASHI, *Forced oscillations in non linear systems*, Nippon Printing - Publ. Com., Osaka 1953.
- [2] N. MINORSKI, *Introduction to non linear Mechanics*, E. Brothers, Michigan 1947.
- [3] G. SANSONE, R. CONTI, *Equazioni differenziali non lineari*, Cremonese, Roma 1956.
- [4] J. STOKER, *Non linear vibrations in mechanical and electrical systemes*, Inter. Publ. New. York 1950,

e in particolare:

- [5] H. E. CARTAN, *Note sur la génération des oscillations entretenues*, Ann. des Postes, Télégr. et Téléph., **14** (1925), 1196-1207.
- [6] D. GRAFFI, *Sopra alcune equazioni differenziali non lineari della Fisica Matematica*, Mem. Acc. Sci. Ist. Bo. (9) **7** (1939-40), 121-129.
- [7] D. GRAFFI, *Sopra alcune equazioni differenziali della Radiotecnica*, Mem. Acc. Sci. Ist. Bo. (9) **9** (1942), 145-153.
- [8] D. GRAFFI, *Su una equazione differenziale non lineare della Fisica Matematica*, Atti Acc. Sci. Ist. Bo. (II) **3**, (1956), 64-69.
- [9] G. KRALL, *Dinamica ed aerodinamica dei fili. Problemi non lineari delle vibrazioni visibili*, Rend. Acc. Naz. Lincei (8) **5** (1948), 197-203.
- [10] N. LEVINSON, O. K. SMITH, *A general equation for relaxation oscillations*, Duke Math. Jour., **9** (1942), 382-403.
- [11] A. LIÉNARD, *Étude des oscillations entretenues*, Révue génér. de l'Électr. **23** (1928), 901-902.
- [12] A. LIÉNARD, *Oscillations auto-entretenues*, Proc. 3rd Int. Congr. Appl. Mech. 1930; **3** (1930), 173-177.
- [13] N. MINORSKY, *Sur quelques applications des équations différentielles aux différences*, Rend. Mat. Fis. Milano **23** (1952), 36-47.

- [14] N. MINORSKY, *Sur des systèmes oscillatoires contenant des paramètres à inertie*, Comptes rendus **235** (1952), 604-605.
- [15] B. VAN DER POL, *Sur les oscillations de relaxation*, The Phil. Magazine (7) **2** (1926), 978-992.
- [16] B. VAN DER POL, *The non linear theory of electrical oscillations*, Proc. Inst. Radio Eng. **22** (1934), 1051-1086.
- [17] G. SANSONE, *Soluzioni periodiche dell'equazione di Liénard. Calcolo del periodo*, Rend. Sem. Mat. Torino **10** (1951), 155-171.
- [18] A. SIGNORINI, *Sul moto di un punto soggetto a resistenza idraulica e a forza di richiamo*, Atti Ist. Veneto Sci. Lett. Arti **73** (1913-1916), 803-858.

S u m m a r y .

By means of finite differences method J treat the differential system (D) of the non linear Mechanic. Considering the discontinuous space, J prove that the solution of a suitable finite differences system (A) is unic and oscillating, provided smooth conditions.

By adding an appropriate hypothesis, J set that this solution takes positive (negative) values in the max (min) points.

Furthermore the finite differences method states actual procedure of calculation of differential system solution. For this purpose, under certain conditions J note that: I) the sequence of the solutions of finite differences «regular systems» (A) ($i = 1, 2, 3, \dots$) is equibounded; II) this sequence is uniformly convergent to differential system solution; III) the numerical error is uniformly bounded.