

TRISTANO MANACORDA (*)

Sulla termoelasticità dei solidi incomprimibili. (**)

1. — In questi ultimi anni la termoelasticità, che pure come ramo della Fisica Matematica non ha certo una origine recente ⁽¹⁾, ha suscitato un rinnovato fervido interesse presso gli studiosi sia teorici che di scienze applicate. Non ultima ragione, certo, anche l'importanza che essa presenta nella moderna aerodinamica. Tale rifiorire di studi, di regola relativi a trasformazioni infinitesime, ha già dato origine a trattazioni sistematiche ⁽²⁾ e ad interi gruppi di ricerche ⁽³⁾.

Non mi pare, tuttavia, che sia ancora mai stato preso in esame il caso, pur di notevole interesse anche tecnico, dei solidi incomprimibili. Il presente lavoro ha l'intenzione di iniziare a colmare tale apparente lacuna.

Allo stato attuale, gravi difficoltà già si presentano per la deduzione di risultati concreti anche da una teoria linearizzata. Tuttavia, l'impostazione del problema da un punto di vista generale ha il suo interesse, oltre che concettuale, anche perchè mi sembra che una teoria linearizzata acquisti un suo preciso rigoroso significato se dedotta come prima approssimazione — e sulle equazioni e sulla legge sforzi deformazione — da una teoria generale non vincolata da re-

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università, Parma (Italia).

(**) Ricevuto il 23-6-1960.

⁽¹⁾ La prima trattazione pare risalga a Duhamel, J. M. C. DUHAMEL: *Mémoire sur le calcul des actions moléculaire développées par les changements de température dans les corps solides*, Mém. Div. Savants, (2) 5, (1838), 440-485.

⁽²⁾ Ad es. E. MELAN, H. PARKUS: *Wärmespannungen infolge stationärer Temperaturfelder*, Wien, 1953; H. PARKUS: *Instationäre Wärmespannungen*, Wien, 1959; B. E. GATEWOOD: *Thermal stresses*, New York, 1957.

⁽³⁾ Cfr. ad es. la bibliografia contenuta nel cap. XIV di: S. TIMOSHENKO, J. N. GOODIER: *Theory of Elasticity*, 2ª ed., New York 1951, e J. N. GOODIER: *Thermal stresses and deformation*, J. Appl. Mech. 24, (1957), 467-474.

strizioni di infinitesimalità. Nè va dimenticata la possibilità di ottenere da una siffatta teoria delle indicazioni preziose che possono avere il loro riflesso anche nell'ambito delle trasformazioni linearizzate.

Volendo dunque stabilire una teoria per quanto possibile rigorosamente appoggiata a principi generali, nel presente lavoro si fa particolarmente riferimento alla ricerche, fondamentali in questo campo, di A. SIGNORINI (4) che contengono vari risultati generali adattabili al caso in esame. Mentre all'occasione si fa anche uso della teoria generalizzata delle dimensioni fisiche, la cui utilità nello studio delle trasformazioni dei continui è stata messa in risalto ad es in diversi lavori di C. TRUESDELL (5).

Precisata, appunto con considerazioni di carattere dimensionale, la forma generale della equazione del calore, e adattate al caso in esame le equazioni della elasticità, si rivolge particolare attenzione alle trasformazioni linearizzate, estendendo al caso di solidi incomprimibili alcuni risultati di STERNBERG, MINDLIN ecc., senza tuttavia indugiare nè su applicazioni concrete nè sulla forma che assumerebbero nel caso attuale diversi risultati della elasticità linearizzata isoterma. Ciò che avrebbe fatto perdere a questo lavoro il suo carattere prevalentemente introduttivo.

Invece gli ultimi n.i sono stati dedicati alla trattazione completa di un problema non lineare, senza tuttavia che si presenti la necessità di restringere la struttura del potenziale termodinamico a forme particolari.

2. - Sia S un sistema continuo, C e C_* due sue configurazioni delle quali la seconda è assunta quale configurazione di riferimento alla temperatura uniforme T_* . Siano poi P_* e P una qualunque coppia di punti corrispondenti nella trasformazione regolare $C_* \rightarrow C$, di cui indico con y_h e x_h ($h = 1, 2, 3$) rispettivamente le coordinate cartesiane rispetto ad una terna prefissata $\mathfrak{C} \equiv \odot \mathbf{c}_1 \mathbf{c}_2 \mathbf{c}_3$, ed $\mathbf{s} = s^h \mathbf{c}_h$ lo spostamento.

Sarà conveniente introdurre, accanto al sistema cartesiano di riferimento, anche un sistema di coordinate curvilinee caratterizzato da tre parametri z^λ ($\lambda = 1, 2, 3$) aventi carattere molecolare e soggetti alla sola condizione di essere in corrispondenza biunivoca con le y_h , e perciò, per ogni C , anche con

(4) A. SIGNORINI: *Trasformazioni termoelastiche finite*. Mem I, II, III, Ann. Mat. pura e appl. (4), 22, (1943), 33-143; 30, (1949), 1-72; 39, (1955), 147-201 e *Lezioni di Fisica Matematica*, Napoli (1934-35), in lit.

(5) Ad es. in *The mechanical foundations of elasticity and fluid dynamics*, J. Rat. Mech. An. 1, (1952), 125-300, e *Hypo-elasticity*, J. Rat. Mech. An. 4, (1955), 83-133.

le x_h . In corrispondenza a tale scelta, indico con s^λ le componenti controvarianti di \mathbf{s} rispetto al sistema base $\mathbf{a}_\lambda = \frac{\partial P_*}{\partial z^\lambda}$, con $a_{\lambda\mu}$ le componenti del tensore metrico fondamentale in C_* , ed infine, posto

$$(2.1) \quad \mathbf{b}_\lambda = \frac{\partial P}{\partial z^\lambda},$$

con $b_{\lambda\mu}$ le componenti del tensore metrico fondamentale in C .

Con queste notazioni, il tensore di deformazione $\gamma_{\lambda\mu}$ relativo alla trasformazione $C_* \rightarrow C$, resta espresso da

$$(2.2) \quad {}^2 \gamma_{\lambda\mu} = b_{\lambda\mu} - a_{\lambda\mu},$$

mentre per il tensore di trasformazione $\alpha_{\lambda\mu}$ si ha

$$(2.3) \quad \alpha_{\lambda\mu} = a_{\lambda\mu} + s_{\lambda|\mu}^{(6)}.$$

Per il determinante jacobiano \mathfrak{D} relativo alla trasformazione delle y nelle x , e coincidente con l'invariante terzo di α , resta anche acquisita l'espressione:

$$(2.4) \quad \mathfrak{D}^2 = \frac{\det. \| b_{\lambda\mu} \|}{\det. \| a_{\lambda\mu} \|} = \text{III}_b$$

Indico poi con \mathcal{A} il tensore complementare di α , cioè quello le cui componenti (nel sistema base \mathbf{a}_λ) sono definite da

$$(2.5) \quad \alpha^{\lambda\mu} A_{\nu\mu} = \delta_\nu^\lambda \text{III}_\alpha \equiv \delta_\nu^\lambda \mathfrak{D}.$$

Sia allora $d\sigma$ un elemento superficiale orientato in C , e $d\sigma_* \mathbf{n}_*$ il corrispondente in C_* . Tra i due elementi sussiste la relazione

$$(2.6) \quad \mathbf{n} d\sigma \equiv n^\lambda \mathbf{b}_\lambda d\sigma = A^\mu{}_\nu n_*^\nu \mathbf{a}_\mu d\sigma_*,$$

con $\mathbf{n}_* = n_*^\nu \mathbf{a}_\nu$, equivalente a

$$(2.7) \quad n^\lambda d\sigma = (\alpha^{-1})^\lambda{}_\mu A^\mu{}_\nu n_*^\nu d\sigma_*.$$

(6) La barra posta innanzi all'indice μ indica derivazione covariante rispetto a z^μ nella metrica $a_{\lambda\mu}$.

Siano poi T_h ($h = 1, 2, 3$) gli sforzi relativi agli assi, assunte come positive le tensioni. Con riferimento alle z^i poniamo

$$(2.8) \quad t^i = \frac{\partial z^i}{\partial x^h} T_h,$$

e in corrispondenza

$$(2.9) \quad t^i = t^{i\mu} b_\mu.$$

Il tensore doppio simmetrico di componenti controvarianti $t^{i\mu}$ è il tensore degli sforzi. Si può osservare che, se le z^i vengono a coincidere con le x_h , le t^{hk} corrispondenti coincidono con le ordinarie caratteristiche di tensione, mentre quando si facciano coincidere le z^i con le y_h , le corrispondenti componenti t^{hk} non differiscono dalle caratteristiche lagrangiane di tensione⁽⁷⁾ che per il fattore $1/\mathfrak{D}$.

Per scrivere in forma molecolare le equazioni di Cauchy conviene introdurre il tensore di Kirchhoff di componenti (nel sistema base α_i) $K^{\lambda\mu}$ date da⁽⁸⁾

$$(2.10) \quad K^{\lambda\mu} = \mathfrak{D} \{ t^{\lambda\mu} + s^{\lambda} |_{\rho} t^{\rho\mu} \}.$$

Ove allora si indichi con n_* la normale interna nei punti del contorno Σ_* di C_* , e si ponga, per la forza superficiale $f d\Sigma$ agente sull'elemento $d\Sigma$ del contorno Σ di C

$$(2.11) \quad f d\Sigma = f_* d\Sigma_*,$$

e si accenni con ρ e $\rho_* = \rho \mathfrak{D}$ la densità materiale in C e C_* rispettivamente e con ρF la forza specifica di massa, le equazioni relative ad un qualunque sistema continuo, in forma molecolare si scrivono

$$(2.12) \quad \begin{aligned} K^{\lambda\mu} |_{\mu} + \rho_* F^{\lambda} &= 0 \quad \dots \quad C_*, \\ K^{\lambda\mu} n_{\mu}^* + f_{\lambda}^i &= 0 \quad \dots \quad \Sigma_*. \end{aligned}$$

⁽⁷⁾ A. SIGNORINI, luog. cit. in (4), Mem. I, Cap. II, n. 4.

⁽⁸⁾ Cfr. anche C. TOLOTTI: *Le equazioni lagrangiane della meccanica dei sistemi continui in coordinate generali*, Rend. R. Acc. Sc. Napoli, (4), 13, (1942).

3. - Occorre, a questo punto, stabilire l'equazione del calore.

A questo scopo, indichiamo con \mathbf{q} il vettore di propagazione termica, con u l'energia interna specifica relativa all'unità di massa, con dl_i il lavoro elementare degli sforzi, sempre per unità di massa, e con w la relativa potenza, infine con ψ un vettore atto a caratterizzare il flusso di calore per unità di tempo attraverso il contorno Σ di C . Il principio della conservazione dell'energia in assenza di sorgenti termiche in C

$$(3.1) \quad dt \int_{\sigma} \mathbf{q} \times \mathbf{n} \, d\sigma = \int_c \rho (du + dl_i) \, dc,$$

allora, in quanto valido per ogni elemento c di contorno σ del solido, equivale insieme, all'equazione indefinita

$$(3.2) \quad -\operatorname{div} \mathbf{q} = \rho \left(\frac{du}{dt} + w \right) \dots C,$$

e all'equazione al contorno

$$(3.3) \quad \mathbf{q} \times \mathbf{n} = \psi_n \dots \Sigma.$$

Conviene porre anche queste equazioni in forma sostanziale. A questo scopo, posto $\mathbf{q} = q^\lambda \mathbf{a}_\lambda$, basta tener presente la (2.7) e richiamarsi alla (3.1) per ottenere subito

$$(3.4) \quad -(A^{\lambda\mu} q_\lambda)_{,\mu} = \rho_* \left(\frac{du}{dt} + w \right) \dots C^*,$$

$$(3.5) \quad A^{\lambda\mu} q_\lambda n_\mu^* = \psi_n^* \dots \Sigma_*.$$

Occorre poi aggiungere la relazione tra \mathbf{q} e la temperatura T . Nella teoria classica, relativa a solidi indeformabili, questa si traduce nella ipotesi che \mathbf{q} , nei mezzi termicamente isotropi sia semplicemente proporzionale, e in quelli anisotropi il trasformato omografico, di $\operatorname{grad}_p T$.

Nel caso attuale, trattandosi di sistemi deformabili, non si può escludere la dipendenza di \mathbf{q} da qualche ulteriore parametro, e non è forse privo di interesse far vedere che si perviene ancora ad una conclusione del tipo classico semplicemente presupponendo una dipendenza di \mathbf{q} (oltre che da T , T_* , $\operatorname{grad}_p T$), da un solo parametro dimensionale.

Più precisamente ammetto che, per ogni particella P_* , \mathbf{q} sia una funzione della temperatura attuale T , di una temperatura di riferimento T_* , delle derivate parziali di T rispetto alle x_h , che indicherò brevemente con T_h , ed infine di un ulteriore parametro dimensionale Γ senza escludere, beninteso, la eventuale dipendenza da ulteriori variabili adimensionali [ad es. le componenti cartesiane di α], che complessivamente indicherò con β :

$$(3.6) \quad \mathbf{q} = f(T, T_*; T_h; \Gamma; \beta; P_*),$$

con la condizione che \mathbf{q} si annulli identicamente quando tutte le T_h siano nulle.

Se Γ non è dimensionalmente indipendente da \mathbf{q} , T , T_h , ciascuna delle tre equazioni cui equivale la (3.6) si presenta come una relazione tra sette variabili dimensionali di tre dimensioni indipendenti

$$[q] = mt^{-3}, \quad [T] = \vartheta, \quad [T_h] = \vartheta l^{-1},$$

e perciò, in base ad un noto teorema ⁽⁹⁾, deve potersi ridurre ad una relazione tra quattro prodotti adimensionali. Tanto basta per concludere, data la forma di (3.6), che posto $\Gamma = q_0 \gamma_0^n$ con $[q/q_0] = [\gamma_0 T_h] = l^0 m^0 t^0 \vartheta^0$ ed n reale, la (3.6) deve equivalere a relazioni del tipo

$$(3.7) \quad q_i = -q_0 g_{hi} \left(\frac{T_*}{T}; \beta; P_* \right) (\gamma_0 T_h)^n, \quad (i = 1, 2, 3).$$

La condizione che \mathbf{q} si annulli con le T_h impone ad n di essere positivo mentre il caso classico corrisponde ad assumere $n = 1$. Al tensore di componenti cartesiane Γg_{in} rimane allora ulteriormente imposta, dal secondo principio della termodinamica, la condizione

$$(3.8) \quad \Gamma g_{hk} T_h T_k \geq 0.$$

Non si può, d'altra parte, neanche supporre che Γ abbia dimensioni indipendenti da quelle di \mathbf{q} , T e T_h , perchè in tal caso la (3.6) dovrebbe ridursi a relazione fra tre soli prodotti adimensionali.

⁽⁹⁾ Per una semplice elegante dimostrazione cfr. A. SIGNORINI: *Origini e direttive delle teorie dei modelli*, Atti Convegno « I modelli nella tecnica », Venezia, 1955-56; cfr. anche L. BRAND: *The Pi theorem of dimensional Analysis*, Arch. Rat. Mech. An. 1, (1957), 34-45.

Un solido sarà ancora detto termicamente isotropo quando \mathbf{q} abbia, in ogni punto, la direzione di $\text{grad}_p T$. In tal caso per $n = 1$ la (3.7) diviene

$$(3.9) \quad \mathbf{q} = -K(T/T_*; \beta; P_*) \Gamma \text{grad}_p T$$

con K positivo. Se il solido è omogeneo, può anzi assumersi nello stato di riferimento $K = 1$.

Convieni dare forma molecolare anche alla (3.9). Se α^{-1} indica il tensore reciproco di α , in coordinate generali essa diviene

$$(3.10) \quad \mathbf{q} = -\Gamma K (\alpha^{-1})^{\lambda\mu} \frac{\partial T}{\partial z^\mu} \mathbf{a}_\lambda.$$

4. - Per completare le considerazioni sulla equazione del calore, non rimane che da precisare la forma della condizione al contorno (3.5). Questa, senza pregiudizio sulla scelta della espressione di \mathbf{q} in funzione di T , si può sempre scrivere nella forma

$$(4.1) \quad \frac{1}{q_0} A^{\lambda\mu} q_\lambda n_\mu^* = \frac{1}{q_0} \psi_n^*.$$

Il primo membro ha forma dimensionalmente invariante, ed altrettanto deve perciò accadere del secondo. Si ammette classicamente che, per ogni particella del contorno di S , ψ_n^* sia una funzione della differenza tra la temperatura attuale T della particella considerata ed una temperatura assegnata θ , che si riduca identicamente a zero per $T \equiv \theta$. Ma di più ammetto che ψ_n^* sia funzione soltanto di un ulteriore parametro dimensionale k . Questo non può essere dimensionalmente indipendente da \mathbf{q} e T , e perciò ψ_n^* deve avere la forma

$$(4.2) \quad \psi_n^* = -q_0 f_n \left(\frac{k}{q_0} (T - \theta); P_* \right).$$

ciò che precisa la (4.1) in

$$(4.3) \quad A^{\lambda\mu} q_\lambda n_\mu^* = -q_0 f_n \left(\frac{k}{q_0} (T - \theta); P_* \right).$$

5. — Convieni ormai che ci si avvii ad una trattazione dei problemi relativi a trasformazioni termoelastiche di solidi incomprimibili.

A questo scopo è necessario, innanzi tutto, limitare la scelta della configurazione di riferimento tra quelle che sono per S configurazioni di equilibrio spontaneo a temperatura uniforme. Occorre poi aggiungere alle equazioni (2.12) la condizione di incomprimibilità, che qui sarà assunta della forma

$$(5.1) \quad \mathfrak{D} = f(T; T_*; P_*)$$

con

$$(5.2) \quad f(T_*; T_*; P_*) \equiv 1.$$

L'intervento della condizione di incomprimibilità si manifesta già nella forma delle relazioni sforzi deformazione. Nel caso presente, indicando con $\tilde{\mathfrak{F}}$, funzione delle $\gamma_{\lambda\mu}$ e di T , il potenziale termodinamico (energia libera) di S , posto

$$(5.3) \quad \varphi^{\lambda\mu} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \tilde{\mathfrak{F}}}{\partial \gamma_{\lambda\mu}} + \frac{\partial \tilde{\mathfrak{F}}}{\partial \gamma_{\mu\lambda}} \right], \quad \mathfrak{D}^{\lambda\mu} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial \gamma_{\lambda\mu}} + \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial \gamma_{\mu\lambda}} \right] \quad (10),$$

avendosi ancora, in base ai due principi classici della termodinamica,

$$(5.4) \quad \varrho d\tilde{\mathfrak{F}} = -\varrho dl_i - \varrho s dT,$$

(10) È facile ottenere l'espressione esplicita delle $\mathfrak{D}^{\lambda\mu}$ in funzione delle $b_{\lambda\mu}$ [e perciò delle $\gamma_{\lambda\mu}$]. Dette $B^{\lambda\mu}$ le componenti del tensore complementare di \mathbf{b} , tale cioè che si abbia

$$b_{\lambda\sigma} B^{\lambda\sigma} = \delta_\lambda^\nu III_b = \delta_\lambda^\nu \mathfrak{D}^2$$

si ha infatti

$$2 \delta_\lambda^\nu \mathfrak{D} \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial b_{\lambda\mu}} = \delta_\lambda^\nu \mathfrak{D} \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial \gamma_{\lambda\mu}} = B^{\nu\mu}$$

e perciò

$$\mathfrak{D} \mathfrak{D}^{\lambda\mu} = B^{\lambda\mu}$$

con

$$B^{\lambda\mu} = (b^{-1})^{\mu\lambda} \mathfrak{D}^2.$$

insieme a [cfr. (5.1)]

$$(5.5) \quad \mathfrak{D}^{\lambda\mu} d\gamma_{\lambda\mu} = \frac{\partial f}{\partial T} dT$$

(ed a $\varrho dl_i = -t^{i\mu} d\gamma_{\lambda\mu}$), queste si scrivono

$$(5.6) \quad t^{i\mu} = \varrho \varphi^{\lambda\mu} - p \mathfrak{D}^{\lambda\mu},$$

dove p indica uno scalare atto da solo a rappresentare la reazione vincolare interna.

Alle (5.6) si aggiunge l'ulteriore relazione cfr. (5.4)

$$(5.7) \quad \varrho s = -\varrho \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial T} - p \frac{\partial f}{\partial T},$$

che permette di esprimere l'entropia s del sistema per unità di massa.

Il quadro completo delle equazioni che reggono i fenomeni qui presi in esame è dunque fornito dalle (5.1), (5.6), (5.7), (2.12) e dalle equazioni del calore. La (5.7) permette anzi di modificare un poco la (3.4) facendovi figurare \mathfrak{F} .

Basta infatti ricordare il significato del primo membro di tale equazione per riconoscere che il secondo membro coincide con $\varrho_* T ds/dt$. La (3.4) in base alla (5.7) si può dunque scrivere nella forma

$$(5.8) \quad (A^{\lambda\mu} q_\lambda)_{,\mu} = -T \frac{d}{dt} \left\{ \varrho_* \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial T} + p \mathfrak{D} \frac{\partial f}{\partial T} \right\}$$

Questa, insieme alla (3.5), completa il quadro delle equazioni fondamentali.

Un sistema S sarà detto termoeelasticamente isotropo quando, oltre ad essere termicamente isotropo [cfr. n. 3] per esso accade che \mathfrak{F} dipenda dalle $\gamma_{\lambda\mu}$ solo per il tramite degli invarianti principali di deformazione. La presenza del vincolo di incomprimibilità consente anzi di pensare ad una dipendenza di \mathfrak{F} solo dal primo e secondo invariante principale di $\boldsymbol{\gamma}$,

$$(5.9) \quad I_\gamma = \frac{1}{1!} a^{\lambda\mu} \gamma_{\lambda\mu}, \quad II_\gamma = \frac{1}{2!} [I_1^2 - a^{\lambda\sigma} a^{\mu\sigma} \gamma_{\lambda\mu} \gamma_{\sigma\sigma}],$$

od anche, ove ciò sia conveniente, dal primo e secondo invariante principale, \mathfrak{J}_1 e \mathfrak{J}_2 , del tensore \boldsymbol{b} , o da quelli $\bar{\mathfrak{J}}_1$ e $\bar{\mathfrak{J}}_2$, di \boldsymbol{a} .

6. - Per pervenire alle equazioni fondamentali delle trasformazioni termo-elastiche linearizzate di solidi incomprimibili non c'è ormai che da pensare lo spostamento \mathbf{s} e la temperatura T [nonchè la temperatura θ che figura nella (4.3) e le forze di massa e superficiali] funzioni regolari di un parametro ξ , con la sola condizione che al valore $\xi = 0$ corrisponda la configurazione di riferimento [e perciò $\mathbf{s} = 0$, $T = \theta = T^*$, $\rho \mathbf{F} = \mathbf{j} = 0$].

Poniamo poi

$$(6.1) \quad \left(\frac{\partial j}{\partial T} \right)_{\xi=0} = a, \quad \left(\frac{\partial^2 j}{\partial T^2} \right)_{\xi=0} = b.$$

e

$$(6.2) \quad \rho_* \left(\frac{\partial^2 \tilde{\mathcal{Y}}}{\partial T^2} \right)_{\xi=0} = -L_0, \quad \frac{1}{2} \rho_* \left(\frac{\partial^2 \tilde{\mathcal{Y}}}{\partial \gamma_{\lambda\mu} \partial T} + \frac{\partial^2 \tilde{\mathcal{Y}}}{\partial \gamma_{\mu\lambda} \partial T} \right)_{\xi=0} = -L^{\lambda\mu},$$

e, per un qualunque scalare o vettore Φ , adottiamo le notazioni

$$(6.3) \quad \Phi_0 = (\Phi)_{\xi=0}, \quad \Phi^{(n)} = \left(\frac{\partial^n \Phi}{\partial \xi^n} \right)_{\xi=0} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Osservando che è lecito assumere $\left(\frac{\partial \tilde{\mathcal{Y}}}{\partial T} \right)_{\xi=0} = 0$ e che è [cfr. (5.7)]

$$(6.4) \quad \rho_0 = \rho_*, \quad \rho^{(1)} = -\rho_* \mathfrak{D}^{(1)}, \quad \rho_* s_0 = -a p_0$$

si ha intanto dalla (5.7)

$$(6.5) \quad \rho_* s^{(1)} = L_0 T^{(1)} + L^{\lambda\mu} \gamma_{\lambda\mu}^{(1)} - p_0 b T^{(1)} - a p^{(1)} - a p_0 \mathfrak{D}^{(1)}.$$

Occorre poi far riferimento alle equazioni in forma molecolare. Dalla (5.8), tenendo presente che è $\mathbf{q}_0 = 0$ e $A^{\lambda\mu} = a^{\lambda\mu}$, si ottiene così

$$(6.6) \quad -\operatorname{div}_{r_*} \mathbf{q}^{(1)} = T_* \left\{ (L_0 - b p_0) \frac{\partial T^{(1)}}{\partial t} + L_{\lambda\mu} \frac{\partial \gamma_{\lambda\mu}^{(1)}}{\partial t} - a \frac{\partial p^{(1)}}{\partial t} - a p_0 \frac{\partial \mathfrak{D}^{(1)}}{\partial t} \right\},$$

che va completata con la condizione al contorno

$$(6.7) \quad \mathbf{q}^{(1)} \times \mathbf{n}_* = -k_0 [T^{(1)} - \theta^{(1)}]$$

e dalla relazione tra $\mathbf{q}^{(1)}$ e $T^{(1)}$. Assumendo la (3.9) si ottiene per essa

$$(6.8) \quad \mathbf{q}^{(1)} = -\Gamma_0 \text{grad } T^{(1)}.$$

Le equazioni del calore, pertanto, non differiscono dalla forma classica che per la presenza dei termini bp_0 , ap_0 e $ap^{(1)}$ nella (6.6) dovuti al vincolo di incompressibilità. Quest'ultimo attualmente si riduce a

$$(6.9) \quad \mathfrak{D}^{(1)} \equiv \text{div } \mathbf{s}^{(1)} = aT^{(1)}.$$

Passando poi alla (5.3), basta tener presente la (2.11) per ottenere

$$(6.10) \quad K^{(1)\mu\lambda} = \mathfrak{D}^{(1)} t_0^{\mu\lambda} + s^{(1)\mu} |_{\rho} t_0^{\rho\lambda} + t^{(1)\mu\lambda}$$

con [cfr. (5.6) e (6.4)_{1,2}]

$$(6.11) \quad \begin{aligned} t_0^{\lambda\mu} &= \varrho_* \varphi_0^{\lambda\mu} - p_0 a^{\lambda\mu}, \\ t^{(1)\lambda\mu} &= \varrho_* \varphi^{(1)\lambda\mu} - \varrho_* \mathfrak{D}^{(1)} \varphi_0^{\lambda\mu} - p^{(1)} a^{\lambda\mu} - p_0 \mathfrak{D}^{(1)\lambda\mu}. \end{aligned}$$

D'altro canto si ha (cfr. nota ⁽¹⁰⁾)

$$(6.12) \quad \mathfrak{D}^{(1)\lambda\mu} = B^{(1)\lambda\mu} - a^{\lambda\mu} \mathfrak{D}^{(1)} = a^{\lambda\mu} \mathfrak{D}^{(1)} - 2 \gamma^{(1)\lambda\mu},$$

onde si ottiene

$$(6.13) \quad K^{(1)\lambda\mu} = -p^{(1)} a^{\lambda\mu} + \varrho_* \varphi^{(1)\lambda\mu} - 2 p_0 \mathfrak{D}^{(1)} a^{\lambda\mu} + 2 p_0 \gamma^{(1)\lambda\mu} + s^{(1)\mu} |_{\rho} t_0^{\rho\lambda},$$

cioè, posto

$$(6.14) \quad k^{\mu\lambda} = -\varrho_* \varphi^{(1)\lambda\mu} + 2 p_0 \mathfrak{D}^{(1)} a^{\lambda\mu} - 2 p_0 \gamma^{(1)\lambda\mu} - s^{(1)\mu} |_{\rho} t_0^{\rho\lambda},$$

$$(6.15) \quad K^{(1)\mu\lambda} = -p^{(1)} a^{\lambda\mu} - k^{\mu\lambda}.$$

Con tali notazioni, le equazioni di Cauchy linearizzate divengono

$$(6.16) \quad \begin{aligned} p^{(1)} |_{\mu} a^{\lambda\mu} + k^{\lambda\mu} |_{\mu} &= \varrho_* F^{\lambda} \quad \dots \quad C_* , \\ p^{(1)} n_*^{\lambda} + k^{\lambda\mu} n_{\mu}^* &= f^{\lambda} \quad \dots \quad \Sigma_* . \end{aligned}$$

7. - In questo, e nel n. seguente, ci si occuperà di trasformazioni linearizzate di solidi omogenei e isotropi. Per semplificare le notazioni si porrà, ormai senza pericolo di equivoci

$$(7.1) \quad \begin{aligned} \mathbf{s}^{(1)} &= \mathbf{u}, \quad \gamma^{(1)\lambda\mu} = e^{\lambda\mu}, \quad p^{(1)} = q, \quad t^{(1)\lambda\mu} = \sigma^{\lambda\mu}, \\ T^{(1)} &= (T - T_*)^{(1)} = \tau, \quad \theta^{(1)} = (\theta - T_*)^{(1)} = \vartheta. \end{aligned}$$

Tenendo conto che l'ipotesi di isotropia si traduce in una dipendenza di \mathfrak{F} dalla deformazione per il tramite dei soli invarianti, I_γ e II_γ [cfr. (5.9)], si ottiene intanto

$$(7.2) \quad L^{\lambda\mu} = -\varrho_* \left(\frac{\partial^2 \mathfrak{F}}{\partial I_\gamma \partial T} \right)_{\xi=0} a^{\lambda\mu} = L a^{\lambda\mu},$$

onde, posto

$$(7.3) \quad L_0 - b p_0 = c,$$

le equazioni del calore divengono

$$(7.4) \quad \begin{aligned} (\Gamma_0/T_*) \Delta_2 \tau &= (L - a p_0) \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{u} + c \frac{\partial \tau}{\partial t} - a \frac{\partial q}{\partial t}, \quad \dots C_* \\ \mathbf{n}_* \times \operatorname{grad} \tau &= h (\tau - \vartheta), \quad (h = k_0/\Gamma_0), \quad \dots \Sigma_* . \end{aligned}$$

Passando alla (6.14), si osservi che ora, mentre, per essere $t_0^{\lambda\mu} = 0$, $K^{(1)\lambda\mu}$ coincide con $\sigma^{\lambda\mu}$, si ha

$$\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \gamma_{\lambda\mu}} = \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial I_\gamma} a^{\lambda\mu} + \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial II_\gamma} I_\gamma a^{\lambda\mu} - \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial III_\gamma} \gamma^{\lambda\mu}$$

e perciò

$$(7.5) \quad \varphi^{(1)\lambda\mu} = a^{\lambda\mu} \left[\left(\frac{\partial^2 \mathfrak{F}}{\partial I_\gamma^2} \right)_0 + \left(\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial III_\gamma} \right)_0 \right] I_\gamma^{(1)} + a^{\lambda\mu} \left(\frac{\partial^2 \mathfrak{F}}{\partial T \partial I_\gamma} \right)_0 \tau - \left(\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial III_\gamma} \right)_0 e^{\lambda\mu},$$

onde, posto

$$(7.6) \quad \lambda_x = -2p_0 + \varrho_* \left[\left(\frac{\partial^2 \mathfrak{F}}{\partial I_\gamma^2} \right)_0 + \left(\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial III_\gamma} \right)_0 \right], \quad 2\mu_x = 2p_0 - \varrho_* \left(\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial III_\gamma} \right)_0,$$

si ottiene

$$(7.7) \quad k^{\lambda\mu} = -q a^{\lambda\mu} + \lambda_T a^{\lambda\mu} \operatorname{div} \mathbf{u} + 2 \mu_T e^{\lambda\mu} - L a^{\lambda\mu} \tau$$

e la (6.16)₁ diviene

$$(7.8) \quad -\operatorname{grad} q + (\lambda_T + \mu_T) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} - L \operatorname{grad} \tau + \mu_T \Delta_2 \mathbf{u} + \varrho_* \mathbf{F} = 0.$$

Osservazione: Basta porre

$$(7.9) \quad \Phi = \frac{1}{2} (\lambda_T + 2\mu_T) I_e^2 - 2 \mu_T II_e + LI_e \tau + \Phi_0(\tau)$$

perchè subito si abbia

$$k^{\lambda\mu} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial e_{\lambda\mu}} + \frac{\partial \Phi}{\partial e_{\mu\lambda}} \right).$$

Si può aggiungere l'osservazione che la condizione di stabilità nella configurazione di equilibrio impone a μ_T di essere positiva.

8. - Nel caso di problemi stazionari, la (7.4) si riduce a

$$(8.1) \quad \begin{aligned} \Delta_2 \tau &= 0 \quad \dots \quad C_* \\ \mu_* \times \operatorname{grad} \tau &= h(\tau - \vartheta) \quad \dots \quad \Sigma_*, \end{aligned}$$

onde il problema termico, almeno nell'ambito della linearizzazione, può essere risolto indipendentemente da quello elastico. Una volta stabilita la forma di τ in tutto C_* subordinatamente alle condizioni al contorno, per determinare le ulteriori incognite \mathbf{u} e q in assenza di forze di massa rimangono le equazioni [cfr. (6.9) e (7.8)]

$$(8.2) \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = a\tau \quad \dots \quad C_*$$

$$(8.3) \quad \operatorname{grad} (q + L\tau) - (\lambda_T + \mu_T) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} - \mu_T \Delta_2 \mathbf{u} = 0 \quad \dots \quad C_*$$

con le relative condizioni al contorno.

Si può subito osservare che, nelle condizioni attuali, q deve essere una funzione armonica. In tale evenienza sembra utile ricorrere alle funzioni potenziali per precisare la forma generale di ogni soluzione delle (8.2) e (8.3).

Nel caso elastico isoterma comprimibile $[\tau \equiv q \equiv 0]$, NEUBER e PAPKOVITCH⁽¹¹⁾ hanno assegnato la forma di una classe di integrali della (8.3) in funzione di quattro potenziali scalari. La completezza di tale classe è stata dimostrata da MINDLIN⁽¹²⁾ e poi da SOKOLNIKOFF⁽¹³⁾. Tale rappresentazione si estende agevolmente al caso di solidi termoelastici comprimibili⁽¹⁴⁾. Qui si perverrà ad un analogo risultato anche nel caso, da noi esaminato, di solidi termoelastici incomprimibili.

Sia Φ_0 soluzione dell'equazione

$$(8.4) \quad \Delta_2 \Phi_0 = a\tau,$$

ed ω un vettore armonico in tutto C_* . È facile constatare direttamente che il vettore

$$(8.5) \quad \mathbf{u} = \text{grad} \left\{ \Phi_0 - \frac{1}{2} \omega \times (P_* - O) \right\} + \omega.$$

(O punto arbitrario fisso) e lo scalare

$$(8.6) \quad q = [\lambda_T + 2\mu_T - Lja] \Delta_2 \Phi_0 - \mu_T \text{div } \omega,$$

sono soluzioni della (8.3) e (8.2).

Si ha infatti identicamente

$$(8.7) \quad \text{div } \mathbf{u} = \Delta_2 \Phi_0 = a\tau$$

e, tenuto conto di (8.4),

$$(8.8) \quad \text{grad } (q + L\tau) = \left\{ (\lambda_T + \mu_T) \Delta_2 \Phi_0 + \mu_T (\Delta_2 \Phi_0 - \text{div } \omega) \right\}.$$

⁽¹¹⁾ H. NEUBER: *Ein neuer Ansatz zur Lösung räumliche Probleme der Elastizitätstheorie*, ZAMM, **14**, (1934), 203; P. F. PAPKOVICH: *Solution générale des équations différentielles fondamentales d'élasticité exprimée par trois fonctions harmoniques*, C. R. Ac. Sc. Paris **195**, (1932), 513.

⁽¹²⁾ R. MINDLIN: *Note on the Galerkin and Papkovitch stress functions*, Bull. Amer. Math. Soc. **42**, (1936), 373-376.

⁽¹³⁾ I. S. SOKOLNIKOFF: *Mathematical theory of elasticity*, 2^a ed., New York, 1956 Cap. VI.

⁽¹⁴⁾ E. STERNBERG, L. MC DOWELL: *On the steady state thermoelastic problem for the half-space*, Q. Appl. Math. **14**, (1957), 381-398.

Basta allora ricorrere alla (8.7) ed osservare che si ha

$$\Delta_2 \mathbf{u} = \text{grad} \left\{ \Phi_0 - \frac{1}{2} \Delta_2 [\boldsymbol{\omega} \times (P_* - O)] \right\} = \text{grad} \{ \Delta_2 \Phi_0 - \text{div } \boldsymbol{\omega} \}.$$

per arrivare alla conclusione voluta.

Si prova però anche che, viceversa, ogni soluzione del problema termoelastico stazionario linearizzato ha necessariamente la forma (8.5), (8.6).

Sia infatti \mathbf{u}_0 , q_0 una soluzione delle equazioni (8.2), (8.3) corrispondenti ad una determinazione τ_0 di τ . Una prima conseguenza di (8.3) è che esiste una funzione ψ , determinata a meno di una costante, tale che è

$$(8.9) \quad \Delta_2 \mathbf{u}_0 = \text{grad } \psi.$$

Ne segue che, indicando con Φ una soluzione di

$$(8.10) \quad \Delta_2 \Phi = \psi,$$

deve essere

$$(8.11) \quad \mathbf{u}_0 = \text{grad } \Phi + \boldsymbol{\omega},$$

con $\Delta_2 \boldsymbol{\omega} = 0$.

Dopo questo, la (8.2) può tradursi in

$$(8.12) \quad a\tau_0 = \Delta_2 \Phi + \text{div } \boldsymbol{\omega}$$

e poichè è $\text{div } \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \Delta_2 [\boldsymbol{\omega} \times (P_* - O)]$ questa può anche scriversi

$$(8.13) \quad a\tau_0 = \Delta_2 \left\{ \Phi + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \times (P_* - O) \right\},$$

la quale implica la condizione che

$$(8.14) \quad \Phi_0 = \Phi + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \times (P_* - O)$$

sia soluzione di

$$(8.15) \quad \Delta_2 \Phi_0 = a\tau,$$

mentre la (8.11) si scrive nella forma voluta

$$(8.16) \quad \mathbf{u}_0 = \text{grad} \left\{ \Phi_0 - \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \times (P_* - 0) \right\} + \boldsymbol{\omega}.$$

Tornando alla (8.3) si ha dunque ormai

$$(8.17) \quad 0 = \text{grad} \{ q_0 + L\tau_0 - (\lambda_T + \mu_T) (\Delta_2 \Phi + \text{div } \boldsymbol{\omega}) - \mu_T \Delta_2 \Phi \},$$

onde, disponendo della costante arbitraria contenuta in ψ , e quindi in $\Delta_2 \Phi$, si può scrivere

$$(8.18) \quad q_0 = [\lambda_T + 2\mu_T - L/a] \Delta_2 \Phi_0 - \mu_T \text{div } \boldsymbol{\omega}.$$

9. - La rappresentazione di ogni soluzione delle equazioni della termoelasticità di solidi incomprimibili, di cui si è mostrata la completa validità nel n. precedente, lascia una certa arbitrarietà nella scelta del vettore $\boldsymbol{\omega}$. È naturale chiedersi se per caso non si possa far dipendere la suddetta rappresentazione da meno di quattro funzioni potenziali, assumendone qualcuna identicamente nulla, pur senza alterare la generalità.

Essendo Φ_0 soluzione di una equazione di Poisson, non è questione se la si possa assumere identicamente nulla. Invece, si può mostrare immediatamente che un teorema sull'argomento di EUBANKS e STERNBERG⁽¹⁵⁾, valido, sotto ipotesi molto ampie, per le trasformazioni linearizzate di solidi comprimibili, si adatta anche al caso di solidi incomprimibili, onde è sempre lecito, anche in questo ultimo caso, assumere identicamente nulla una delle componenti di $\boldsymbol{\omega}$.

Naturalmente, nel caso di problemi dotati di particolari simmetrie si può pervenire ad una ulteriore riduzione nel numero delle funzioni potenziali. Ad es. nel caso di problemi a simmetria cilindrica intorno ad una asse Ok , è lecito assumere

$$(9.1) \quad \boldsymbol{\omega} = \omega k, \quad \Delta_2 \omega = 0.$$

e nei problemi a simmetria sferica si può assumere addirittura $\boldsymbol{\omega} = 0$, ritrovando così la classe di soluzioni stabilita da GOODIER⁽¹⁶⁾.

⁽¹⁵⁾ R. A. EUBANKS, E. STERNBERG: *On the completeness of the Boussinesq-Papkovich stress function*, J. Rat. Mech. An. 5, (1956), 735-746.

⁽¹⁶⁾ J. N. GOODIER: *On the integration of the thermo-elastic equations*, Phil. Mag. 23, (1937), 1017-1032.

10. Torniamo ora alle trasformazioni finite.

Come si vede dal quadro delle equazioni fondamentali [cfr. n. 3 e 5] la risoluzione di un qualunque problema effettivo certamente richiede la preventiva conoscenza della forma del coefficiente di conducibilità interna K e della funzione $f(T)$ che figura nella condizione di incomprimibilità; oltre che, ben si intende, della struttura del potenziale termodinamico. Non è quindi il caso di pensare ad una soluzione completa, ma, anche per precisare il tipo delle difficoltà cui si va incontro in tale ordine di questioni, sembra non inutile applicare ad un esempio concreto e semplice le considerazioni generali svolte nei n. precedenti.

Suppongo che in C il solido omogeneo e isotropo, si riduca ad un cilindro cavo, \mathcal{C} , di altezza l , e di raggio, interno r_1 e esterno r_2 , di cui la superficie interna ω_1 è tenuta a temperatura costante T_1 e quella esterna ad una temperatura costante $T_2 \neq T_1$, mentre le due basi, σ_0 e σ_1 sono impermeabili al calore.

Assunta l'origine di una terna cartesiana $O \mathbf{c}_1 \mathbf{c}_2 \mathbf{c}_3$ nel centro 0 di σ_0 , con $O \mathbf{c}_3$ perpendicolare a σ_0 e diretto verso l'altra base, indico con

$$(10.1) \quad r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \quad \vartheta = \operatorname{arctg} \frac{x_2}{x_1}, \quad z = x_3$$

le coordinate cilindriche di un punto P di \mathcal{C} , e con

$$(10.2) \quad R = \sqrt{y_1^2 + y_2^2}, \quad \theta = \arct \frac{y_2}{y_1}, \quad Z = y_3,$$

quelle del punto corrispondente P_* in C_* . Al tempo stesso, si fanno coincidere le coordinate z^λ con r, ϑ e z , di modo che è, con le notazioni sempre adottate

$$(10.3) \quad b_{11} = b_{33} = 1, \quad b_{22} = r^2, \quad b_{\lambda\mu} = 0, \quad (\lambda \neq \mu).$$

Mi propongo di determinare se sia possibile una trasformazione termoelastica stazionaria definita, con riguardo alla trasformazione inversa, da

$$(10.4) \quad R = F(r) \quad \theta = \vartheta - \frac{\alpha}{l} z, \quad Z = h(z)$$

(α costante positiva)

cui si accompagni una distribuzione di temperatura funzione solo di r ,

$$(10.5) \quad T = T(r),$$

in assenza di forze di massa, ma senza escludere che la funzione K che figura nella (3.9) possa anche dipendere dal tensore di deformazione.

Se la trasformazione (10.4) è possibile, \mathcal{C} in C_* è ancora un cilindro cavo di cui sarà indicata con L l'altezza, R_1 ed R_2 i raggi interno e esterno, ponendo cioè

$$(10.6) \quad R_i = F(r_i), \quad (r = 1, 2), \quad L = h(l).$$

Non è neanche restrittivo, in tal caso, supporre

$$(10.7) \quad F'(r) > 0, \quad h'(z) > 0, \quad h(0) = 0.$$

11. - Le (10.4) forniscono, per l'elemento d'arco ds_* in C_* , l'espressione

$$(11.1) \quad ds_*^2 = F'^2 dr^2 + F^2 d\vartheta^2 + \left[h'^2 + F^2 \frac{\alpha^2}{l^2} \right] dz^2 - 2 \frac{\alpha}{l} F^2 d\vartheta dz,$$

onde, per le $a_{i\mu}$ si ottiene

$$(11.2) \quad \begin{aligned} a_{11} &= F'^2, \quad a_{22} = F^2, \quad a_{33} = h'^2 + F^2 \alpha^2/l^2, \\ a_{12} &= a_{13} = 0, \quad a_{23} = -\alpha F^2/l. \end{aligned}$$

Occorre innanzi tutto soddisfare alla condizione di incomprimibilità che, per essere [cfr. (2.4)]

$$\det \| a_{i\mu} \| = \frac{1}{\mathfrak{D}^2} \det \| b_{i\mu} \|$$

si scrive ora

$$(11.3) \quad F^2 F'^2 h'^2 = r^2/f^2(T)$$

Questa, per l'ipotesi [cfr. (10.5)] che T sia funzione solo di r , implica immediatamente che debba essere

$$(11.4) \quad h'^2(z) = \lambda^4, \quad F^2(r) F'^2(r) = \lambda^{-4} r^2/f^2(T),$$

con λ costante. La (10.7) precisa poi per h l'espressione

$$(11.5) \quad h = \lambda^2 z \quad (\lambda^2 > 0).$$

In queste condizioni il coefficiente di conducibilità interna si riduce ad una funzione della sola r , oltre che per il tramite di T , anche attraverso F e F' , onde l'equazione del calore si riduce a

$$(11.6) \quad rK(T, F^2, F'^2) \frac{dT}{dr} = H, \quad (H \text{ costante})$$

$$(11.7) \quad T(r_1) = T_1, \quad T(r_2) = T_2.$$

Il problema è dunque ricondotto a quello di accertare se il sistema (11.4)₂, (10.6)_{1,2} e (11.6), (11.7) nelle funzioni incognite $F(r)$ e $T(r)$ ammette soluzioni.

La (11.4)₂ mentre implica che F' è sempre diversa da zero, e perciò [cfr. (10.7)] positiva, permette di porre la (11.6) nella forma

$$(11.8) \quad rK(T, F^2, \lambda^{-4} r^2/F^2 f^2) \frac{dT}{dr} = H$$

$$T(r_1) = T_1, \quad T(r_2) = T_2,$$

con

$$(11.9) \quad F^2 = R_1^2 + 2\lambda^{-2} \int_{r_1}^r \xi d\xi / f(T(\xi)),$$

ed a ridurla quindi ad una equazione nella sola funzione incognita T . Ove si riesca a dimostrare che il sistema (11.8) possiede una soluzione, e se ne possa dare la forma esplicita, la (11.9) fornisce subito F^2 e la trasformazione risulta completamente precisata.

Senza necessità di entrare in merito al difficile problema della scelta della forma di K , un semplice ragionamento prova che il problema ai limiti (11.8)_{1,2} ammette una ed una sola soluzione.

Per semplicità di notazione, poniamo

$$(11.10) \quad (dT/dr)_{r=r_1} = m.$$

La condizione $T(r_1) = T_1$ dà allora per H

$$(11.11) \quad H = r_1 K_1 m, \quad [K_1 = K(T_1, R_1^2, \lambda^{-4} r_1^2/R_1^2 f^2(T_1))],$$

onde H ha il segno di m . Sia ad es. $m \geq 0$, e perciò H non negativa. La (11.8)_{1,2} mostra allora che ogni soluzione $T(r, m)$ è funzione sempre non decrescente

di r , $r_1 \leq r \leq r_2$. Inoltre, sotto ipotesi molto late per K , $T(r, m)$, e quindi in particolare $T(r_2, m)$, è funzione continua di m , e siccome per $T_1 = T_2$ la (11.8) è manifestamente soddisfatta da $T \equiv T_1$ corrispondente ad $H = 0$, nè può ammettere altre soluzioni ⁽¹⁷⁾, si ha $\lim_{m \rightarrow 0} T(r_2, m) = T_1$ mentre è $T(r_2, m) > T_1$ per ogni $m > 0$. Per mostrare allora che, fissata comunque $T_2 > T_1$ esiste almeno un valore di m cui corrisponde una soluzione T di (11.8)_{1,2} basterà provare che, al variare di m tra zero e $+\infty$, $T(r_2, m)$ assume ogni valore compreso tra T_1 e $+\infty$.

Supponiamo per assurdo che $T(r, m)$ rimanga limitata per ogni valore di m tra zero e $+\infty$. Esiste allora una costante $\bar{K} > 0$ tale che, per tutti i valori di m , $0 \leq m < +\infty$, e per r compreso tra r_1 e r_2 , è

$$(11.12) \quad 0 < K \leq \bar{K}.$$

Se ne ricava perciò $dT/dr \geq r_1 K_1 m/r \bar{K}$ cioè

$$(11.13) \quad T - T_1 \geq \frac{r_1 K_1 m}{K} \log r/r_1,$$

e in particolare

$$(11.14) \quad T(r_2) - T_1 \geq \frac{r_1 K}{K} m \log(r_2/r_1),$$

in contrasto con l'ipotesi.

Supponiamo adesso che, fissata comunque $T_2 > T_1$, esistano due soluzioni T' e T'' di (11.8)_{1,2} e indichiamo con m' e m'' i corrispondenti valori di m , supponendo ad es. $m' < m''$.

Poichè deve essere $T'(r_2, m') = T''(r_2, m'')$, deve esistere almeno un valore r_0 di r , $r_1 < r_0 \leq r_2$ nel quale è $T'(r_0) = T''(r_0)$ con $(dT'/dr)_{r=r_0} \geq (dT''/dr)_{r=r_0}$.

Ora in tale punto è per la (11.8)

$$r_0 K_0 (dT'/dr)_{r=r_0} = r_1 K_1 m', \quad r_0 K_0 (dT''/dr)_{r=r_0} = r_1 K_1 m''$$

con $K_0 = (K)_{r=r_0}$, e perciò $(dT'/dr)_{r=r_0} < (dT''/dr)_{r=r_0}$ contro l'ipotesi. Ciò che completa la dimostrazione dell'esistenza di una ed una sola soluzione di (11.8)_{1,2}.

Osservazione: quando $C \rightarrow C_*$, mentre T_1 e T_2 debbono tendere a coincidere con T_* e K tende ad uno [cfr. (3.9)], la (11.8) mostra, per le considerazioni poco sopra svolte, che T tende, come deve, a T_* .

⁽¹⁷⁾ Si ricordi che ogni soluzione della (11.8) è monotona.

12. — Rimane ormai solo da soddisfare alle equazioni indefinite di equilibrio, e da precisare le forze superficiali esterne e le reazioni vincolari interne nella configurazione di equilibrio forzato C. Detta Φ^2 la funzione a secondo membro di (11.9), le (11.2) si precisano in

$$(12.1) \quad a_{11} = \Phi'^2, \quad a_{22} = \Phi^2, \quad a_{33} = \lambda^4 + \alpha^2 \Phi^2/l^2, \quad a_{23} = -\alpha \Phi^2/l.$$

Tenendo presente poi che, per la supposta isotropia, $\bar{\mathfrak{F}}$ può intendersi dipendente dalle $\gamma_{\lambda\mu}$ solo per il tramite di \mathfrak{J}_1 e \mathfrak{J}_2 , si ottiene agevolmente per le caratteristiche di tensione

$$(12.2) \quad t^{\lambda\mu} + \bar{p} b^{\lambda\mu} = 2\varrho \frac{\partial \bar{\mathfrak{F}}}{\partial \mathfrak{J}_1} a^{\lambda\mu} + 2\varrho \frac{\partial \bar{\mathfrak{F}}}{\partial \mathfrak{J}_2} \{ \mathfrak{J}_1 a^{\lambda\mu} - a^{i\varrho} a^{\mu\sigma} b_{\varrho\sigma} \},$$

con

$$(12.3) \quad \bar{p} = 2p\mathfrak{D}.$$

Tenendo presente che le coordinate sono ortogonali, e le espressioni delle $a^{\lambda\mu}$ (12.1), si ottiene subito intanto

$$(12.4) \quad t^{12} = t^{13} = 0$$

ed inoltre che t^{23} non può dipendere che da r . Ciò riduce le equazioni indefinite di equilibrio a

$$(12.5) \quad \frac{\partial t^{11}}{\partial r} + \frac{1}{r} t^{11} - r t^{22} = 0, \quad \frac{\partial t^{22}}{\partial \vartheta} = 0, \quad \frac{\partial t^{33}}{\partial z} = 0.$$

Si osservi ora che, dipendendo le $a^{\lambda\mu}$, come \mathfrak{D} e perciò ϱ , solo da r , le $t^{\lambda\mu}$ possono essere funzioni di ϑ e z al più per il tramite di \bar{p} . Ma le (12.5)_{2,3} importano $\frac{\partial \bar{p}}{\partial \vartheta} = \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} = 0$ e perciò che anche \bar{p} sia funzione, al più, di r . Con ciò, tutte le caratteristiche di tensione non nulle si riducono a funzioni solo di r , e la (12.5)₁ permette di determinare la forma di \bar{p} . Precisamente, posto per semplicità di notazioni

$$(12.6) \quad \tau^{\lambda\mu} \equiv t^{\lambda\mu} + \bar{p} b^{\lambda\mu} = 2\varrho \frac{\partial \bar{\mathfrak{F}}}{\partial \mathfrak{J}_1} a^{\lambda\mu} + 2\varrho \frac{\partial \bar{\mathfrak{F}}}{\partial \mathfrak{J}_2} \{ \mathfrak{J}_1 a^{\lambda\mu} - a^{i\varrho} a^{\mu\sigma} b_{\varrho\sigma} \},$$

si ottiene

$$(12.7) \quad \bar{p} = \tau^{11} - \int_{r_1}^r (\xi \tau^{22} - \tau^{11}/\xi) d\xi + p_0.$$

Questa, ad es. mostra che, pur di scegliere

$$(12.8) \quad p_0 = \int_{r_1}^{r_2} (\xi \tau^{22} - \tau^{11}/\xi) d\xi$$

la superficie laterale esterna ω_2 risulta esente da forze superficiali. Invece la superficie laterale interna ω_1 è sollecitata da una pressione uniforme $p_1 = -p_0$.

Le (12.2), subordinatamente a (12.7), permettono di precisare le espressioni di t^{23} e t^{33} , e quindi di calcolare gli sforzi superficiali che devono intendersi applicati alle basi di \mathcal{C} per rendere la configurazione di equilibrio C possibile. Ma qui non ci tratteremo più oltre su questo calcolo che ormai non offre difficoltà.