Riv. Mat. Univ. Parma (2) 1 (1960), 171-184

GIANFRANCO PANELLA (*)

Le collineazioni nei piani di Marshall Hall. (**)

Scopo del presente lavoro è lo studio del gruppo delle collineazioni di un piano di HALL $\pi(K, p, q)$ relativo al quasicorpo di HALL $J(K, p, q)$ costruito a partire da un campo K e dal polinomio $x^2 - px - q$ con coefficienti in K e irriducibile su K. D. R. HUGHES (1) [1] ha, recentemente, stabilito alcuni risultati relativi a questo argomento: riprendo la discussione per mostrare che, anche nel caso di un piano finito, il gruppo di collineazioni di $\pi(K, p, q)$ determinato da HUGHES non sempre esaurisce il gruppo di collineazioni spettante al piano; inoltre, estendo l'indagine a quei piani di HALL che sono costruiti a partire da un campo K infinito ma non isomorfo a un suo sottocampo proprio.

Inizio l'esposizione (n. 1) richiamando alcuni risultati di D. R. HUGHES e, successivamente (n. 2), trasportandoli ad un modello del piano $\pi(K, p, q)$ introdotto in [2]; modifico, in relazione a tale modello, rispetto a quanto detto in [2], solamente il simbolismo, per renderlo più adatto a una risoluzione snella del problema che mi sono proposto.

Entrando nel vivo dell'argomento, determino (n. 3) un gruppo G di collineazioni di un piano di HALL $\pi(K, p, q)$ e provo, (n. 4), che se il campo K possiede solamente automorfismi che lasciano fissi i suoi elementi p e q, il gruppo G coincide col gruppo di collineazioni di $\pi(K, p, q)$ determinato da D. R. HUGHES.

Proseguendo (n. 5), mostro con un esempio che, se esistono automorfismi di K che non mantengono fissi gli elementi p e q, può accadere che, oltre alle collineazioni di $\pi(K,p,q)$ appartenenti al gruppo delle collineazioni di tale piano

---

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università, Parma, Italia.

(**) Ricevuto il 1-9-1960.

(1) I numeri in neretto e tra parentesi quadre si riferiscono alla Bibliografia posta al termine del lavoro.

determinato da D. R. HUGHES, esistano in G delle collineazioni che non appartengono a quel gruppo. Concludo la discussione, (n. 6), con la completa determinazione del gruppo delle collineazioni del piano di HALL $\pi(K, p, q)$ relativo a un campo K che abbia almeno quattro elementi e che non sia isomorfo ad un suo sottocampo proprio: il risultato ottenuto è enunciato a chiusura del lavoro.

1. – Seguendo lo schema tracciato nell'introduzione, inizio col riassumere la definizione di piano di Hall e col ricordare i sottogruppi di collineazioni ad esso spettanti, secondo quanto è stabilito in [1].

A tal fine, definisco ([1]; p. 923) quasicorpo di HALL $J(K, p, q)$ relativo a un campo (corpo commutativo) $K \neq GF(2)$ e al polinomio $x^2 - px - q$ con coefficienti in K e irriducibile sopra K, l'insieme che ha elementi del tipo $\lambda a + b$ (a e b sono elementi di K e λ è simbolo; si considera $\lambda a + b = \lambda c + d$ se, e solamente se, $a = c$ e $b = d$) quando in esso si operi con le seguenti regole di

somma: $\quad (\lambda a + b) + (\lambda c + d) = \lambda(a + c) + (b + d)$

e *prodotto*: $(\lambda 0 + b)(\lambda c + d) = \lambda(bc) + (bd)$

$$(\lambda a + b)(\lambda c + d) = \lambda(ad + pc - bc) + bd - a^{-1}c(b^2 - pb - q), \quad (a \neq 0).$$

Discende, facilmente, dalla precedente definizione che $J(K, p, q)$ possiede un sottocampo, isomorfo al campo K, costituito dai suoi elementi del tipo $\lambda 0 + a$: un elemento di questo tipo lo diremo, in seguito, e la dizione è esatta a meno di un isomorfismo, elemento del campo K. Con tale convenzione avrà senso, ad es., la frase « prodotto di un elemento di K per un elemento di $J(K, p, q)$ »: essa starà a significare il prodotto di un elemento $\lambda 0 + a$ di $J(K, p, q)$ per un qualunque elemento di $J(K, p, q)$.

Ciò posto, si definisce piano di HALL ([1]; p. 922) inerente al quasicorpo $J(K, p, q)$ l'insieme $\pi(K, p, q)$ che ha per « punti » i simboli (x, y), (x) e (∞) e per rette i simboli $[m, k]$, $[\infty, (k, 0)]$, L_∞ (ove x, y, m, k sono elementi di $J(K, p, q)$ comunque scelti e ∞ è un simbolo) quando, in $\pi(K, p, q)$, le condizioni di incidenza si definiscono alla seguente maniera:

$$(x, y) \in [m, k] \longleftrightarrow mx + y = k,$$

$$(x) \in [m, k] \longleftrightarrow x = m,$$

$$(\infty) \notin [m, k],$$

$$(x, y) \in [\infty, (k, 0)] \longleftrightarrow x = k,$$

$(x) \notin [\infty, (k, 0)]$,

$(\infty) \in [\infty, (k, 0)]$ comunque sia scelto k in $J(K, p, q)$,

$(x, y) \notin L_\infty$,

$(x) \in L_\infty$ comunque sia scelto x in $J(K, p, q)$,

$(\infty) \in L_\infty$.

Ricordo, ancora, che una collineazione del piano $\pi(K, p, q)$ è una corrispondenza biunivoca tra i suoi punti, biunivoca tra le sue rette, che muta punti appartenenti a una retta di $\pi(K, p, q)$ in punti appartenenti alla retta corrispondente di quella, e viceversa. D. R. Hughes ([1]; pp. 924-925) ha stabilito l'esistenza dei seguenti insiemi di collineazioni del piano $\pi(K, p, q)$:

(1.1) *Gruppo delle traslazioni.*

Per ogni scelta degli elementi a, b di $J(K, p, q)$, si definisce una traslazione di $\pi(K, p, q)$ ponendo:

$$(x, y) \to (x + a, y + b) \qquad [m, k] \to [m, k + ma + b]$$
$$(x) \to (x) \qquad [\infty, (k, 0)] \to [\infty, (k + a, 0)]$$
$$(\infty) \to (\infty) \qquad L_\infty \to L_\infty .$$

(1.2) *Gruppo degli automorfismi.*

Detto α un automorfismo di K per il quale $\alpha(p) = p$ e $\alpha(q) = q$, si definisce α su $J(K, p, q)$ ponendo $\alpha(\lambda x + y) = \lambda\alpha(x) + \alpha(y)\,[\lambda x + y \in J(K, p, q)]$. L'automorfismo di $\pi(K, p, q)$ inerente all'automorfismo α di K è la collineazione di $\pi(K, p, q)$ definita nel seguente modo:

$$(x, y) \to (\alpha(x), \alpha(y)) \qquad [m, k] \to [\alpha(m), \alpha(k)]$$
$$(x) \to (\alpha(x)) \qquad [\infty, (k, 0)] \to [\infty, (\alpha(k), 0)]$$
$$(\infty) \to (\infty) \qquad L_\infty \to L_\infty .$$

(1.3) *Gruppo delle omotetie.*

Se a è un elemento di K diverso da zero, l'omotetia di $\pi(K, p, q)$ relativa all'elemento a di K è la collineazione di $\pi(K, p, q)$ definita da:

$$(x, y) \to (xa, ya) \qquad [m, k] \to [m, ka]$$
$$(x) \to (x) \qquad [\infty, (k, 0)] \to [\infty, (ka, 0]$$
$$(\infty) \to (\infty) \qquad L_\infty \to L_\infty .$$

(1.4) *Gruppo degli autotopismi.*

Detti a, b, c, d quattro elementi di K per i quali $ad - bc \neq 0$, si definisce la rappresentazione $S = S(a, b, c, d)$ di $J(K, p, q)$ sopra se stesso ponendo $S(\lambda x + y) = \lambda(ax + by) + (cx + dy)$ $[\lambda x + y \in J(K, p, q)]$. Detto s l'elemento di $J(K, p, q)$ che si rappresenta, mediante la S, nell'unità di $J(K, p, q)$, l'autotopismo di $\pi(K, p, q)$ definito da S è la collineazione di $\pi(K, p, q)$ che si stabilisce mediante le corrispondenze:

$$(x, y) \to (S(x), S(y)) \qquad [m, k] \to [S(ms), S(k)]$$

$$(x) \to (S(xs)) \qquad [\infty, (k, 0)] \to [\infty, (S(k), 0)]$$

$$(\infty) \to (\infty) \qquad L_\infty \to L_\infty .$$

(1.5) *Gruppo lineare.*

Detti a e b due elementi di K non entrambi nulli, la trasformazione del gruppo lineare del piano $\pi(K, p, q)$ definita da a e b è la collineazione di $\pi(K, p, q)$ che si stabilisce mediante le corrispondenze:

$(x, y) \to ((pa + b)x + ay,\ qax + by)$;

$(x) \to (x)$, se x non è in K;

$(x) \to (-(xb - qa)(xa - pa - b)^{-1})$, se x è in K e $xa \neq pa + b$;

$(p + ba^{-1}) \to (\infty)$, se $a \neq 0$;

$(\infty) \to (-ba^{-1})$, se $a \neq 0$;

$(\infty) \to (\infty)$, se $a = 0$;

$[m, k] \to [m, mka + bk]$, se m non appartiene a K;

$[m, k] \to [-(mb - qa)(ma - pa - b)^{-1}, -k(b^2 + pab - qa^2)(ma - pa - b)^{-1}]$, se m appartiene a K e se $ma \neq pa + b$;

$[p + ba^{-1}, k] \to [\infty, (ka, 0)]$, se $a \neq 0$;

$[\infty, (k, 0)] \to [-ba^{-1}, -ka^{-1}(b^2 + pab - qa^2)]$, se $a \neq 0$;

$[\infty, (k, 0)] \to [\infty, (kb, 0)]$, se $a = 0$;

$L_\infty \to L_\infty$.

(1.6) *Involuzione* δ.

È la collinezazione del piano $\pi(K, p, q)$ definita da:

$$
\begin{array}{ll}
(x, y) \to (-x, px + y) & [m, k] \to [-m + p, k] \\
(x) \to (-x + p) & [\infty, (k, 0)] \to [\infty, (-k, 0)] \\
(\infty) \to (\infty) & L_\infty \to L_\infty .
\end{array}
$$

Si consideri, ora, il gruppo delle collineazioni di $\pi(K, p, q)$ generato dal gruppo lineare e dalla collineazione δ: diremo tale gruppo di collineazioni gruppo lineare completo di collineazioni di $\pi(K, p, q)$.

Sia, infine, H il gruppo delle collineazioni di $\pi(K, p, q)$ che ha come elementi quelle collineazioni di $\pi(K, p, q)$ che si possono ottenere come successiva applicazione di tre collineazioni di $\pi(K, p, q)$ scelte, rispettivamente, nel gruppo degli autotopismi, nel gruppo lineare completo e nel gruppo delle traslazioni: il gruppo di collineazioni H si dirà gruppo di HUGHES associato a $\pi(K, p, q)$. Diremo, inoltre, gruppo generale di HUGHES associato a $\pi(K, p, q)$, e lo indicheremo con H', il gruppo di collineazioni di $\pi(K, p, q)$ costituito dalle sue collineazioni che si possono ottenere come prodotto di un automorfismo del piano per una collineazione del gruppo di HUGHES associato al piano.

2. – Riassunti, nel numero precedente, alcuni risultati e alcune definizioni date in [1], interpreto, in questo numero, quei risultati sul modello di piano di HALL studiato in [2] (pp. 173-174).

Pertanto, indico con K un campo, non isomorfo al campo fondamentale di ordine due, tale che esista un polinomio $x^2 - px - q$, con coefficienti in K, irriducibile sopra K. Detto $S_4(K)$ lo spazio lineare affine, di dimensione quattro, sopra il campo K, siano (x_1, x_2, y_1, y_2) le coordinate affini di un punto di $S_4(K)$ rispetto ad un riferimento affine prefissato, e siano X e Y le matrici

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \qquad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Il piano affine di HALL $\pi'(K, p, q)$, di traslazione sopra il quasicorpo di HALL $J(K, p, q)$ costruito a partire dal campo K e dal polinomio $x^2 - px - q$, si può pensare ([2]; pp. 173-174) come insieme che ha per « punti » i punti (propri) dello $S_4(K)$, quando in esso si dicano « rette » i piani di $S_4(K)$ rappresentabili con equazioni del tipo

$$(2.1) \qquad aX + bY = \Gamma, \qquad\qquad (2.2) \qquad MX + Y = \Gamma,$$

ove a, b sono elementi di K non contemporaneamente nulli, Γ è una qualunque matrice a due righe e a una colonna con elementi in K, M (²) è una qualunque matrice quadrata del secondo ordine, con elementi in K, avente come traccia $-p$ e come determinante $-q$: tr. $M = -p$, det. $M = -q$; le condizioni di incidenza punto-retta in $\pi'(K, p, q)$ risultando definite dalle condizioni di incidenza punto-piano in $S_4(K)$ (³).

Sia, inoltre, $S_3(K)$ lo spazio improprio di $S_4(K)$; l'insieme dei piani (2.1) e (2.2) di $S_4(K)$ definisce, in $S_3(K)$, al variare di a, b e M, una congruenza di rette rappresentabili con equazioni del tipo

$$(2.3) \qquad aX + bY = (0), \qquad\qquad (2.4) \qquad MX + Y = (0)$$

ove (0) è la matrice nulla a due righe e una colonna e (x_1, x_2, y_1, y_2) è un punto di $S_3(K)$ rappresentato mediante coordinate proiettive (omogenee). Le rette (2.4) sono tutte incidenti le rette (distinte se il polinomio $x^2 - px - q$ è separabile su K)

$$(2.5) \qquad a_i X - Y = (0), \qquad (a_i^2 - a_i p - q = 0; \quad i = 1, 2),$$

appartenenti allo $S_3(K')$, ove K' indica il campo estensione algebrica di K mediante il polinomio $x^2 - px - q$; le rette (2.3) descrivono la quadrica Q di equazione $X_{-1}\, U'\, Y = (0)^{1,1}$, ove U' è una matrice quadrata del secondo ordine emisimmetrica e non nulla con elementi in K e $(0)^{1,1}$ è la matrice nulla del primo ordine: la quadrica Q, nello $S_3(K')$ contiene le rette (2.5), le quali appartengono a quel suo regolo cui appartengono le rette (2.3). Poichè due rette parallele del piano affine di HALL relativo al quasicorpo $J(K, p, q)$ sono rappresentate da due piani paralleli di $S_4(K)$, si può passare dal modello affine $\pi'(K, p, q)$ del piano di HALL al suo modello proiettivo $\pi(K, p, q)$ introducendo come « punti impropri » di esso le rette (2.3) e (2.4): tali rette sono le immagini dei punti che da HUGHES sono indicati con i simboli (x) e (∞).

(²) Il prodotto tra matrici, ora e nel seguito, va eseguito righe per colonne.

(³) Si noti che, perciò, tra questa trattazione e quella dovuta a D. R. HUGHES vi è differenza nella definizione di appartenenza retta-punto; con questa definizione, seguendo il simbolismo di HUGHES, il punto (x, y) appartiene alla retta $[m, k]$ se, e solamente se, $y = mx + k$: tale differenza è solamente formale. Nel riscrivere gli insiemi di collineazioni che generano il gruppo di collineazioni di HUGHES di un piano di HALL si deve, però, tener conto della nuova definizione di incidenza. Si tenga anche presente che in [2] il termine « automorfismo » di un piano è usato come sinonimo di « collineazione ».

Gli insiemi di collineazioni del piano di HALL $\pi(K, p, q)$ richiamati al n. 1, si riflettono, nel modello di quel piano dato precedentemente in $S_4(K)$, in insiemi di trasformazioni che sono insiemi di collineazioni affini (4) di $S_4(K)$. Si verifica facilmente (5) che si ottengono i seguenti insiemi di collineazioni:

(2.6) *Gruppo delle traslazioni.*

Se Γ e Δ sono due qualunque matrici a due righe e a una colonna con elementi in K, la traslazione di $\pi(K, p, q)$, associata a Γ e Δ, è la traslazione di $S_4(K)$ di equazioni

$$X' = X + \Gamma, \qquad Y' = Y + \Delta .$$

(2.7) *Gruppo degli automorfismi.*

Detto α un autmorfismo di K per il quale $\alpha(p) = p$ e $\alpha(q) = q$, indicate con $\alpha(X)$ e $\alpha(Y)$ le matrici che hanno per elementi i trasformati, mediante α, degli elementi delle matrici X e Y rispettivamente, l'automorfismo di $\pi(K, p, q)$, relativo a α, è la collineazione affine di $S_4(K)$ rappresentata dalle equazioni

$$X' = \alpha(X), \qquad Y' = \alpha(Y).$$

(2.8) *Gruppo degli autotopismi.*

Se A è una matrice quadrata del secondo ordine, non degenere, con elementi in K, l'autotopismo di $\pi(K, p, q)$, relativo ad A, è l'omografia affine di $S_4(K)$ di equazioni

$$X' = AX, \qquad Y' = AY.$$

(2.9) *Gruppo lineare.*

Se a e b sono due elementi di K non entrambi nulli, la collineazione del gruppo lineare di $\pi(K, p, q)$, associata ad a e b, è l'omografia affine di $S_4(K)$ di equazioni

$$X' = (b - pa)X + aY, \qquad Y' = qaX + bY.$$

---

(4) Per le locuzioni e le proprietà relative alla geometria proiettiva di uno spazio lineare si rimanda al trattato [3].

(5) Tenendo presente la nota (3).

(2.10) *Involuzione* δ.

È l'omografia affine di $S_4(K)$ di equazioni

$$X' = -X, \qquad Y' = -pX + Y.$$

Si noti che, se ci si limita a considerare le trasformazioni del gruppo (2.8) definite da matrici $A = rU$ (ove r è un elemento di K diverso dallo zero e U è la matrice identica), si ottiene un sottogruppo, del gruppo (2.8), che non differisce dal gruppo delle omotetie, con centro $(0, 0, 0, 0)$, di $S_4(K)$: tale gruppo è sottogruppo anche del gruppo (2.9), ottenendosi quando si considerano quelle trasformazioni di (2.9) per le quali $a = 0$.

3. – Posso, ora, iniziare lo studio del gruppo delle collineazioni spettante a un piano di Hall $\pi(K, p, q)$. A tal fine osservo che, adottato per $\pi(K, p, q)$ il modello introdotto al n. 2, ogni collineazione di $S_4(K)$ che, nel suo $S_3(K)$ improprio, muta in se stesso ciascun regolo della quadrica $X_{-1}U'Y = (0)^{1,1}$ e muta in sè l'insieme delle rette (2.4), rappresenta una collineazione di $\pi(K, p, q)$; anzi ([2]; p. 179), se il campo K ha almeno quattro elementi e se non è isomorfo ad un suo sottocampo proprio, ogni collineazione di $\pi(K, p, q)$ si ottiene nel modo detto.

Si verifica facilmente che una collineazione di $S_4(K)$ la quale, nello $S_3(K)$ improprio di $S_4(K)$, lascia fisso ciascun regolo della quadrica $X_{-1}U'Y = (0)^{1,1}$, si deve potere esprimere come successiva applicazione di quattro collineazioni dei seguenti tipi:

$$X' = \varphi(X), \qquad Y' = \varphi(Y); \tag{3.1}$$

$$X' = aX + bY, \qquad Y' = cX + dY; \tag{3.2}$$

$$X' = AX, \qquad Y' = AY; \tag{3.3}$$

$$X' = X + \Gamma, \qquad Y' = Y + \Delta; \tag{3.4}$$

essendo φ un automorfismo di K, a, b, c, d elementi di K per i quali risulta $ad - bc \neq 0$, A una matrice quadrata del secondo ordine, non degenere, con elementi in K, Γ e Δ matrici a due righe e a una colonna con elementi in K. Poichè le collineazioni (3.3) e (3.4) appartengono al gruppo di Hughes associato al piano $\pi(K, p, q)$ (cfr. n. 2), se si desidera che la collineazione prodotto delle quattro precedentemente scritte sia una collineazione di quel piano, bisogna imporre che risulti tale la collineazione prodotto della (3.1) e della (3.2). Si verifica facilmente che la (3.1) rappresenta una collineazione del piano di Hall

$\pi(K, p, q)$ sul piano di HALL $\pi(K, \varphi(p), \varphi(q))$: la (3.2), perciò, dovrà rappresentare una collineazione del piano $\pi(K, \varphi(p), \varphi(q))$ sul piano $\pi(K, p, q)$. A tale scopo, mantenendo la (3.2) fisso ciascun regolo della quadrica $X_{-1}\, U'\, Y = (0)^{1,1}$, basterà imporre ad essa di trasformare l'insieme delle rette $\varphi(M)\, X + Y = (0)$ di $S_3(K)$ nell'insieme delle rette $MX + Y = (0)$. Osservato che, applicando successivamente alla (3.2) una opportuna trasformazione del gruppo lineare del piano $\pi(K, p, q)$, si può sempre supporre $b = 0$, la condizione precedente si traduce nell'uguaglianza $aM' + cU = d\varphi(M)$ $(ad \neq 0)$, essendo M' e $\varphi(M)$ due matrici quadrate del secondo ordine, con elementi in K, aventi, rispettivamente, traccia $-p$ e $-\varphi(p)$ e determinante $-q$ e $-\varphi(q)$, e essendo U la matrice identica del secondo ordine. Quest'ultima relazione si esplicita nelle seguenti uguaglianze tra elementi di K

$$(3.5) \qquad 2c - pa = -\varphi(p)\, d, \quad c^2 + \varphi(q)\, d^2 - pac - qa^2 = 0 \quad (ad \neq 0)$$

e l'esistenza di una collineazione del piano $\pi(K, p, q)$ che sia inerente all'automorfismo φ implica, perciò, l'esistenza di tre elementi a, c, d di K (con $ad \neq 0$) che verificano queste uguaglianze; un calcolo diretto mostra che la risolubilità in K delle relazioni (3.5) è anche sufficiente per l'esistenza di una tale collineazione. Perciò:

Sia $\pi(K, p, q)$ il piano di Hall relativo al quasicorpo di Hall $J(K, p, q)$ e sia φ un automorfismo del campo K. Condizione necessaria e sufficiente affinchè esista una collineazione $\omega(\varphi)$ di $S_4(K)$, inerente all'automorfismo φ di K, la quale sia immagine di una collineazione di $\pi(K, p, q)$, è che in K esistano tre elementi a, c, d, con $ad \neq 0$, che verificano le relazioni (3.5).

Ricavando $\varphi(p)$ e $\varphi(q)$ rispettivamente dalla prima e dalla seconda delle (3.5), si giunge alla relazione

$$(3.6) \qquad \varphi(p^2 + 4q) = r^2(p^2 + 4q) \qquad (r = ad^{-1}),$$

e, se il campo K ha caratteristica diversa da due, la possibilità di ricavare r dalla (3.6) equivale alla risolubilità, in K, del sistema (3.5). Infatti, se il sistema (3 5) è risolubile in K e se a, c, d $(ad \neq 0)$ è soluzione di esso, posto $r = ad^{-1}$, è verificata la (3.6); viceversa, se dalla (3.6) è possibile ricavare r (e $r \neq 0$ poichè $p^2 + 4q \neq 0$), ponendo $d = 1$, $a = r$ e $c = (pr - \varphi(p))/2$, si ottiene una soluzione del sistema (3.5).

La precedente osservazione ci permette di verificare agevolmente che non sempre il sistema (3.5) è risolubile in K: proverò ciò con un esempio. A tal fine assumo come campo K il campo $R(\sqrt{2})$, estensione algebrica del campo razionale mediante il polinomio $x^2 - 2$, e assumo come polinomio che mi definisce un quasicorpo di HALL sopra il campo $R(\sqrt{2})$ il polinomio $x^2 - (1 + \sqrt{2})$: $J(K, p, q) = J(R(\sqrt{2}), 0, 1 + \sqrt{2})$. Indico con φ l'automorfismo di $R(\sqrt{2})$ che associa ad ogni suo elemento $u + v\sqrt{2}$ (u e v sono numeri razionali) l'elemento $\varphi(u + v\sqrt{2}) = u - v\sqrt{2}$: $0 = p = \varphi(p)$ e $(1 + \sqrt{2}) = q \neq \varphi(q) = (1 - \sqrt{2})$. La relazione (3.6), la cui risolubilità in $R(\sqrt{2})$ equivale, nel nostro caso, alla risolubilità del sistema (3.5), si scrive $-\sqrt{2} + 1 = r^2(1 + \sqrt{2})$: essa non è, perciò, risolubile in $R(\sqrt{2})$.

L'esempio svolto ci induce a stabilire la seguente proposizione:

Se il campo K è finito, fissato un qualunque automorfismo di K e un qualunque polinomio $x^2 - px - q$ con coefficienti in K e irriducibile su K, è sempre possibile determinare tre elementi di K, a, c, d, con $ad \neq 0$, che verifichino le relazioni $2c - pa + d\varphi(p) = 0$, $c^2 + \varphi(q)d^2 - pac - qa^2 = 0$.

Infatti, se il campo K ha caratteristica diversa da due, il teorema è di verifica immediata se ci si riferisce alla relazione (3.6): in tal caso $p^2 + 4q$ e $\varphi(p^2 + 4q)$ sono dei non quadrati in K e, quindi, $\varphi(p^2 + 4q)(p^2 + 4q)^{-1}$ è un quadrato in K. Se, poi, il campo K ha caratteristica due, si ricordi che ogni automorfismo non identico di K è una corrispondeza di K sopra K del tipo $x \to x^{w(t)}$ (essendo x un qualunque elemento di K, $w(t) = 2^t$ e $t = 1, 2, \ldots, h - 1$ se 2^h è l'ordine di K); il sistema (3.5) diviene $pa = p^{w(t)}d$, $c^2 + q^{w(t)}d^2 + pac + qa^2 = 0$. Esso ammette la soluzione $a = p^{w(t)-1}$, $d = 1$, $c = p^{w(t)} \sum_{i=0}^{t-1} (qp^{-2})^{w(i)}$. Se, inoltre, φ è l'automorfismo identico di K il sistema (3.5) ammette la soluzione $c = 0$, $a = d = 1$.

Si noti che, supposto il sistema (3.5) risolubile in K per un dato automorfismo φ, oltre alla collineazione $\omega(\varphi)$ che si ottiene come prodotto della (3.1) e della (3.2) quando si ponga nella (3.2) $b = 0$ e a, c, d siano soluzione delle (3.5), spettano al piano di HALL $\pi(K, p, q)$ le collineazioni $H\omega(\varphi)$ appartenenti alla classe laterale della $\omega(\varphi)$ rispetto al gruppo di HUGHES H.

Si noti, infine, che se due collineazioni $\omega(\varphi)$ e $\omega'(\varphi)$ del piano di HALL $\pi(K, p, q)$ sono inerenti a uno stesso automorfismo di K, esse differiscono per una trasformazione del gruppo H, ossia sono elementi di una stessa classe laterale di H; ciò discende dall'esistenza di una collineazione h di $\pi(K, p, q)$ per la quale risulta $\omega'(\varphi) = h\omega(\varphi)$, se si tiene presente che h, poichè $\omega'(\varphi)$ e $\omega(\varphi)$ sono inerenti a uno stesso automorfismo φ di K, deve essere inerente all'automorfismo identico di K: perciò h è una collineazione del gruppo di HUGHES del piano $\pi(K, p, q)$. Da questa osservazione segue che due classi laterali di H, $H\omega(\varphi)$ e $H\omega(\varphi')$, relative a due collineazioni di $\pi(K, p, q)$ inerenti agli automorfismi φ e φ' di K, con φ diverso da φ', sono prive di elementi comuni.

4. – Prenderò ora in esame il caso di un piano di HALL $\pi\,(K,\ p,\ q)$ costruito a partire da un campo K ogni automorfismo φ del quale lascia fissi gli elementi p e q: $\varphi\,(p) = p$, $\varphi\,(q) = q$. In tal caso, qualunque sia l'automorfismo φ, il sistema (3.5) ammette, in K, la soluzione $c = 0$, $a = d = 1$, la collineazione (3.1) appartiene al gruppo degli automorfismi del piano $\pi\,(K,\ p,\ q)$ e la collineazione (3.2) al gruppo lineare di quel piano: ciò significa che per ogni automorfismo φ di K, se K verifica l'ipotesi ammessa all'inizio del presente numero, esistono collineazioni del piano $\pi\,(K,\ p,\ q)$ e che esse appartengono al gruppo di HUGHES generale H'. In particolare, tenendo presenti i risultati stabiliti in [2] (p. 179), posso affermare che vale il seguente

Teorema: *Sia $\pi\,(K,\ p,\ q)$ il piano di* HALL *relativo al quasicorpo di* HALL *$J\,(K,\ p,\ q)$ costruito a partire da un campo K, di ordine maggiore di tre e non isomorfo a un suo sottocampo proprio, e dal polinomio $x^2 - px - q$ avente coefficienti in K e irriducibile sopra K. Se ogni automorfismo φ di K lascia fissi gli elementi p e q, ossia se $\varphi\,(p) = p$ e $\varphi\,(q) = q$ qualunque sia φ, allora il gruppo delle collineazioni del piano $\pi\,(K,\ p,\ q)$ coincide col gruppo generale di* HUGHES *associato a tale piano.*

5. – Per completare la discussione iniziata al n. **3** e proseguita al n. **4** è opportuno mostrare che, se si fa cadere l'ipotesi che per ogni automorfismo φ di K risulti $\varphi\,(p) = p$ e $\varphi\,(q) = q$, il gruppo generale di HUGHES non sempre esaurisce il gruppo delle collineazioni del piano di HALL $\pi(K,\ p,\ q)$, anche nel caso in cui il piano sia finito. Proverò ciò con un esempio, riprendendo le notazioni e le definizioni del n. **1**.

Sia K un campo di GALOIS il cui ordine sia maggiore di un numero primo (K si suppone, cioè, non isomorfo a un campo fondamentale) e la cui caratteristica sia diversa da due; detto φ un automorfismo non identico di K, indico con q un elemento di K che sia un non quadrato in K e tale che $\varphi\,(q) \neq q$. Voglio provare che il piano di HALL $\pi\,(K,\ 0,\ q)$ possiede una collineazione C che non appartiene al gruppo generale di collineazioni di HUGHES ad esso spettante. Osservo, intanto, che l'automorfismo φ di K permette di definire un automorfismo φ sul gruppo additivo del quasicorpo di HALL $J\,(K,\ 0,\ q)$ che genera il piano $\pi\,(K,\ 0,\ q)$, mediante l'associazione $x \to \varphi\,(x)$ [essendo x un elemento di $J\,(K,\ 0,\ q)$] definita da $\varphi\,(x) = \lambda\,\varphi\,(c) + \varphi\,(d)$ se $x = \lambda\, c + d$ (c, d sono elementi di K). Ciò premesso, indico con a (ed a risulterà diverso da zero, da 1 e da -1) un elemento di K soluzione dell'equazione $x^2 - q^{-1}\,\varphi\,(q) = 0$, equazione che è risolubile in K poichè q^{-1} e $\varphi\,(q)$ sono dei non quadrati in K. Si verifica facilmente che in $J\,(K,\ 0,\ q)$ vale la seguente regola di calcolo

$$[a^{-1}\,\varphi\,(m)]\,[a\,\varphi\,(x)] = \varphi\,(mx) \tag{5.1}$$

ove m ed x sono due qualunque elementi di $J(K, 0, q)$ e $a = \lambda 0 + a$ è l'elemento di K già definito, pensato come elemento di $J(K, 0, q)$. Dimostro che:

La corrispondenza C, tra punti e tra rette del piano $\pi(K, 0, q)$, definita da

$$(5.2)\quad \begin{cases} (x, y) \to (a\varphi(x), \varphi(y)) \\ (x) \to (a^{-1}\varphi(x)) \\ (\infty) \to (\infty) \end{cases} \qquad (5.3)\quad \begin{cases} [m, k] \to [a^{-1}\varphi(m), \varphi(k)] \\ [\infty, (k, 0)] \to [\infty, (a\varphi(k), 0)] \\ L_\infty \to L_\infty \end{cases}$$

è una collineazione del piano $\pi(K, 0, q)$.

Le (5.2), infatti, stabiliscono una corrispondenza biunivoca tra i punti del piano $\pi(K, 0, q)$ e le (5.3) una corrispondenza biunivoca tra le sue rette. Ciò osservato, basterà dimostrare, poichè il piano $\pi(K, 0, q)$ è finito, che le (5.2) mutano i punti di una retta di $\pi(K, 0, q)$ nei punti della retta associata a quella mediante le (5.3). Ciò si verifica a vista per i punti di L_∞. Considerati i punti (k, y) [essendo k un elemento di $J(K, 0, q)$ comunque fissato e y un elemento variabile in $J(K, 0, q)$] e (∞), che appartengono alla retta $[\infty, (k, 0)]$, si verifica che, mediante le (5.2), essi si trasformano nei punti $(a\varphi(k), \varphi(y))$ e (∞), i quali, qualunque sia y, appartengono alla retta $[\infty, (a\varphi(k), 0)$ associata a $[\infty, (k, 0)]$ mediante le (5.3). I punti della retta $[m, k]$ sono i punti $(x, k - mx)$ [ottenuti al variare di x in $J(K, 0, q)$] e (m) i quali, mediante le (5.2) si trasformano nei punti $(a\varphi(x), \varphi(k) - \varphi(mx))$ e $(a^{-1}\varphi(m))$ che devono appartenere alla retta $[a^{-1}\varphi(m), \varphi(k)]$ associata alla $[m, k]$ mediante le (5.3). Il punto $(a^{-1}\varphi(m))$ apprtiene a tale retta per definizione; l'appartenenza del punto $(a\varphi(x), \varphi(k) - \varphi(mx))$ ad essa implica l'uguaglianza $[a^{-1}\varphi(m)][a\varphi(x)] + \varphi(k) - \varphi(mx) = \varphi(k)$ la quale, in virtù della (5.1), risulta soddisfatta da ogni elemento x di $J(K, 0, q)$.

Provo, ora, che

La collineazione C non appartiene al gruppo generale di Hughes *di collineazioni del piano $\pi(K, 0, q)$.*

Ciò significa che la collineazione C non si può ottenere come successiva applicazione di quattro collineazioni del piano $\pi(K, 0, q)$ scelte, rispettivamente, nel gruppo degli automorfismi, nel gruppo degli autotopismi, nel gruppo lineare completo e nel gruppo delle traslazioni di quel piano. Per dimostrare ciò, si osservi che il punto (1), il punto (-1) e il punto (∞) sono uniti per ogni automorfismo, per ogni autotopismo e per ogni traslazione del piano $\pi(K, 0, q)$, mentre ogni trasformazione del gruppo lineare completo del piano $\pi(K, 0, q)$ che lasci fisso il punto (∞) trasforma, necessariamente, in sè la coppia di punti (1) e (-1)

(la verifica di ciò è immediata se si tengono presenti le relazioni che definiscono il gruppo lineare completo, date al n. 1). Il teorema segue osservando che la collineazione C lascia fisso (∞) e trasforma (1) in (a^{-1}), e ricordando che a è diverso da 1 e da -1.

6. – Ci proponiamo, a chiusura del lavoro, di racchiudere in un enunciato i risultati stabiliti nei numeri precedenti. Nel far ciò, terremo presente il teorema, relativo alle collineazioni di un piano di Hall, dimostrato in [2] (p. 179): tale teorema assicura la possibilità di esprimere ogni collineazione di un piano di Hall, costruito su un campo K di ordine maggiore di tre e non isomorfo a un suo sottocampo proprio, come collineazione di $S_4(K)$ che, mantenendo fissa la quadrica $X_{-1}\,U'\,Y = (0)^{1,1}$ dello $S_3(K)$ improprio di tale spazio, muta in se stesso l'insieme delle rette di $S_3(K)$ di equazioni $MX + Y = (0)$. Enunceremo i risultati ottenuti riferendoci al modello del piano di Hall $\pi(K, p, q)$ illustrato al numero 2 di questo lavoro; non è faticoso, però, riscrivere i risultati, che abbiamo stabiliti, usando il simbolismo del numero 1 (adottato da Hughes): bisogna, solamente, tener presente la nota (3) di pag. [6] e ricordare come, al n. 2, si è introdotta la rappresentazione di $\pi(K, p, q)$ sopra lo $S_4(K)$. In conclusione, possiamo affermare che:

Sia $\pi(K, p, q)$ un piano di Hall *e sia $\{\varphi\}$ l'insieme degli automorfismi del campo K costituito da tutti e soli quegli automorfismi del campo per i quali il sistema $2c - pa + \varphi(p)\,d = c^2 + \varphi(q)\,d^2 - pac - qa^2 = 0$ ammette soluzione a, c, d, con $ad \neq 0$, in K. L'insieme $\{\varphi\}$ non è vuoto poichè contiene almeno quegli automorfismi φ di K per cui $\varphi(p) = p$ e $\varphi(q) = q$.*

Detto φ un elemento di $\{\varphi\}$ siano $a(\varphi)$, $c(\varphi)$ e $d(\varphi)$, con $a(\varphi)\,d(\varphi) \neq 0$, tre elementi di K che risolvono il sistema considerato: il gruppo di collineazioni di $\pi(K, p, q)$ contiene il gruppo $G = \bigcup_{\varphi \in \{\varphi\}} H\omega(\varphi)$, ove H è il gruppo di Hughes *associato a $\pi(K, p, q)$* e *$\omega(\varphi)$ è la collineazione di $\pi(K, p, q)$ di equazioni $X' = a(\varphi)\,\varphi(X)$, $Y' = c(\varphi)\,\varphi(X) + d(\varphi)\,\varphi(Y)$.*

Se il campo K ha ordine maggiore di tre e non è isomorfo ad un suo sottocampo proprio il piano di Hall *$\pi(K, p, q)$ ha un gruppo di collineazioni che coincide con G. Inoltre, se il campo K è finito, l'insieme $\{\varphi\}$ coincide con l'insieme degli automorfismi di K; tale eventualità non si presenta di necessità se il campo K è infinito.*

Bibliografia.

[1] HUGHES, D. R.: *Collineation groups of non-desarguesian planes*, I, Amer. J. Math., **81** (1959), 921-938.

[2] PANELLA, G.: *Isomorfismo tra piani di traslazione di Marshall Hall*, Ann. Mat. Pura Appl., (4) **47** (1959), 169-180.

[3] SEGRE, B.: *Lezioni di Geometria moderna*, vol. I, Zanichelli, Bologna (1948).

Summary.

Let k be a field and $x^2 - px - q$ a quadratic polynomial irreducible over k. A HALL-system $J(k, p, q)$ (see [1]) is a VEBLEN-WEDDERBURN system constructed over the field k, using $x^2 - px - q$; a HALL-plane is a non-desarguesian plane constructed using $J(k, p, q)$.

In this paper *I* study the collineation groups of HALL-planes and *I* determine these groups if k is not isomorphic with its subfield.