Riv. Mat. Univ. Parma (2) 2 (1961), 47-52

GIACOMINO BATTIONI (*)

Equazioni alle derivate parziali, di primo ordine e omogenee. (**)

1. - Introduzione.

Sappiamo che un'equazione differenziale ordinaria di primo ordine, in una funzione incognita $y = y(x)$, si dice omogenea (o di G. MANFREDI) quando è della forma (o riconducibile alla forma)

$$\mathrm{D}y = f(y/x) \qquad (\mathrm{D} = \mathrm{d}/\mathrm{d}x),$$

dove $f(t)$ è una data funzione. Tale definizione si può generalizzare in modo che valga anche per le equazioni alle derivate parziali di primo ordine in una funzione incognita $z = z(x_1, \ldots, x_n)$.

Questa Nota ha, appunto, per oggetto di porre tale definizione più generale, di fissare il procedimento risolutivo per la nuova equazione, e di dare l'espressione del suo integrale generale.

Precisamente, date n funzioni $A_1 = A_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, A_n = A_n(x_1, \ldots, x_n)$ e considerato l'operatore (pluriderivatore)

$$\mathfrak{D} = A_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + A_n \frac{\partial}{\partial x_n},$$

pongo la seguente definizione:

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università, Parma, Italia.
(**) Ricevuto il 22 aprile 1961.

Un'equazione alle derivate parziali di primo ordine, in una funzione incognita $z = z(x_1, \ldots, x_n)$, si dirà *omogenea* (o *di G. Manfredi*), quando ha la forma (o è riconducibile alla forma)

$$(1) \qquad \mathfrak{D}z = f(z/x_{\mathfrak{D}}) \, ,$$

o più generalmente ha la forma

$$(1') \qquad \mathfrak{D}z = f(z/x_{\mathfrak{D}}, \, k_1, \, k_2, \, \ldots) \, ,$$

dove:

f è una data funzione dei suoi argomenti;

$x_{\mathfrak{D}}$ è una variabile indipendente per $\mathfrak{D}$, ossia è una qualsiasi funzione $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ tale che sia $\mathfrak{D}\varphi(x_1, \ldots, x_n) = 1$ (1);

$k_1 = k_1(x_1, \ldots, x_n)$, $k_2 = k_2(x_1, \ldots, x_n)$, ... sono delle costanti per $\mathfrak{D}$, cioè delle qualsiasi funzioni tali che sia $\mathfrak{D}k_1 = \mathfrak{D}k_2 = \ldots = 0$ (2).

Le equazioni (1) od (1′) sono, quindi, di prima specie (3) (vale a dire contengono un solo pluriderivatore) e quasi-lineari.

Per l'integrale generale di (1′) trovo l'espressione

$$(2) \qquad \int^{*} \frac{dZ}{f(Z, \, k_1, \, k_2, \ldots) - Z} = \log |\, x_{\mathfrak{D}} \,| + z_0 \qquad \text{con } Z = z/x_{\mathfrak{D}},$$

dove:

il segno * sta ad indicare che per l'integrale indefinito si deve assumere una particolare determinazione (del resto qualsiasi);

$z_0 = z_0(x_1, \ldots, x_n)$ è la soluzione generale dell'equazione $\mathfrak{D}z = 0$.

---

(1) A. MAMBRIANI, *La pluriderivazione e una classificazione delle equazioni differenziali*, Riv. Mat. Univ. Parma **6** (1955), 321-348. Cfr. p. 334.

(2) Loc. cit. in (1), p. 332.

(3) Loc. cit. in (1), p. 336, e anche A. MAMBRIANI, *Sul concetto di « specie » di un'equazione differenziale*, Riv. Mat. Univ. Parma **7** (1956), 141-144.

2. - Risoluzione di (1′).

Posto $z/x_{\mathcal{D}} = Z$, da cui $z = x_{\mathcal{D}} \cdot Z$, si ha

$$\mathfrak{D}z = \mathfrak{D}(x_{\mathcal{D}} \cdot Z) = (\mathfrak{D}x_{\mathcal{D}}) \cdot Z + x_{\mathcal{D}} \cdot \mathfrak{D}Z = Z + x_{\mathcal{D}} \cdot \mathfrak{D}Z ,$$

onde la (1′) diventa

$$Z + x_{\mathcal{D}} \cdot \mathfrak{D}Z = f(Z, k_1, k_2, \ldots) ,$$

ossia

$$\mathfrak{D}Z = \frac{f(Z, k_1, k_2, \ldots) - Z}{x_{\mathcal{D}}} .$$

Quest'equazione alle derivate parziali, di primo ordine e di prima specie, è a variabili separate (4). Si ha

$$\frac{\mathfrak{D}Z}{f(Z, k_1, k_2, \ldots) - Z} = \frac{1}{x_{\mathcal{D}}} ,$$

da cui

$$\mathfrak{D} \int^* \frac{\mathrm{d}Z}{f(Z, k_1, k_2, \ldots) - Z} = \mathfrak{D} \log | x_{\mathcal{D}} | ,$$

(come si constata tenendo presente la regola di pluriderivazione di funzione composta (5) e il significato di k_1, k_2, ...) , cioè

$$\mathfrak{D} \left\{ \int^* \frac{\mathrm{d}Z}{f(Z, k_1, k_2, \ldots) - Z} - \log | x_{\mathcal{D}} | \right\} = 0 .$$

E di qui segue subito la formula risolutiva (2).

---

(4) Loc. cit. in (1), p. 337.
(5) Loc. cit. in (1), p. 324.

3. - Esempio I.

Risolvere l'equazione

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x + y - 2z}{x + y + 2z} . \tag{3}$$

Tale equazione è omogenea, in quanto è riconducibile alla forma (1). Invero, posto $\mathfrak{D} = \dfrac{\partial}{\partial x} + \dfrac{\partial}{\partial y}$, la (3) si può scrivere

$$\mathfrak{D}z = \frac{1 - \dfrac{z}{(x+y)/2}}{1 + \dfrac{z}{(x+y)/2}} ,$$

ed è proprio $\mathfrak{D}\{(x + y)/2\} = 1$.

Ponendo $Z = \dfrac{z}{(x+y)/2}$ e applicando la (2), si ha

$$\int^{*} \frac{\mathrm{d}Z}{\{(1 - Z)/(1 + Z)\} - Z} = \log |\,(x + y)/2\,| + \Omega_0(x - y),$$

dove $\Omega_0(x - y)$, con $\Omega_0(t)$ funzione derivabile arbitraria, è la soluzione generale di $\mathfrak{D}z = 0$. Segue

$$-(1/2)\log(Z^2 + 2Z - 1) = \log(|x + y|/2) + \Omega_0(x - y),$$

$$Z^2 + 2Z - 1 = 4\,\Omega(x - y)/(x + y)^2$$

essendo $\Omega_0(x - y) = -(1/2)\log \Omega(x - y)$. L'integrale generale della (3) è quindi

$$z = -(x + y)/2 \pm \sqrt{(x + y)^2/2 + \Omega(x - y)} ,$$

dove $\Omega(t)$ è una funzione derivabile arbitraria.

4. - Esempio II.

Risolvere le equazioni della forma

$$x_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + \ldots + x_n \frac{\partial z}{\partial x_n} = F(x_1, \ldots, x_n, z) \tag{4}$$

con $F(x_1, \ldots, x_n, z)$ funzione omogenea di primo grado.

Avendosi

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n, z) = x_1 F(1, x_2/x_1, \ldots, x_n/x_1, z/x_1)\,,$$

e ponendo $\mathfrak{D} = \dfrac{\partial}{\partial x_1} + (x_2/x_1)\dfrac{\partial}{\partial x_2} + \ldots + (x_n/x_1)\dfrac{\partial}{\partial x_n}$, la (4) si scrive

$$\mathfrak{D}z = F(1, x_2/x_1, \ldots, x_n/x_1, z/x_1)\,. \tag{4'}$$

Essendo $\mathfrak{D}x_1 = 1$, $\mathfrak{D}(x_r/x_1) = 0$ $(r = 2, \ldots, n)$, la (4′) è proprio della forma (1′), e la sua risoluzione procede perciò come si è detto al n. 2.

In particolare, risolvere l'equazione [6]

$$xz\frac{\partial z}{\partial x} + yz\frac{\partial z}{\partial y} = x^2 + y^2 + z^2\,. \tag{5}$$

Posto $\mathfrak{D} = \dfrac{\partial}{\partial x} + (y/x)\dfrac{\partial}{\partial y}$, la (5) si scrive

$$\mathfrak{D}z = \left\{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2\right\}\frac{x}{z} + \frac{z}{x}\,,$$

e procedendo come si è detto al n. 2 si trova per il suo integrale generale la espressione

$$z = \pm\sqrt{2(x^2 + y^2)\cdot\log|\,x\,\Omega(y/x)\,|}\,,$$

dove $\Omega(t)$ è una funzione derivabile arbitraria.

---

[6] E. Kamke, *Differentialgleichungen, Lösungsmethoden und Lösungen*, II, Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig 1950. Cfr. p. 151.

5. - Esempio III.

Risolvere le equazioni della forma

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial z}{\partial x_n} = F(e^{x_1}, \dots, e^{x_n}, z) \tag{6}$$

con $F(t_1, \dots, t_n, z)$ funzione omogenea di primo grado.

Avendosi

$$F(e^{x_1}, e^{x_2}, \dots, e^{x_n}, z) = e^{x_1} F(1, e^{x_2 - x_1}, \dots, e^{x_n - x_1}, z/e^{x_1}) ,$$

e ponendo $\mathfrak{D} = e^{-x_1}\left(\frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$, la (6) si scrive

$$\mathfrak{D}z = F(1, e^{x_2 - x_1}, \dots, e^{x_n - x_1}, z/x_1) . \tag{6'}$$

Essendo $\mathfrak{D}e^{x_1} = 1$, $\mathfrak{D}e^{x_r - x_1} = 0$ $(r = 2, \dots, n)$, la (6′) è proprio della forma (1′), e la sua risoluzione procede perciò come si è detto al n. 2 (7).

In particolare, risolvere l'equazione

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = z + \sqrt{e^{x+y} + z^2} . \tag{7}$$

Posto $\mathfrak{D} = e^{-x}\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right)$, la (7) si scrive

$$\mathfrak{D}z = z/e^x + \sqrt{e^{y-x} + (z/e^x)^2}$$

e procedendo come si è detto al n. 2 si trova per il suo integrale generale la espressione

$$z = e^{(x+y)/2} \operatorname{senh}(x + \Omega(x - y)) ,$$

dove $\Omega(t)$ è una funzione derivabile arbitraria.

---

(7) Analogamente si riconducono alla forma (1′) le equazioni

$$a_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + \dots + a_n \frac{\partial z}{\partial x_n} = F(e^{x_1/a_1}, \dots, e^{x_n/a_n}, z)$$

con $a_1, \dots, a_n$ date costanti ed $F(t_1, \dots, t_n, z)$ omogenea di primo grado.