

ALDO BELLENI MORANTE (\*)

## Su un problema sferico di diffusione neutronica (\*\*)

## I. - Introduzione.

Il fenomeno della diffusione dei neutroni nei mezzi materiali ha grande importanza nello studio e nel progetto dei reattori nucleari, sia che questi vengano impiegati come generatori di potenza, sia che servano come strumenti di ricerca.

Si comprende quindi l'interesse di uno studio accurato anche del carattere fisico-matematico della questione, sia nel caso stazionario che in quello non stazionario [1] (1).

Nella presente nota, ricavata dalla tesi di laurea, è risolto un problema di diffusione neutronica stazionaria, con simmetria sferica e tenendo conto delle usuali schematizzazioni ed approssimazioni suggerite dal fenomeno fisico studiato.

Ciò premesso, indichiamo con  $n(x, y, z)$  la densità numerica di neutroni termici che diffondono in un mezzo materiale omogeneo ed isotropo, che supponiamo riferito ad una terna di assi cartesiani ortogonali  $Oxyz$ .

Se  $v$  è la velocità media dei neutroni termici, la funzione  $F(x, y, z) = vn(x, y, z)$ , flusso di neutroni termici, obbedisce all'equazione differenziale alle derivate parziali:

$$(1) \quad D \Delta F(x, y, z) - S_a F(x, y, z) + Q(x, y, z) = 0,$$

ove:  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ ,  $D$  ed  $S_a$  sono due costanti caratteristiche del mezzo in cui i neutroni diffondono e  $Q(x, y, z)$  rappresenta il contributo delle sorgenti di neutroni termici [2], [3].

(\*) Indirizzo: Istituto Matematico « U. Dini », Università di Firenze, Via Alfani 81, Firenze, Italia.

(\*\*) Ricevuto il 22 aprile 1961.

(1) I numeri in parentesi quadra si riferiscono alla bibliografia.

L'equazione (1) viene generalmente usata per determinare le dimensioni critiche dei reattori nucleari a neutroni termici, le dimensioni cioè che devono possedere per poter funzionare in condizioni di regime. In quanto segue ci proponiamo appunto di determinare le dimensioni critiche di un sistema costituito da una sfera di materiale fissionabile (per. es.  $U^{235}$  puro od uranio arricchito) di centro  $O$  e raggio  $R_1$ , circondata da un volume di materiale moderatore (per es. di grafite), limitato da due superfici sferiche di centro  $O$  e rispettivamente di raggi  $R_1$ , ed  $R_2$ .

Facciamo l'ipotesi che i due raggi abbiano valori tali da poter considerare, quando si operi nel moderatore, la sfera di combustibile come una sorgente puntiforme di neutroni veloci nel centro del moderatore, il cui volume, se  $R_1$  è opportunamente scelto, può praticamente ritenersi infinito. Se infatti  $R_1$  è molto minore di  $R_2$  e del cammino libero medio di assorbimento dei neutroni veloci nel combustibile, questi non vengono praticamente assorbiti nella sfera di raggio  $R_1$  [2]. I neutroni veloci non vengono poi neppure praticamente rallentati dagli urti elastici con nuclei di combustibile, poichè la massa di questi è molto maggiore di quella dei neutroni ([2] pag. 127 e segg.). Se inoltre  $R_2$  è maggiore o uguale a circa tre volte la lunghezza di diffusione  $L_g$  dei neutroni termici nel moderatore (in grafite è  $L_g = 50$  cm), praticamente nessun neutrone sfugge dal volume del moderatore, che può quindi pensarsi esteso, con simmetria sferica rispetto ad  $O$ , a tutto lo spazio esterno alla sfera di raggio  $R_1$  ([2] pag. 115 e segg.).

## 2. - La diffusione nel moderatore.

Nelle ipotesi fatte, il termine « sorgente di neutroni termici », che compare nella (1), è del tipo ([3] pag. 332):

$$Q(r) = \frac{Q_0}{(4\pi\tau_t)^{3/2}} \exp(-r^2/4\tau_t),$$

ove  $r$  è la distanza del punto  $P = (x, y, z)$ , in cui si considera la funzione  $Q(r)$ , dal centro  $O$  della sfera di combustibile, essendo  $\tau_t$  una costante caratteristica del moderatore (in grafite è  $\tau_t = 350$  cm<sup>2</sup>) e  $Q_0$  una costante, di cui tra breve diremo.

L'equazione della diffusione nel moderatore si scrive dunque:

$$D_g \Delta F_g(x, y, z) - S_{ag} F_g(x, y, z) + \frac{Q_0}{(4\pi\tau_t)^{3/2}} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2 + z^2}{4\tau_t}\right) = 0$$

Tenendo presente l'espressione dell'operatore  $\Delta$  in coordinate polari sferiche e la simmetria del sistema in questione, si ottiene:

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr}\right) F_g(r) - F_g(r) / L_g^2 = - \frac{Q_0}{(4\pi r_i)^{3/2} D_g} \exp(-r^2/4\tau_i),$$

ove  $L_g^2 = D_g/S_{ag}$  è la lunghezza di diffusione del moderatore.

Posto:

$$r = L_g t; \quad j = L_g^2/4\tau_i; \quad k = \frac{I}{S_{ag} (4\pi r_i)^{3/2}},$$

dalla precedente si ricava:

$$(2) \quad \left(\frac{d^2}{dt^2} + \frac{2}{t} \frac{d}{dt}\right) F_g(t) - F_g(t) = -kQ_0 \exp(-jt^2).$$

L'integrale generale della (2) è del tipo:

$$F_g(t) = \frac{\sinh t}{t} [A + p(t)] + \frac{\cosh t}{t} [B + q(t)]$$

ove:

$$p(t) = -kQ_0/2 \left[ \int_0^t x \exp(-jx^2 + x) dx + \int_0^t x \exp(-jx^2 - x) dx \right]$$

$$q(t) = kQ_0/2 \left[ \int_0^t x \exp(-jx^2 + x) dx - \int_0^t x \exp(-jx^2 - x) dx \right],$$

ed  $A$  e  $B$  sono due costanti d'integrazione.

Le due costanti d'integrazione vanno determinate mediante le condizioni al contorno:

$$F_g(r) = 0, \quad \text{per} \quad r = R_2,$$

$$\frac{d}{dr} F_g(r) = 0, \quad \text{per} \quad r = R_2,$$

che assicurano come nessun neutrone possa sfuggire dal volume del moderatore nel vuoto ([2] pag. 102), in accordo con le ipotesi fatte nell'introduzione.

Tenendo conto che vale  $t = r/L_g$ , le due condizioni precedenti forniscono per  $A$  e per  $B$  i valori:

$$\begin{cases} A = -p(R_2/L_g), \\ B = -q(R_2/L_g). \end{cases}$$

Si ottiene così:

$$(3) \quad F_g(t) = \frac{\sinh t}{t} [p(t) - p(R_2/L_g)] + \frac{\cosh t}{t} [q(t) - (R_2/L_g)].$$

Ricordiamo che l'espressione (3) per  $F_g(t) = F_g(r/L_g)$  è stata ricavata nella ipotesi della sorgente puntiforme di neutroni veloci immersa in un volume di moderatore praticamente infinito. Come è stato già accennato, la funzione  $F_g(r/L_g)$  trovata sarà utile per risolvere l'equazione della diffusione nel combustibile, di cui ora si considerano le dimensioni finite.

### 3. - La diffusione nel combustibile.

L'equazione della diffusione nel combustibile si scrive:

$$(4) \quad \left( \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} \right) F_c(r) - F_c(r)/L_c^2 = 0, \quad 0 < r \leq R_1,$$

ove con  $F_c(r)$  si è indicato il flusso di neutroni termici nel combustibile e si è posto  $L_c^2 = D_c/S_{c.c.}$ . Alla (4) vanno aggiunte le condizioni al contorno ([2] pag. 102):

$$(5) \quad \begin{cases} F_c(r) = F_g(r), & \text{per } r = R_1, \\ D_c \frac{d}{dr} F_c(r) = D_g \frac{d}{dr} F_g(r), & \text{per } r = R_1. \end{cases}$$

Notiamo che l'equazione (4) tiene conto delle dimensioni finite del combustibile e che i secondi membri delle (5) possono essere determinati per mezzo della (3). Naturalmente questo procedimento approssimato è lecito soltanto se sono verificate le ipotesi fatte su  $R_1$  e su  $R_2$  nell'introduzione.

L'integrale della (4) che soddisfa le (5) è:

$$(6) \quad F_c(r) = Q_0 [H \sinh (r/L_c) + K \cosh (r/L_c)] L_c/r,$$

con:

$$H = -k/2 \left\{ \sinh (R_1/L_c) (N - M) - \cosh (R_1/L_c) [L_c/R_1 (1 - D_g/D_c) \cdot \right. \\ \left. \cdot (N - M) + (N + M) L_c D_g/L_g D_c] \right\} L_g/L_c,$$

$$(7) \quad K = -k/2 \left\{ -\cosh (R_1/L_c) (N - M) + \sinh (R_1/L_c) [L_c/R_1 (1 - D_g/D_c) \cdot \right. \\ \left. \cdot (N - M) + (N + M) L_c D_g/L_g D_c] \right\} L_g/L_c,$$

ove:

$$(8) \quad \begin{cases} M = \exp (-R_1/L_g) \int_{R_1/L_g}^{R_2/L_g} \exp (-jx^2 + x) dx \\ N = \exp (R_1/L_g) \int_{R_1/L_g}^{R_2/L_g} \exp (-jx^2 - x) dx. \end{cases}$$

#### 4. - L'equazione critica.

Notiamo che nella (6) compare il fattore  $Q_0$ , che deriva dalla forma del termine  $Q(r)$ , sorgente di neutroni termici, della equazione della diffusione nel moderatore.

È possibile mostrare che  $Q_0$  rappresenta il numero di neutroni veloci prodotti dalla sorgente, e cioè generati nella sfera di combustibile per unità di tempo ([2] pag. 180). Tale numero si ottiene anche considerando il flusso  $F_c(r)$  dato dalla (6); se infatti  $\chi$  è una costante caratteristica del combustibile, si trova ([4] pag. 213) che il numero di neutroni veloci prodotti nel volume infinitesimo compreso tra due sfere rispettivamente di raggio  $r$  ed  $r + dr$  per unità di tempo è:

$$\chi F_c(r) 4\pi r^2 dr.$$

Si ha dunque:

$$Q_0 = 4\pi\chi \int_0^{R_1} r^2 F_c(r) dr,$$

il secondo membro rappresentando infatti il numero totale di neutroni prodotti per unità di tempo nella sfera di combustibile. Dalla precedente, sostituendo l'espressione di  $F_c(r)$  data dalla (6), si ottiene una condizione di compatibilità tra  $R_1$  ed  $R_2$  e cioè la equazione critica del sistema:

$$(9) \quad (4\pi\gamma L_c)^{-1} = H(R_1, R_2) \int_0^{R_1} r \sinh(r/L_c) dr + K(R_1, R_2) \int_0^{R_1} r \cosh(r/L_c) dr,$$

con  $H(R_1, R_2)$  e  $K(R_1, R_2)$  dati dalle (7).

La (9) è una conseguenza necessaria dell'ipotesi che il sistema sia in condizioni stazionarie e cioè dell'ipotesi che  $F_g(r)$  e  $F_c(r)$  non dipendano dal tempo; in altri termini, se  $R_1$  ed  $R_2$  soddisfano la condizione di compatibilità (9), il flusso di neutroni termini nel combustibile e nel moderatore possono soddisfare le equazioni della diffusione in regime stazionario.

Eseguito i calcoli, dalla (9), per mezzo delle (7), otteniamo:

$$(10) \quad L_c/L_g (4\pi\gamma L_c^2)^{-1} = k/2 \{ (N - M) (\cosh R_1/L_c - 1) + \\ + [(L_c/R_1) (N - M) (1 - D_g/D_c) + (N + M) L_c D_g/L_g D_c] (R_1/L_c - \sinh R_1/L_c) \}$$

ove, per le (8), si ha:

$$\begin{cases} M = M(R_1, R_2) \\ N = N(R_1, R_2). \end{cases}$$

Accenniamo — per concludere — al fatto che l'equazione (10) può essere risolta graficamente, in modo da ottenere  $R_1$ , una volta fissato il valore di  $R_2$ .

Osserviamo che il secondo membro della (10) è nullo per  $R_1 = R_2$ , mentre per  $R_1 = 0$  risulta maggiore del primo membro (i calcoli sono stati eseguiti nell'ipotesi che il combustibile sia  $U^{235}$  puro ed il moderatore sia grafite): segue che esiste un valore di  $R_1$ , compreso tra zero ed  $R_2$ , per cui il secondo membro della (10) diviene uguale al primo.

**Bibliografia.**

- [1] A. PIGNEDOLI: *Sulla determinazione della densità neutronica critica nella teoria matematica della pila atomica a fissione*, Arch. Rational Mech. Anal., 7, 105-118 (1961).
- [2] S. GLASSTONE, M. C. EDLUND: *The elements of nuclear reactor theory*, D. van Nostrand, Princeton 1958.
- [3] A. M. WEINBERG, E. P. WIGNER: *The physical theory of neutron chain reactors*, The University of Chicago Press, Chicago 1958.
- [4] F. MAZZOLENI: *Ingegneria nucleare*, Hoepli, Milano 1960.

**S u m m a r y .**

---

We find the critical equation of a heterogeneous reactor, having a spherical fuel (of radius  $R_1$ ), surrounded by a moderator of a thickness  $(R_2 - R_1)$ . Certain hypothesis have been made in order to be able to find the critical equation by simple diffusion methods.

