Riv. Mat. Univ. Parma (2) 2 (1961), 61-66

LUIGI MERLI (*)

Un teorema di unicità locale per le equazioni differenziali ordinarie del primo ordine $x' = f(t, x)$. (**)

1. – È noto (1) che se R è l'insieme dei punti (t, x) definiti da $0 < t \leqslant a$, $-b \leqslant x \leqslant b$, $b > 0$ ed R_0 indica l'insieme dei punti di R con l'aggiunta del punto $(0, 0)$, nella ipotesi che $f(t, x)$ risulti continua e limitata in R, è possibile determinare un $t_0 > 0$, sufficientemente piccolo, tale che in $0 \leqslant t \leqslant t_0$ esiste almeno una soluzione $x = x(t)$ dell'equazione differenziale

$$x' = f(t, x)\,, \tag{1}$$

soddisfacente la condizione iniziale

$$x(0) = 0\,. \tag{2}$$

È sufficiente che la $f(t, x)$ soddisfi la condizione

$$|\,f(t, x_1) - f(t, x_2)\,| \leqslant \frac{|\,x_1 - x_2\,|}{t}\,, \tag{3}$$

quando (t, x_1) e (t, x_2) appartengono ad R, perchè tale soluzione risulti unica in un intervallo $0 \leqslant t \leqslant t^0 \leqslant t_0$.

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università, Firenze.

(**) Ricevuto il 9-VI-1961.

(1) Cfr. G. SANSONE, *Equazioni differenziali nel campo reale*, vol. II, Zanichelli, Bologna, (1948), p. 102.

È questo il classico teorema di unicità di NAGUMO ed è pure noto che la (3), non può migliorarsi nel senso che se ad essa si sostituisce l'altra

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leqslant L \frac{|x_1 - x_2|}{t}, \tag{4}$$

con $L > 1$, si hanno esempi di equazioni (1) per le quali non vale più l'unicità della soluzione, con la condizione iniziale (2).

Aggiungendo però alla (4) la condizione

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leqslant M |x_1 - x_2|^\alpha, \tag{5}$$

con $0 < \alpha < 1$, M costante positiva assegnata, $L(1 - \alpha) < 1$, KRASNOSELSKII e KREIN ([2]) hanno potuto dimostrare recentemente che sussiste ancora l'unicità della soluzione (senza che debba necessariamente risultare $L \leqslant 1$).

Tali condizioni sono state ulteriormente gen raliz ate da O. KOOI ([3]) che, oltre alla (4), ha posto per $f(t, x)$ *continua* e *limitata* in R, la condizione

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leqslant M \frac{|x_1 - x_2|^\alpha}{t^\beta}, \tag{6}$$

M costante positiva assegnata, $0 < \alpha < 1$, $\beta < \alpha$, $L(1 - \alpha) < 1 - \beta$. Tali condizioni, che si riconducono alle precedenti per $\beta = 0$, hanno permesso al KOOI di dimostrare ancora l'unicità della soluzione, insieme all'esistenza ottenuta col metodo delle approssimazioni successive di PICARD. È essenziale però, nella dimostrazione dell'unicità di KOOI, che la $f(t, x)$ risulti limitata nell'insieme $0 \leqslant t \leqslant a$, $-b \leqslant x \leqslant b$.

Scopo di questa Nota è di far vedere come sia possibile togliere tale restrizione senza che venga meno l'unicità locale della soluzione della (1), in condizioni per il resto simili a quelle date da O. KOOI.

A tale scopo noi dimostreremo il seguente *teorema di unicità*:

Sia R l'insieme dei punti (t, x) definiti da $0 < t \leqslant a$, $-b \leqslant x \leqslant b$, $b > 0$, e indichiamo con R_0 l'insieme dei punti di R con l'aggiunta del punto $(t, x) = (0, 0)$. Se $f(t, x)$ è una funzione continua in R_0 e soddisfacente alle condizioni

---

([2]) M. A. KRASNOSELKII e S. G. KREIN, *On a class of uniqueness theorems for the equation $y' = f(x, y)$*, « Uspehi Mat. Nauk (N.S.) », 11, n. I, 67 (1956), 209-213.

([3]) O. KOOI, *The method of successive approximations and a uniqueness theorem of Krasnoselskii and Krein in the theory of differential equations*, Nederl. Aked. Wetensch. Indag. Math., **20**, (1958), 322-327.

$$| f(t,\ x_1) - f(t,\ x_2) | \leqslant L \frac{| x_1 - x_2 |}{t}, \quad (t < 0), \tag{7}$$

$$| f(t,\ x_1) - f(t,\ x_2) | \leqslant M \frac{| x_1 - x_2 |^\alpha}{t^\beta}, \tag{8}$$

M costante positiva, con $0 \leqslant \beta \leqslant \alpha \leqslant 1$, ed

$$L \leqslant 1 + \alpha - \beta, \tag{9}$$

esisterà un $t_0 > 0$ avente la proprietà che l'equazione (1), *con la condizione iniziale* (2), *non può avere più di una soluzione in $0 \leqslant t \leqslant t_0$.*

2. – In primo luogo ricorderemo un noto (4) lemma fondamentale del quale dovremo fare uso per la dimostrazione del teorema enunciato. Sia $y(t)$ una funzione continua e positiva definita per $0 \leqslant t < \infty$ e soddisfacente la condizione, per $t > 0$

$$y(t) \leqslant \int_0^t k(t,\ s)\, y(s)\, \mathrm{d}s, \quad y(0) = 0, \tag{10}$$

essendo $k(t,\ s) > 0$ per $t > 0$, $0 < s \leqslant t$, $k(0,\ 0) \geqslant 0$, e tale che risulti identicamente per $t > 0$,

$$\int_0^t k(t,\ s)\, \mathrm{d}s \leqslant 1\,. \tag{11}$$

È allora possibile determinare un $t_0 > 0$ tale che, per $0 \leqslant t \leqslant t_0$, si ha identicamente $y(t) \equiv 0$.

3. – Procederemo ora alla dimostrazione del teorema osservando che l'equazione (1) può essere scritta, tenuto conto della condizione iniziale (2), nella forma

$$x(t) = \int_0^t f(s,\ x(s))\, \mathrm{d}s, \tag{12}$$

(4) Cfr. L. MERLI, *Sul teorema di unicità per il problema di Cauchy relativo all'equazione differenziale* $x^{(n)} = f\,(t,\ x,\ x^{(1)},\ \ldots,\ x^{(n-1)})$, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. (8), **22**, (1957), 580-586.

e se $x_1(t)$ e $x_2(t)$ sono due eventuali soluzioni dall'equazione data, ad essa soddisfacenti in $0 \leqslant t \leqslant t^0$, si ha

$$(13) \qquad | x_1(t) - x_2(t) | \leqslant \int_0^t | f(s, x_1(s)) - f(s, x_2(s)) | ds .$$

In base alle condizioni del teorema, posto

$$| x_1(t) - x_2(t) | = \varepsilon(t)\, t, \quad \varepsilon(0) = 0 ,$$

risulterà $\varepsilon(t)$ continua, con $\lim\limits_{t\to 0} \varepsilon(t) = 0$, e pertanto, sostituendo nella (13), tenuto conto della (8), si avrà

$$| x_1(t) - x_2(t) | \leqslant M \int_0^t \varepsilon^\alpha(s)\, s^{\alpha-\beta}\, ds,$$

ossia

$$| x_1(t) - x_2(t) | \leqslant M \cdot \varepsilon^\alpha(\bar{t}) \frac{t^{1+\alpha-\beta}}{1+\alpha-\beta},$$

dove $\bar{t}$ indica un conveniente valore compreso tra 0 e t.

Potremo porre in conseguenza

$$(14) \qquad | x_1(t) - x_2(t) | = \omega(t)\, t^{1+\alpha-\beta}, \quad t > 0,$$

con $\lim\limits_{t\to 0} \omega(t) = 0$ e se definiamo $\omega(0) = 0$, la $\omega(t)$ risulterà continua anche nel punto $t = 0$.

Tenuto conto ora della (7), in base alla (14), si ha

$$|x_1(t) - x_2(t)| \leqslant L \int_0^t \omega(s)\, s^{\alpha-\beta}\, ds,$$

ossia

$$\omega(t) \leqslant L t^{-1-(\alpha-\beta)} \int_0^t \omega(s)\, s^{\alpha-\beta}\, ds.$$

Se poniamo

$$k(t, s) = L\, t^{-1-(\alpha-\beta)}\, s^{\alpha-\beta} ,$$

sarà

$$\omega(t) \leqslant \int_0^t k(t,\ s)\ \omega(s)\ \mathrm{d}s\ .$$

Ma

$$\int_0^t k(t,\ s)\ \mathrm{d}s\ =\ Lt^{-1-(\alpha-\beta)} \int_0^t s^{\alpha-\beta}\ \mathrm{d}s\ = \frac{L}{1+\alpha-\beta}\,,$$

per cui, tenuto conto della (9), risulterà

$$\int_0^t k(t,\ s)\ \mathrm{d}s \leqslant 1\ .$$

Applicando allora il lemma ricordato, esisterà un t_0 tale che, per $0 \leqslant t \leqslant t_0$ sarà identicamente $\omega(t) = 0$ e quindi, in base alla (14),

$$x_1(t) \equiv x_2(t)$$

come volevasi dimostrare.

Summary.

An unicity theorem for a differential equation of the first order, $y' = f(x,\ y)$, is proved.