Riv. Mat. Univ. Parma (2) 2 (1961), 91-114

GIOVANNI BATTISTA RIZZA (*)

Teoremi di curvatura in una V_{2n} quasi hermitiana. (**) (1)

1. - Nel problema generale di introdurre, per le sottovarietà di una varietà V_{2n} quasi hermitiana, opportune nozioni di curvatura legate alla struttura quasi complessa della varietà ambiente, un primo risultato è stato ottenuto da E. MARTINELLI nel 1956 con riferimento alle superficie caratteristiche di una V_{2n} kähleriana (2).

I risultati del presente lavoro costituiscono un ulteriore contributo al problema accennato.

La prima parte (§ II) è dedicata alle *linee* di una *varietà quasi hermitiana*. Precisamente, per una linea C di V_{2n}, accanto alla *curvatura ordinaria* c (curvatura geodetica), che deriva dalla considerazione di un campo tangenziale $\mathfrak{T}$ di C, viene definita al n. 6 una *curvatura associata* c_a, dipendente dal campo $\tilde{\mathfrak{T}}$, ottenuto da $\mathfrak{T}$ mediante la trasformazione J della struttura quasi complessa di V_{2n}.

Se, nelle considerazioni che portano alle curvature c, c_a, agli angoli ordinari tra vettori si sostituiscono gli *angoli hermitiani* (cioè gli angoli tra le relative faccette caratteristiche) (3), si perviene alle definizioni delle *curvature hermitiane* K, K_a *ordinaria* e *associata* (n. 7).

Infine, se, procedendo in modo analogo a quello ben noto che conduce alla nozione di curvatura geodetica, in luogo delle direzioni tangenti si considerano

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università, Roma (Italia).

(**) Ricevuto il 27 giugno 1961.

(1) Lavoro eseguito nell'ambito del Gruppo di Ricerca n. 37 del C.N.R. per l'anno 1960-61.

(2) Ved. lavoro [8] della bibliografia.

(3) La nozione di angolo hermitiano tra due vettori (da cui deriva quella già nota di ortogonalità hermitiana) è introdotta formalmente al n. 4 in relazione all'operazione di prodotto hermitiano; il teor. $\boldsymbol{T}_2$ ne segnala poi il significato geometrico.

le *faccette caratteristiche tangenti*, si ottiene la definizione di *curvatura caratteristica* K^* di C (n. **8**).

Tra le curvature considerate sussistono semplici relazioni (n. **9**).

La curvatura caratteristica K^* è la media quadratica delle curvature hermitiane K, K_a (teor. $\boldsymbol{T}_6$). Il teor. $\boldsymbol{T}_3$ del n. **4**, che pone in relazione l'angolo hermitiano e l'angolo ordinario di due vettori, permette poi di ricondurre le curvature hermitiane K, K_a alle curvature c, c_a (teor. $\boldsymbol{T}_5$). Queste, a lor volta, sono legate da una relazione assai semplice, suscettibile anche di interpretazione geometrica mediante la considerazione dei vettori di curvatura ordinaria e associata e delle faccette osculatrice e associata (teor. $\boldsymbol{T}_4$).

Nei teoremi accennati interviene in modo essenziale la nozione di *deviazione caratteristica*, da me introdotta nel lavoro [**11**], della quale viene qui segnalata una nuova proprietà in relazione alla trasformazione J (teor. $\boldsymbol{T}_1$).

Nel caso particolare che la varietà V_{2n} sia *kähleriana*, le curvature c, c_a coincidono e lo stesso avviene per le curvature K, K_a, K^* (n. **9**).

La seconda parte del lavoro (§ III) è invece dedicata alle *superficie caratteristiche* di una *varietà hermitiana*.

Se la varietà ambiente V_{2n} è addirittura una varietà kähleriana, la *curvatura caratteristica* per una superficie caratteristica Σ_2, introdotta da MARTINELLI nel lavoro [**8**] già ricordato, appare come valore comune delle curvature caratteristiche K^* di tutte le linee C di Σ_2 uscenti dal punto in considerazione.

Ciò suggerisce di esaminare, più in generale per una V_{2n} hermitiana (non necessariamente kähleriana), la distribuzione delle curvature dei tipi considerati, delle linee C di Σ_2, uscenti da un punto O.

Si riconosce allora che, delle curvature introdotte al § II, soltanto quella hermitiana associata K_a risulta *indipendente* dalle linee C per O e pertanto può riguardarsi come curvatura della superficie Σ_2 (*curvatura hermitiana associata*) (teor. $\boldsymbol{T}_7$).

Le curvature K, K^* delle linee C di Σ_2 uscenti da O dànno luogo invece a distribuzioni meno semplici. Sussiste però in entrambi i casi una relazione analoga alla classica formula di EULERO. Ciò permette di considerare per le superficie caratteristiche opportune *curvature medie* e *totali* (n. **13**).

In particolare, se la varietà ambiente è *kähleriana*, tutte le curvature introdotte si riducono alla curvatura caratteristica di MARTINELLI.

§ I. Premesse.

2. – VARIETÀ QUASI COMPLESSE. — Sia V_{2n} $(n \geq 2)$ una *varietà a struttura quasi complessa* di classe C^∞ (4), O un punto di V_{2n}, $\mathcal{U}$ un intorno di O su V_{2n} descritto dalle coordinate locali reali x^ν $(\nu \in \hat{I})$ (5). In relazione allo spazio vettoriale $T_{2n}(O)$ tangente a V_{2n} in O, insieme al *co-riferimento reale* dx^ν $(\nu \in \hat{I})$ si consideri un *co-riferimento isotropo*, costituito dalle forme pfaffiane $\vartheta^r (r \in I^*)$ (6).

In particolare, se V_{2n} è addirittura una *varietà complessa*, denotate con $\zeta^p = \xi^p + i\xi^{n+p}$ $(p \in I)$ coordinate locali complesse in un intorno $\mathcal{U}$ di O, alle x^ν, ϑ^r del caso generale possono sostituirsi risp. le ξ^ν, $d\zeta^r$ $(\nu \in \hat{I}\,;\ r \in I^*)$.

In corrispondenza ai co-riferimenti dx^ν, ϑ^r i tensori di V_{2n}, di origine O, sono dotati di componenti reali e di componenti isotrope (7). Per le prime sono usate lettere minuscole e indici greci, per le seconde lettere maiuscole e indici latini.

Nel seguito intervengono particolarmente vettori (elementi di $T_{2n}(O)$), indicati con a, b, c, ... e bivettori semplici (definiti da coppie ordinate di vettori (8), indicati con α, β, γ, ... Essi individuano rispettivamente gli elementi differenziali lineari reali di dimensione 1 e 2, cioè le direzioni e le faccette piane di origine O.

Come è noto il *tensore* h, soddisfacente alla:

$$h_\lambda^{\cdot\,\nu}\, h_\mu^{\cdot\,\lambda} = -\,\delta_\mu^\nu \qquad (\lambda,\ \mu,\ \nu \in \hat{I}) \tag{1}$$

il quale determina la struttura quasi complessa di V_{2n}, definisce in $T_{2n}(O)$ l'*automorfismo*:

$$J : a^\nu \to \tilde{a}^\nu = h_\mu^{\cdot\,\nu}\, a^\mu \tag{2}$$

che può estendersi in modo canonico all'anelloide dei tensori di V_{2n} in O (9).

Sugli spazi dei tensori di rango pari, dispari, J ha risp. carattere involutorio, anti-involutorio. Ad es. per i vettori: $\tilde{\tilde{a}} = -\,a$.

---

(4) Per le nozioni generali dei n. **2**, 3 ved. p. es. B ECKMANN, [**4**], I, II, III, VI; A LICHNEROWICZ, [**5**], V. E. MARTINELLI, [**7**]; B. SEGRE, [**16**], II, 8; K. YANO, [**18**], ed anche G. B. RIZZA, [**14**], n. **2**, **3**.

(5) L'insieme di indici 1, ..., $2n$ si denota con $\hat{I}$; mentre I, $\bar{I}$ indicano risp. gli insiemi 1, ..., n $\bar{1}$, ..., $\bar{n}$ ed I^* l'unione di I, $\bar{I}$.

(6) Ved. p. es. B. ECKMANN, [**4**], p. 10; E. MARTINELLI, [**10**], p. 7; A. WEIL, [**17**], p. 32.

(7) I tensori che si considerano sono *reali*. Ciò implica note condizioni per le componenti isotrope (Ved. p. es. E. MARTINELLI, [**10**], p. 5).

(8) Ved. p. es. E. CARTAN, [**3**], p. 5-8.

(9) Basta supporre che, sugli scalari, J si riduca all'identità.

L'automorfismo J induce una trasformazione, denotata anch'essa con J, per le direzioni e per le faccette. Le faccette unite nella trasformazione J si dicono *caratteristiche*. Una direzione (vettore a) individua una faccetta caratteristica (bivettore $a, \tilde{a}$) (10) (11).

3. – VARIETÀ QUASI HERMITIANE. — Sia ora V_{2n} dotata di metrica in accordo con la struttura quasi complessa. V_{2n} è dunque una varietà *quasi hermitiana* (12). Nell'intorno $\mathcal{U}$ di O la metrica $\mathcal{M}$ è espressa da:

$$ds^2 = g_{\mu\nu}\, dx^\mu\, dx^\nu = G_{pq}\, \vartheta^p\, \vartheta^q \tag{3}$$

ove $\mu, \nu \in \hat{I}$; $p, q \in I^*$ e $G_{pq} = 0$ per $p, q \in I$; $p, q \in \bar{I}$.

Conviene qui ricordare che, se α, β, λ sono i bivettori individuati dalle coppie $(\underset{1}{a}, \underset{2}{a})$, $(\underset{1}{b}, \underset{2}{b})$, $(\underset{1}{l}, \underset{2}{l})$, le uguaglianze:

$$\alpha \times \beta = \begin{vmatrix} \underset{1}{a} \times \underset{1}{b} & \underset{1}{a} \times \underset{2}{b} \\ \underset{2}{a} \times \underset{1}{b} & \underset{2}{a} \times \underset{2}{b} \end{vmatrix}; \quad \text{mis}^2\, \lambda = \lambda \times \lambda; \quad \cos \alpha\beta = \frac{\alpha \times \beta}{\text{mis}\, \alpha\ \text{mis}\, \beta} \tag{4}$$

definiscono risp. il *prodotto scalare* di α e β, la *misusa* di λ (area del parallelogramma di lati $\underset{1}{l}, \underset{2}{l}$) e l'*angolo* di α e β (angolo tra le faccette piane determinate da α e β) (13).

Utili nel seguito sono anche le *relazioni* (14):

$$\tilde{a} \times \tilde{b} = a \times b, \qquad a \times \tilde{b} + \tilde{a} \times b = 0 \tag{5}$$

e, in particolare, le:

$$\tilde{w} \times \tilde{w} = w \times w, \qquad w \times \tilde{w} = 0\,. \tag{6}$$

---

(10) Il termine italiano « faccetta caratteristica » equivale al termine inglese « holomorphic section ».

(11) Ved. p. es. G. B. RIZZA, [13], n. 6 e l'osservazione nella nota (3).

(12) E. MARTINELLI, [10], n. 6.

(13) E. CARTAN, [3], p. 5-9.

(14) G. B. RIZZA, [11], p. 663 e nota (3).

Dalla $(5)_1$ discende la permutabilità di J con le determinazioni metriche; può quindi scriversi « simbolicamente »:

$$[J,\ \mathcal{M}] = J\mathcal{M} - \mathcal{M}J = 0. \tag{7}$$

Dalla $(6)_2$ appare che J equivale ad un rotazione di $\pi/2$ di ogni vettore w nella faccetta caratteristica da esso definita (n. 2).

La struttura quasi hermitiana di V_{2n} permette, come è noto, di definire il *prodotto hermitiano* $a.b$ di due vettori a, b. Precisamente, introdotte componenti isotrope, è:

$$a.b = 2\,G_{p\bar{q}}\,A^{\bar{p}}\,B^{q} \qquad (p,\ q \in I)\ (^{15}) \tag{8}$$

Sussiste inoltre la *relazione* [16]:

$$a.b = a \times b + i\,\tilde{a} \times b \tag{9}$$

dalla quale, tenute presenti le (5), seguono subito le uguaglianze:

$$a.b = \overline{b.a} \tag{10}$$

$$\tilde{a}.\tilde{b} = a.b, \qquad a.\tilde{b} = -\tilde{a}.b = ia.b \tag{11}$$

che riassumono le proprietà formali del prodotto hermitiano.

In particolare, se a e b hanno prodotto hermitiano *reale*, cioè se $a.b = a \times b$ ovvero $\tilde{a} \times b = 0$, lo stesso accade per ogni coppia di vettori della faccetta a, b; questa dicesi pertanto *a prodotto hermitiano reale* (brevemente *p.h.r.*) [17][18]. Ogni faccetta p.h.r. è ortogonale alla faccetta che le corrisponde nella trasformazione J (n. 2); e viceversa.

È opportuno segnalare infine due osservazioni, che discendono facilmente dalle (11).

---

(15) Alcuni Autori ed io stesso nei lavori [11], [12], [13] hanno invece assunto come definizione: $a.b = 2G_{p\bar{q}}A^{p}\,B^{\bar{q}}$, tralasciando talora il fattore 2. Ciò tuttavia non influisce sulle nozioni geometriche di faccetta a prodotto hermitiano reale e di angolo hermitiano, di cui nel seguito.

(16) Cfr. E. MARTINELLI, [9], n. 10; G. B. RIZZA, [13], p. 7 e nota (3), tenendo conto però della precedente nota (15).

(17) Per la geometria delle faccette p.h.r. m-dimensionali ($m \leq n$) ved. G. B. RIZZA, [12], [13]; M. BRUNI, [2].

(18) Se è addirittura $a.b = 0$, i vettori a, b risultano anche ortogonali (*ortogonalità hermitiana*). Ved. J. A. SCHOUTEN, [15], p. 54; E. MARTINELLI, [9], p. 137.

O$_1$ – *Se* $\underset{2}{a} = \underset{2}{b} + \mu' \underset{1}{b} + \mu'' \underset{1}{\tilde{b}}$, $\underset{4}{a} = \underset{4}{b} + \nu' \underset{3}{b} + \nu'' \underset{3}{\tilde{b}}$ *con* $\mu', \mu'', \nu', \nu'' \in \boldsymbol{C}$, *risulta:*

$$\begin{vmatrix} \underset{1}{b}\cdot\underset{3}{b} & \underset{1}{b}\cdot\underset{4}{a} \\ \underset{2}{a}\cdot\underset{3}{b} & \underset{2}{a}\cdot\underset{4}{a} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \underset{1}{b}\cdot\underset{3}{b} & \underset{1}{b}\cdot\underset{4}{b} \\ \underset{2}{b}\cdot\underset{3}{b} & \underset{2}{b}\cdot\underset{4}{b} \end{vmatrix}$$

O$_2$ – *Se* $\underset{r}{b} = \beta'_r \underset{r}{c} + \beta''_r \underset{r}{\tilde{c}}$ *con* $\beta'_r, \beta''_r \in \boldsymbol{R}$ $(r=1,2,3,4)$, *posto* $\beta_r = \beta'_r + i\beta''_r$, *risulta:*

$$\begin{vmatrix} \underset{1}{b}\cdot\underset{3}{b} & \underset{1}{b}\cdot\underset{4}{b} \\ \underset{2}{b}\cdot\underset{3}{b} & \underset{2}{b}\cdot\underset{4}{b} \end{vmatrix} = \overline{\beta}_1 \overline{\beta}_2 \beta_3 \beta_4 \begin{vmatrix} \underset{1}{c}\cdot\underset{3}{c} & \underset{1}{c}\cdot\underset{4}{c} \\ \underset{2}{c}\cdot\underset{3}{c} & \underset{2}{c}\cdot\underset{4}{c} \end{vmatrix}$$

4. – Deviazione caratteristica - angolo hermitiano. — Il prodotto $\tilde{a} \times b$, che interviene nella (9), è legato all'angolo δ_σ di *deviazione caratteristica* della faccetta σ individuata da a, b. Precisamente:

$$\cos \delta_\sigma = \frac{1}{2} \frac{h_{\lambda\nu}\,\sigma^{\lambda\nu}}{\operatorname{mis} \sigma} = \frac{\tilde{a} \times b}{\operatorname{mis}(a, b)} \tag{12}$$

dove $h_{\lambda\nu} = g_{\mu\nu} h_\lambda^{\cdot\mu}$ e σ è un qualunque bivettore della faccetta omonima. Il prodotto $\tilde{a} \times b$, denotato anche con $a * b$, dicesi perciò *prodotto caratteristico*. Per una faccetta caratteristica (positivamente orientata) o a prodotto hermitiano reale si ha risp. $\delta_\sigma = 0$, $\pi/2$; e viceversa [19].

La natura quasi hermitiana della nozione di deviazione caratteristica, che appare nella (12) e più ancora nella definizione originaria del lavoro [**11**], è messa in evidenza dal teorema:

T$_1$ – *Tra l'angolo di due faccette* σ, $\tilde{\sigma}$ *corrispondenti nella trasformazione* J *del* n. **2** *e gli angoli* δ_σ, $\delta_{\tilde{\sigma}}$ *di deviazione caratteristica di* σ *e* $\tilde{\sigma}$, *sussiste la relazione:*

$$\cos \sigma \tilde{\sigma} = \cos^2 \delta_\sigma = \cos^2 \delta_{\tilde{\sigma}} \quad [20]. \tag{13}$$

---

[19] Per le nozioni e le proprietà accennate, ved. G. B. Rizza, [**11**], n. **3**, **8**; [**14**], n. **4**; E. Martinelli, [**9**], n. **10**.

[20] Ne discendono immediatamente le proprità geometriche delle faccette caratteristiche e p.h.r., in relazione a J, accennate ai n. **2**, **3**.

Indicati con a, b due vettori di σ, la relazione (13) si stabilisce facilmente a partire dalla $(4)_3$, tenendo conto delle (5) e della (12).

Conviene ora osservare che, come avviene per i prodotti ordinario e caratteristico, così anche al prodotto hermitiano si può associare un angolo. Sussiste infatti il teorema:

$\boldsymbol{T}_2$ – *Il prodotto hermitiano di due vettori a, b è legato all'angolo φ delle faccette caratteristiche individuate da a e da b; precisamente risulta:*

$$\cos\varphi = \frac{|\,a\,.\,b\,|^2}{\operatorname{mis}^2 a \ \operatorname{mis}^2 b}\,. \tag{14}$$

L'angolo φ si dirà *angolo hermitiano* di a e b.

La dimostrazione si ottiene in modo diretto a partire dalla $(4)_3$, riferita alle coppie a, $\tilde{a}$; b, $\tilde{b}$, tenendo conto successivamente delle (5) e della (9).

È ormai possibile stabilire il teorema:

$\boldsymbol{T}_3$ – *Assegnati i vettori a, b, tra l'angolo ordinario ϑ, l'angolo hermitiano φ di a e b e la deviazione caratteristica δ_σ della faccetta σ, determinata da a e da b, sussiste la relazione:*

$$\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\vartheta\,\sin\delta_\sigma\,. \tag{15}$$

La (15) si ottiene facilmente dalla:

$$|\,a\,.\,b\,|^2 = (a\times b)^2 + (\tilde{a}\times b)^2 \tag{16}$$

ovvia conseguenza della (9), tenendo presenti le definizioni di $\cos\varphi$, $\cos\vartheta$, $\cos\delta_\sigma$, e l'uguaglianza $\operatorname{mis}\sigma = \operatorname{mis}(a,\ b) = \operatorname{mis} a \operatorname{mis} b \sin\vartheta$ [21].

Dal teor. $\boldsymbol{T}_3$ discende immediatamente il corollario:

$\boldsymbol{C}_1$ – *Due vettori appartenenti ad una faccetta caratteristica hanno angolo hermitiano nullo; e viceversa. Due vettori ortogonali ed appartenenti ad una faccetta p.h.r. hanno angolo hermitiano uguale a $\pi/2$; e viceversa* [22].

---

[21] Gli angoli ϑ, δ_σ sono considerati in $0 \vdash\!\dashv \pi$; φ in $0 \vdash\!\dashv \pi/2$.

[22] Il risultato è in accordo con la nozione di *ortogonalità hermitiana*, di cui in [18].

§ II. - Curvature di una linea.

5. – Sia ora C una curva, uscente da O, sulla varietà quasi hermitiana V_{2n}, rappresentata in $\mathcal{U}$ dalle equazioni parametriche:

$$x^\nu = F^\nu(\tau) \qquad (\nu \in \hat{I}) \tag{17}$$

di classe C^2.

Denotato con $\mathfrak{S}$ il campo vettoriale $u^\nu(\tau) = \dfrac{dF^\nu}{d\tau}$, tangente a C in $\mathcal{U}$, e con u il vettore di $\mathfrak{S}$ nel punto O, il vettore $u d\tau$ definisce su C uno spostamento infinitesimo OO^*.

Si consideri ora la connessione indotta dalla metrica (connessione di LEVI-CIVITA) e siano L e δ, rispettivamente, gli operatori tensoriali di *trasporto parallelo* e di *differenziazione assoluta*, corrispondenti allo spostamento $O\,O^*$ (23)

In particolare, per un vettore v di origine O, le componenti reali di Lv in O^* sono:

$$Lv^\alpha = v^\alpha - \gamma^\alpha_{\nu\mu}\, v^\mu\, u^\nu\, d\tau\,. \tag{18}$$

Se $\mathcal{W}$ è un campo di vettori di classe C^1 su C e w è il vettore di $\mathcal{W}$ nel punto O, le componenti reali di δw in O sono:

$$\delta w^\alpha = \left(\frac{dw^\alpha}{d\tau} + \gamma^\alpha_{\mu\nu}\, w^\mu\, u^\nu\right) d\tau = \delta_u\, w^\alpha\, d\tau \qquad (\alpha,\ \mu,\ \nu \in \hat{I}) \tag{19}$$

ove le $\gamma^\alpha_{\mu\nu}$ sono gli ordinari simboli di CHRISTOFFEL.

Indicato poi con w^* il vettore del campo $\mathcal{W}$ in O^*, dalle (18) (19) discende (a meno di infinitesimi del secondo ordine rispetto a $d\tau$) la *relazione*:

$$w^* = Lw + \delta w\,. \tag{20}$$

È pure ben noto che il prodotto scalare e quindi le determinazioni metriche sono conservate nel trasporto parallelo; può scriversi «simbolicamente»:

$$[L,\ \mathcal{M}] = 0\,. \tag{21}$$

---

(23) Per le nozioni fondamentali sulle connessioni ved. p. es., E. BOMPIANI, [1], n. **1**, **2**; J. A. SCHOUTEN, [**15**], III, 1, 2, 3; K. YANO-S. BOCHNER, [**19**], 1, 6.

A questo punto conviene osservare che la struttura quasi complessa di V_{2n} permette di considerare, per ogni campo vettoriale $\mathfrak{W}$ sulla curva C, il campo trasformato mediante la J (n. 2), che verrà denotato con $\widetilde{\mathfrak{W}}$ e si dirà *campo associato* a $\mathfrak{W}$.

Dalle (6) discendono subito le relazioni:

$$\widetilde{w} \times \delta\widetilde{w} = w \times \delta w, \qquad w \times \delta\widetilde{w} + \widetilde{w} \times \delta w = 0 \tag{22}$$

utili nel seguito. In particolare, con riferimento al campo tangenziale $\mathfrak{T}$ ed a $\widetilde{\mathfrak{T}}$, se il parametro nella (17) è l'*arco* s ($\tau = s$), mis $u(s) = 1$; quindi

$$u \times \delta u = \widetilde{u} \times \delta\widetilde{u} = 0\,. \tag{23}$$

È poi naturale introdurre, accanto al differenziale assoluto δ, l'operatore tensoriale:

$$\delta^J = J^{-1}\,\delta\,J \tag{24}$$

che si dirà *differenziale associato*.

Come è noto, su di una V_{2n} hermitiana, gli operatori tensoriali L, δ non sono in generale permutabili con l'operatore J della struttura quasi complessa. Precisamente, si ha:

$$[J,\ L] = [\delta,\ J] = 0 \tag{25}$$

se e solo se V_{2n} è una *varietà kähleriana* (24).

6. – Curvatura ordinaria e associata. – Indicato ora con u^* il vettore del campo tangenziale $\mathfrak{T}$ nel punto O^* della curva C (n. 5) e con ds la lunghezza dell'arco OO^*, sia ϑ l'angolo tra u^* ed Lu.

Ciò posto, la *curvatura ordinaria* (*curvatura geodetica*) c di C nel punto O è definita dalla uguaglianza:

$$c = \lim_{ds \to 0} \frac{\vartheta}{ds} \tag{26}$$

---

(24) Per le nozioni generali sulle V_{2n} kähleriane si vedano i lavori citati nella nota (4). Per la proprietà enunciata cfr. p. es., B. Eckmann, [4], p. 17, 20, 21, tenendo presente anche il teorema di Newlander e Nirenberg.

La struttura quasi complessa di V_{2n} permette però di definire un altro tipo di curvatura in relazione al *campo associato* $\widetilde{\mathfrak{T}}$ del campo tangenziale $\mathfrak{T}$ (n. **5**).

Si consideri infatti, in analogia col caso precedente, l'angolo ϑ_a tra il vettore $\widetilde{u}^*$ del campo $\widetilde{\mathfrak{T}}$ in O^* ed il vettore $L\widetilde{u}$, ottenuto da $\widetilde{u}$ per trasporto parallelo lungo C da O ad O^*.

Si perviene così, in modo naturale, alla definizione di *curvatura associata* c_a della curva C nel punto O, espressa dall'uguaglianza:

$$c_a = \lim_{ds \to 0} \frac{\vartheta_a}{ds} \tag{27}$$

del tutto simile alla (26).

In particolare, se V_{2n} è una *varietà kähleriana* le curvature ordinaria e associata coincidono. Ciò è ovvia conseguenza delle (7), (25).

Per le curvature ordinaria e associata valgono risp. le *relazioni*:

$$\tag{28} \begin{gathered} c^2 = \frac{1}{(u \times u)^3} \begin{vmatrix} u \times u & u \times \delta_u u \\ \delta_u u \times u & \delta_u u \times \delta_u u \end{vmatrix}; \\ c_a^2 = \frac{1}{(\widetilde{u} \times \widetilde{u})^3} \begin{vmatrix} \widetilde{u} \times \widetilde{u} & \widetilde{u} \times \delta_u \widetilde{u} \\ \delta_u \widetilde{u} \times \widetilde{u} & \delta_u \widetilde{u} \times \delta_u \widetilde{u} \end{vmatrix} \end{gathered}$$

il significato di $\delta_u u$, $\delta_u \widetilde{u}$ risultando dalla (19).

Per stabilire le (28) si noti che, dal significato geometrico della misura di un bivettore (n. **3**) segue immediatamente:

$$\sin^2 \vartheta = \frac{\operatorname{mis}^2 (u^*, Lu)}{\operatorname{mis}^2 u^* \operatorname{mis}^2 Lu}; \qquad \sin^2 \vartheta_a = \frac{\operatorname{mis}^2 (\widetilde{u}^*, L\widetilde{u})}{\operatorname{mis}^2 \widetilde{u}^* \operatorname{mis}^2 L\widetilde{u}}.$$

In virtù delle proprietà espresse simbolicamente dalle (7), (21) i denominatori sono uguali tra loro e, passando al limite per $ds \to 0$, si riducono semplicemente ad $(u \times u)^2 = (\widetilde{u} \times \widetilde{u})^2$.

I numeratori, tenuto conto della (20), divengono:

$$\begin{vmatrix} u^* \times u^* & u^* \times Lu \\ Lu \times u^* & Lu \times Lu \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \delta u \times \delta u & \delta u \times Lu \\ Lu \times \delta u; & Lu \times Lu^* \end{vmatrix};$$

$$\begin{vmatrix} \widetilde{u}^* \times \widetilde{u}^* & \widetilde{u}^* \times L\widetilde{u} \\ L\widetilde{u} \times \widetilde{u}^* & L\widetilde{u} \times L\widetilde{u} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \delta\widetilde{u} \times \delta\widetilde{u} & \delta\widetilde{u} \times L\widetilde{u} \\ L\widetilde{u} \times \delta\widetilde{u} & L\widetilde{u} \times L\widetilde{u} \end{vmatrix}$$

e, divisi per $d\tau^2$, danno luogo, al limite, ai determinanti della (28).

Poichè $ds^2 = (u \times u)\, d\tau^2 = \widetilde{u} \times \widetilde{u})\, d\tau^2$, è ormai facile pervenire al risultato.

Una nuova espressione della curvatura associata c_a si ottiene considerando il *differenziale associato* δ^J, definito al n. **5**. Presisamente, risulta:

$$(28) \qquad c_a^2 = \frac{1}{(u \times u)^3} \begin{vmatrix} u \times u & u \times \delta_u^J u \\ \delta_u^J u \times u & \delta_u^J u \times \delta_u^J u \end{vmatrix} .$$

La (29) discende subito dalla $(28)_2$, tenuto conto del carattere anti-involutorio di J sui vettori (n. 2).

Il confronto delle $(28)_1$, (29) mostra che si passa dalla curvatura ordinaria alla curvatura associata semplicemente sostituendo al differenziale ordinario δ il differenziale associato δ^J.

Tenuta presente la definizione $(4)_2$ delle misura di un bivettore, le $(28)_1$, (29) possono anche scriversi così:

$$(30) \qquad c = \frac{\text{mis}\,(u,\ \delta_u u)}{\text{mis}^3\, u}, \qquad c_a = \frac{\text{mis}\,(u,\ \delta_u^J u)}{\text{mis}^3\, u} .$$

In particolare, se il parametro sulla curva C è l'*arco* s, cioè $\tau = s$, in virtù della (23) le (30) si riducono a:

$$(31) \qquad c = \text{mis}\,\frac{\delta u}{ds}, \qquad c_a = \text{mis}\,\frac{d\widetilde{u}}{ds} \quad ({}^{25}).$$

Intervengono nel seguito le faccette ω, ω_a individuate risp. dalle coppie di vettori u, $\delta_u u$; u, $\delta_u^J u$. Esse non dipendono dalla parametrizzazione di C. La prima è la *faccetta osculatrice* in O alla curva C [26]; la seconda si dirà invece *faccetta associata.*

7. – Curvatura hemitiana ordinaria e associata. — Come si è segnalato al n. **4**, per due vettori di V_{2n} è definito non soltanto l'angolo ordinario ma anche l'angolo hermitiano (angolo delle faccette caratteristiche per i vettori), il quale dipende in modo essenziale dalla struttura quasi hermitiana di V_{2n}.

È quindi naturale considerare, accanto agli angoli ordinari ϑ, ϑ_a, che hanno condotto alle curvature ordinaria e associata (n. **6**), anche gli *angoli hermitiani* φ, φ_a dei vettori u^*, Lu; $\widetilde{u}^*$, $L\widetilde{u}$.

---

[25] Per la $(31)_1$ cfr. p. es. J. A. Schouthen, **[15]**, p. 228.

[26] Posizione limite della faccetta u^*, Lu per $ds \to 0$. Ved. anche J. A. Schouten, **[15]**, p. 228.

Si perviene così a nuovi tipi di curvature per le linee di V_{2n}, legati alla struttura quasi hermitiana.

Precisamente, si dicono *curvature hermitiane* risp. *ordinaria* e *associata* della curva C di V_{2n}, nel punto O, le espressioni:

$$k = \lim_{ds \to 0} \frac{\varphi}{ds}, \qquad k_a = \lim_{ds \to 0} \frac{\varphi_a}{ds} \tag{32}$$

corrispondenti alle (26), (27).

In particolare, se V_{2n} è una *varietà kähleriana* le curvature hermitiane ordinaria e associata coincidono.

Infatti, in virtù della (7), su una V_{2n} quasi hermitiana le coppie u^*, Lu; $\widetilde{u}^*$, $\widetilde{Lu}$ hanno il medesimo angolo hermitiano (n. 4). Se poi V_{2n} è kähleriana dalla (25) segue $\widetilde{Lu} = L\widetilde{u}$. In definitiva risulta $\varphi = \varphi_a$ e quindi l'asserto.

Per le curvature hermitiane K, K_a definite dalla (32) si hanno espressioni analoghe alle (28). Precisamente sussistono le *relazioni*:

$$(33) \qquad \begin{aligned} K^2 &= \frac{2}{(u \cdot u)^3} \begin{vmatrix} u.u & u.\delta_u u \\ \delta_u u.u & \delta_u u.\delta_u u \end{vmatrix}; \\ K_a^2 &= \frac{2}{(\widetilde{u} \cdot \widetilde{u})^3} \begin{vmatrix} \widetilde{u}.\widetilde{u} & \widetilde{u}.\delta_u \widetilde{u} \\ \delta_u \widetilde{u}.\widetilde{u} & \delta_u \widetilde{u}.\delta_u \widetilde{u} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

A parte il fattore numerico, la struttura delle (33) è del tutto simile a quella delle (28), ma in luogo dei prodotti scalari intervengono ora i prodotti hermitiani.

Tenuto conto poi della (24), dalla $(33)_2$ discende immediatamente, per la curvatura hermitiana associata, la *relazione*:

$$K_a^2 = \frac{2}{(u \,.\, u)^3} \begin{vmatrix} u.u & u.\delta_u^J u \\ \delta_u^J u.u & \delta_u^J u.\delta_u^J u \end{vmatrix}$$

analoga alla $(33)_1$.

Per stabilire le (33) si precede così. Dalla definizione (14), si ha anzitutto:

$$\cos\varphi = \frac{|\, u^*.Lu \,|^2}{\text{mis}^2\, u^* \ \text{mis}^2\, Lu}, \qquad \cos\varphi_a = \frac{|\, \widetilde{u}^*.L\widetilde{u} \,|^2}{\text{mis}^2\, \widetilde{u}^* \ \text{mis}^2\, L\widetilde{u}}. \tag{34}$$

Si noti ora che, dalla (21) segue mis Lu = mis u, mis $L\tilde{u}$ = mis $\tilde{u}$ e che, a causa della (10), può scriversi:

$$|u^*.Lu|^2 = (u^*.Lu)(Lu.u^*), \qquad |\tilde{u}^*.L\tilde{u}|^2 = (\tilde{u}^*.L\tilde{u})(L\tilde{u}.\tilde{u}^*) .$$

Tenuto conto poi della (20) e, successivamente, delle (6), (21) dalle (34) si ottengono le:

$$\text{(35)} \quad \begin{cases} 2\sin^2\dfrac{\varphi}{2} = 1 - \cos\varphi = \dfrac{(u.u)(\delta u.\delta u) - (Lu.\delta u)(\delta u.Lu)}{\text{mis}^2\, u\ \text{mis}^2\, u^*} , \\[2ex] 2\sin^2\dfrac{\varphi_a}{2} = 1 - \cos\varphi_a = \dfrac{(\tilde{u}.\tilde{u})(\delta\tilde{u}.\delta\tilde{u}) - (L\tilde{u}.\delta\tilde{u})(\delta\tilde{u}.L\tilde{u})}{\text{mis}^2\,\tilde{u}\ \text{mis}^2\,\tilde{u}^*} . \end{cases}$$

Conviene notare che nella (35) i denominatori, uguali tra loro a causa della (7), passando al limite per $ds \to 0$ si riducono semplicemente a $(u \times u)^2 = (\tilde{u} \times \tilde{u})^2$ e cioè a $(u.u)^2 = (\tilde{u}.\tilde{u})^2$. D'altra parte i numeratori, divisi per $d\tau^2$ dànno luogo al limite ai determinanti, che intervengono nelle (33).

In conclusione, poichè $ds^2 = (u.u)d\tau^2 = (\tilde{u}.\tilde{u})\,d\tau^2$ dalle definizioni (32) derivano, ormai senza difficoltà, le (33).

8. – Curvatura caratteristica. — La nozione di curvatura geodetica di una linea C di una varietà riemanniana e, in particolare, la nozione elementare di curvatura in uno spazio euclideo, derivano sostanzialmente dalla considerazione delle direzioni tangenti in due punti O, O^* di C.

Appare quindi del tutto naturale, quando la varietà sia dotata di struttura quasi hermitiana, sostituire alle direzioni tangenti le *faccette caratteristiche tangenti* ([27]).

Si è condotti così a valutare l'angolo ψ tra la faccetta caratteristica tangente in O^*, e la faccetta, *in generale non più caratteristica*, ottenuta dalla faccetta caratteristica tangente in O mediante trasporto parallelo nella connessione di Levi-Civita.

Con le notazioni dei n. precedenti l'angolo ψ è precisamente l'angolo dei bivettori u^*, $\tilde{u}^*$; Lu, $L\tilde{u}$.

([27]) È questa l'idea geometrica seguita da E. Martinelli in [8] per definire la *curvatura caratteristica* di una superficie caratteristica in una V_{2n} kähleriana. Ved. in proposito i n. **11**, **13** del presente lavoro, ove sono anche segnalate alcune generalizzazioni al caso di varietà ambiente V_{2n} soltanto hermitiana.

L'espressione:

$$K^* = \lim_{ds \to 0} \frac{\psi}{ds} \tag{36}$$

si dirà *curvatura caratteristica* di C nel punto O.

In particolare, se V_{2n} è una *varietà kähleriana*, la curvatura caratteristica non differisce dalle curvature hermitiane definite al n. **7**.

In questa ipotesi dalla (25) segue $L\tilde{u} = \tilde{L}u$. È allora immediato riconoscere che gli angoli φ e ψ, definiti risp. ai n. **7**, **8**, sono uguali; e di qui segue l'asserto.

Alla stessa conclusione si può anche pervenire tenendo conto che su di una V_{2n} kähleriana il parallelismo di LEVI-CIVITA porta faccette caratteristiche in faccette caratteristiche ([28]).

Per la curvatura caratteristica K^*, definita dalla (36), si ha la *relazione*:

$$K^{*2} = \frac{1}{(u \times u)^3} \left[\begin{vmatrix} u \times u & u \times \delta_u u \\ \delta_u u \times u & \delta_u u \times \delta_u u \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \tilde{u} \times \tilde{u} & \tilde{u} \times \delta_u \tilde{u} \\ \delta_u \tilde{u} \times \tilde{u} & \delta_u \tilde{u} \times \delta_u \tilde{u} \end{vmatrix} + \right.$$
$$\left. - 2 \begin{vmatrix} u \times \tilde{u} & u \times \delta_u \tilde{u} \\ \delta_u u \times \tilde{u} & \delta_u u \times \delta_u \tilde{u} \end{vmatrix} \right]. \tag{37}$$

Per stabilire la (37) si procede così. In virtù della $(4)_3$, per l'angolo ψ, che che interviene nella definizione (36) della curvatura caratteristica K^* si ha subito:

$$\cos \psi = \frac{1}{\text{mis}\,(u^*, \tilde{u}^*)\ \text{mis}\,(Lu,\ L\tilde{u})} \begin{vmatrix} u^* \times Lu & u^* \times L\tilde{u} \\ \tilde{u}^* \times Lu & \tilde{u}^* \times L\tilde{u} \end{vmatrix}.$$

Tenuto conto ora della relazione (20) e, naturalmente, delle proprietà degli operatori J, L ricordate ai n. **3**, **5**, si perviene a:

$$2 \sin^2 \frac{\psi}{2} = \frac{1}{\text{mis}^2 u^*\ \text{mis}^2 u} \left[(u \times u)\,(\mathfrak{D}_1 + (\delta u \times \delta u)) + \mathfrak{D}_2\right] \tag{38}$$

([28]) Ved. E. MARTINELLI, [6], p. 7; G. B. RIZZA, [14], p. 5.

ove:

$$\mathfrak{D}_1 = \delta u \times Lu - \delta\tilde{u} \times L\tilde{u}; \quad \mathfrak{D}_2 = (\delta u \times L\tilde{u})(\delta\tilde{u} \times Lu) - (\delta u \times Lu)(\delta\tilde{u} \times L\tilde{u}) .$$

Si noti ora che, dalla uguaglianza $u^* \times u^* = \tilde{u}^* \times \tilde{u}^*$, a causa delle (20), segue:

$$\mathfrak{D}_1 = \frac{1}{2}(\delta\tilde{u} \times \delta\tilde{u} - \delta u \times \delta u) .$$

In conclusione, tenuta presente la definizione (36) di K^*, dalla (38), divisa per $ds^2 = (u \times u)\, d\tau^2$, si ottiene, al limite, la *relazione*:

$$K^{*2} = \frac{1}{(u \times u)^3}\left[(u \times u)(\delta_u u \times \delta_u u + \delta_u \tilde{u} \times \delta_u \tilde{u}) + \right. \tag{39}$$
$$\left. + 2(\delta_u u \times \tilde{u})(\delta_u \tilde{u} \times u) - 2(\delta_u u \times u)(\delta_u \tilde{u} \times \tilde{u})\right] .$$

È poi facile riconoscere che, in virtù delle (5), (22), dalla (39) segue subito la (37).

9. – Teoremi sulle curvature. — Tra le curvature introdotte ai n. **6**, **7**, **8** per le curve di una varietà quasi hermitiana V_{2n} e denotate con c, c_a, K, K_a, K^*, si hanno diverse relazioni.

Precisamente, con riferimento ad un punto O di una curva C di V_{2n} sussistono i teoremi:

T_4 – *Le proiezioni ortogonali dei vettori di curvatura ordinaria e associata sulla faccetta caratteristica tangente sono uguali. In altra forma, vale la relazione*:

$$c \cos \delta_\omega = c_a \cos \delta_{\omega_a} \tag{40}$$

dove c, c_a *sono le curvature in considerazione e* δ_ω, δ_{ω_a} *le deviazioni caratteristiche delle faccette osculatrice e associata.*

T_5 – *Le curvature hermitiane* K, K_a *ordinaria e associata si esprimono mediante le curvature* c, c_a *ordinaria e associata e le deviazioni caratteristiche delle faccette osculatrice e associata. Precisamente*:

$$K = c\sqrt{2}\sin\delta_\omega, \qquad K_a = c_a\sqrt{2}\sin\delta_{\omega_a} . \tag{41}$$

T_6 – *La curvatura caratteristica K^* è la media quadratica delle curvature hermitiane ordinaria e associata. Si ha cioè:*

$$K^{*2} = \frac{K^2 + K_a^2}{2}. \tag{42}$$

Dai teoremi ora enunciati, tenuto conto di osservazioni precedenti (n. **6**, **7**, **8**), deriva in particolare che, *se V_{2n} è una varietà kähleriana le curvature considerate si riducono a due: quella ordinaria (geodetica) c e quella caratteristica K^*. Si ha infatti:*

$$c_a = c, \qquad k = k_a = K^*.$$

L'unica relazione significativa è:

$$K^* = c\sqrt{2}\,\sin\delta_\omega.$$

Ai teoremi $\boldsymbol{T}_4$, $\boldsymbol{T}_5$, $\boldsymbol{T}_6$ si perviene così.

La relazione (40) discende senza difficoltà dalla definizione (12) di deviazione caratteristica e dalle espressioni (30) delle curvature c, c_a tenendo presenti le (22).

Nell'ipotesi che il parametro τ sia l'arco s su C, si considerino poi i *vettori di curvatura* ordinaria e associata $\delta_u u$, $\delta_u' u$ nel punto O [29], i quali appartengono risp. alle faccette osculatrice e associata, sono ortogonali al vettore u tangente a C in O, ed hanno misure c, c_a [30].

Ciò premesso, denotata con α la faccetta caratteristica tangente u, $\tilde{u}$, gli angoli tra i vettori $\delta_u u$, $\tilde{u}$; $\delta_u' u$, $\tilde{u}$ equivalgono risp. agli angoli $\omega\alpha$; $\omega_a \alpha$ (n. **6**), i quali, per definizione [31], sono precisamente δ_ω, δ_{ω_a}.

Dalla (40), già ottenuta, discende quindi anche la prima parte dell'enunciato di $\boldsymbol{T}_4$.

Il teor. $\boldsymbol{T}_5$ è conseguenza del teor. $\boldsymbol{T}_3$ del n. **4**, il quale fornisce una relazione tra l'angolo hermitiano e l'angolo ordinario di due vettori.

---

(29) Cfr. p. es., J. A. Schuoten, [**15**], p. 228.

(30) L'ultima affermazione segue subito dalle (31), tenuto conto della (7).

(31) Si consideri la definizione originaria di deviazione caratteristica (G. B. Rizza, [**11**], p. 664-665).

Nel caso attuale si considerino successivamente le coppie di vettori u^*, Lu; $\tilde{u}^*$, $L\tilde{u}$. La (15) diviene allora:

$$\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\vartheta\sin\delta_{(u^*, Lu)}, \qquad \sin\frac{\varphi_a}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\vartheta_a\sin\delta_{(\tilde{u}^*, L\tilde{u})} \tag{43}$$

dove $\delta_{(u^*, Lu)}$, $\delta_{(\tilde{u}^*, L\tilde{u})}$ sono le deviazioni caratteristiche delle faccette u^*, Lu; $\tilde{u}^*$, $L\tilde{u}$ di origine O^*.

Queste, passando al limite per $ds \to 0$, dànno luogo alle faccette ω, $\tilde{\omega}_a$ (n. **6**) e, si noti, $\delta_{\tilde{\omega}_a} = \delta_{\omega_a}$ in virtù della (7).

Tenuto conto poi delle definizioni (26), (27), (32) di c, c_a, K, K_a, e dell'osservazione precedente, la (43) divisa per ds, diviene al limite la (41).

Per ottenere il teor. $\boldsymbol{T}_6$, conviene utilizzare l'espressione (39) di K^*. A causa delle (22) i due ultimi addendi entro parentesi quadre possono scriversi così:

$$-(u \times \delta_u u)^2 - (u \times \tilde{\delta}_u u)^2 - (\tilde{u} \times \delta_u \tilde{u})^2 - (\tilde{u} \times \tilde{\delta}_u \tilde{u})^2$$

o anche:

$$-|u.\delta_u u|^2 - |\tilde{u}.\delta_u \tilde{u}|^2 = -(u.\delta_u u)(\delta_u u.u) - (\tilde{u}.\delta_u \tilde{u})(\delta_u \tilde{u}.\tilde{u})$$

in virtù della (16) e della (10). Tenuto conto allora della (33), si perviene subito alla (42).

§ III. - Curvature di una superficie caratteristica.

10. – Qui e nel seguito la varietà ambiente V_{2n} viene supposta *hermitiana* (32). Sia O un punto di V_{2n} e Σ_2 una *superficie caratteristica* per O in V_{2n} (33).

Introdotte coordinate locali isotrope ζ^p, $\zeta^{\bar{p}}$ $(p \in I)$ (34) in un intorno $\mathcal{U}$ di O (n. **2**), la superficie Σ_2 rappresentata in $\mathcal{U}$ dalle equazioni:

$$\zeta^p = f^p(t) \qquad \text{(c.c.)} \qquad (^{35}) \tag{44}$$

con $f^p(t)$ funzioni *olomorfe* del parametro complesso $t = \tau_1 + i\tau_2$ $(\tau_1, \tau_2 \in \boldsymbol{R})$.

---

(32) Per le nozioni generali sulle varietà hermitiana si vedano i lavori citati nella nota (4).

(33) Per le generalità sulle superficie caratteristiche ved. p. es. B. SEGRE; [**16**], n. **80**; E. MARTINELLI, [**10**], p. 13-14.

(34) Nel seguito è sottinteso che gli indici appartengono all'insieme I.

(35) Il simbolo (c.c.) indica l'equazione complessa coniugata. Cfr. p. es. A. LICHNEROWICZ, [**5**], p. 236-237.

Siano $\mathfrak{V}_1$, $\mathfrak{V}_2$ i campi vettoriali:

$$(45) \qquad V_1^p(\tau_1, \tau_2) = \frac{\partial f^p}{\partial \tau_1}, \quad (\text{c.c.}); \qquad V_2^p(\tau_1, \tau_2) = \frac{\partial f^p}{\partial \tau_2}, \quad (\text{c.c.})$$

tangenti risp. alle linee coordinate τ_1, τ_2 della superficie Σ_2.

In virtù delle condizioni di monogeneità:

$$(46) \qquad \frac{\partial f^p}{\partial \tau_1} + i \frac{\partial f^p}{d\tau_2} = 0, \qquad (\text{c.c.})$$

si riconosce subito che, in ogni punto P di Σ_2 in $\mathcal{U}$, i vettori $v_1(\tau_1, \tau_2)$, $v_2(\tau_1, \tau_2)$, di componenti isotrope (45), sono ortogonali e di uguale lunghezza.

D'altra parte, il piano tangente a Σ_2 in P è, per ipotesi, caratteristico. Tenuta presente una osservazione del n. 3 relativa alla trasformazione J si può quindi porre:

$$(47) \qquad v_1(\tau_1, \tau_2) = v(\tau_1, \tau_2); \qquad v_2(\tau_1, \tau_2) = \tilde{v}(\tau_1, \tau_2).$$

Risulta cioè:

$$(48) \qquad \mathfrak{V}_2 = \tilde{\mathfrak{V}}_1.$$

I campi $\mathfrak{V}_1$, $\mathfrak{V}_2$ sono dunque *campi associati* su Σ_2 ([36]).

Nel punto O i vettori di $\mathfrak{V}_1$, $\mathfrak{V}_2$ si indicano semplicemente con v, $\tilde{v}$.

Sia ora C una curva della superficie caratteristica Σ_2, uscente da O, rappresentata in $\mathcal{U}$, in coordinate curvilinee τ_2, τ_2, dalle equazioni:

$$(49) \qquad \tau_1 = \tau_1(\tau), \qquad \tau_2 = \tau_2(\tau)$$

con $\tau_1(\tau)$, $\tau_2(\tau)$ funzioni della classe C^2 del parametro reale τ.

Indicato con $\mathfrak{V}$ il campo vettoriale tangente alla curva C in $\mathcal{U}$, costituito dai vettori $u(\tau)$ di componenti isotrope:

$$(50) \qquad U^p(\tau) = \frac{df^p}{d\tau}, \qquad (\text{c.c.})$$

sia u il vettore di $\mathfrak{V}$ relativo al punto O (n. 5).

([36]) Ved. al n. 5 la corrispondente nozione con riferimento ad una curva C.

Per ogni campo vettoriale $\mathcal{W}$ su C, le componenti isotrope in O del differenziale assoluto δw del vettore w di $\mathcal{W}$ in O, per uno spostamento lungo C, sono:

$$(51)\qquad \begin{aligned} \delta W^p &= \delta_u W^p \, d\tau = \\ &= \left(\frac{dW^p}{d\tau} + \Gamma^p_{qr} W^q U^r + \Gamma^p_{\bar{q}r} W^{\bar{q}} U^r + \Gamma^p_{q\bar{r}} W^q U^{\bar{r}}\right) d\tau; \qquad \text{(c.c.)} \end{aligned}$$

dove le Γ sono i simboli di CHRISTOFFEL relativi alle coordinate locali isotrope ζ^p, $\zeta^{\bar{p}}$ ([37]).

Introdotto poi il campo associato $\widetilde{\mathcal{W}}$ (n. **5**), dalla (51) segue immediatamente:

$$(25)\qquad \delta_u W^p + \tilde{\delta}_u \widetilde{W}^p = \frac{dW^p}{d\tau} + i\frac{d\widetilde{W}^p}{d\tau} + 2\Gamma^p_{\bar{q}r} W^{\bar{q}} U^r; \qquad \text{(c.c.)}$$

Si considerino ora sulla superficie Σ_2 le linee coordinate $\underset{1}{C}$, $\underset{2}{C}$ uscenti da O.

Tenuto conto delle condizioni di monogeneità (46), dalle (51) deriva subito:

$$(53)\qquad \delta_v \tilde{v} = \delta_{\tilde{v}} v$$

Posto:

$$K_u W^p = 2\, \Gamma^p_{\bar{q}r} W^{\bar{q}} U^r, \qquad \text{(c.c.)}$$

a causa delle (46) risulta:

$$(54)\qquad K_v v = K_{\tilde{v}} \tilde{v}\ .$$

Dalla (52), sempre in virtù delle (46), seguono poi le relazioni:

$$(55)\qquad \delta_v v = -\tilde{\delta}_v \tilde{v} + K_v v, \qquad \delta_{\tilde{v}} \tilde{v} = \tilde{\delta}_{\tilde{v}} v + K_{\tilde{v}} \tilde{v}$$

e da queste, tenute presenti le (53), (54), l'uguaglianza:

$$(56)\qquad \delta_v v - \delta_{\tilde{v}} \tilde{v} = -2\tilde{\delta}_v \tilde{v}$$

utili nel seguito.

([37]) Ved. p. es. K. YANO-S. BOCHNER, [**19**], p. 122.

11. – CURVATURA HERMITIANA ASSOCIATA. – Le premesse del n. **10** permettono ora di stabilire il teorema:

T$_7$ – *In una varietà hermitiana V_{2n}, le linee di una superficie caratteristica, uscenti da un punto, hanno tutte la medesima curvatura hermitiana associata.*

È naturale chiamare *curvatura hermitiana associata* di una superficie caratteristica Σ_2, in un punto O, il valore comune delle curvature K_a delle sue linee per O (n. **7**).

Prima di passare alla dimostrazione del teor. ***T***$_7$, sono opportune alcune osservazioni.

Sia, in particolare, V_{2n} una *varietà kähleriana*. Tenuto conto allora delle rispettive definizioni ([38]), è facile riconoscere che *la curvatura caratteristica introdotta da* E. MARTINELLI *per una superficie caratteristica Σ_2 in un punto O, appare come valore comune delle curvature caratteristiche delle linee di Σ_2 per O.*

Ciò premesso, è immediato rilevare che il teor. ***T***$_7$ rappresenta una estensione, al caso di una V_{2n} hermitiana, della proprietà delle curve di Σ_2, che interviene nel risultato precedente, e che la nozione sopra introdotta, di curvatura hermitiana associata di una superficie caratteristica Σ_2 di una V_{2n} hermitiana generalizza la nozione di curvatura caratteristica di MARTINELLI.

Infatti, come si è segnalato al n. **9**, nel caso kähleriano, la curvatura hermitiana associata K_a di una linea C si riduce alla curvatura caratteristica K^*.

Conviene infine notare esplicitamente che, per una varietà V_{2n} hermitiana, *non sussiste* l'analogo del teor. ***T***$_7$ con riferimento alle curvature caratteristiche delle linee di Σ_2, presentando queste una distribuzione più complicata, e lo stesso avviene per le curvature hermitiane ordinarie (n. **13**).

12. – Per la dimostrazione del teor. ***T***$_7$ si procede così.

Come al n. **10** si consideri, in una V_{2n} hermitiana, una curva C, appartenente ad una superficie caratteristica Σ_2 ed uscente da un punto O.

Tenuto conto delle (50), (45), delle equazioni (49) e dell'osservazione (47), in ogni punto di C dell'intorno $\mathcal{U}$ di O risulta:

$$u(\tau) = \lambda(\tau)\, v(\tau_1(\tau),\ \tau_2(\tau)) + \mu(\tau)\, \tilde{v}(\tau_1(\tau),\ \tau_2(\tau)) \tag{57}$$

ove $\lambda(\tau) = \dfrac{d\tau_1}{d\tau}$, $\mu(\tau) = \dfrac{d\tau_2}{d\tau}$.

([38]) Ved. E. MARTINELLI, [8], p. 269 e il n. 8 del presente lavoro.

Ciò premesso, per la curvatura hermitiana associata K_a della curva C in O, in virtù della (57), tenute presenti le (11) e la osservazione $\boldsymbol{O}_2$ del n. **3**, dalla $(33)_2$ segue:

$$K_a^2 = 2\,\frac{(\lambda^2+\mu^2)^{-2}}{(v\cdot v)^3}\begin{vmatrix} v.v & v.\delta_u\tilde{u} \\ \delta_u\tilde{u}.v & \delta_u\tilde{u}.\delta_u\tilde{u}\end{vmatrix}. \tag{58}$$

Indicate poi risp. con λ, μ e con λ', μ' le funzioni $\lambda(\tau), \mu(\tau)$ e le loro derivate prime calcolate in O, e tenuto conto della (57) e della (51), si ottiene, nel punto O la relazione:

$$\delta_u\tilde{u} = -\mu\,\delta_u v + \lambda\,\delta_u\tilde{v} - \mu' v + \lambda'\tilde{v}.$$

Posto allora:

$$E_a = -\mu\,\delta_u v + \lambda\,\delta_u\tilde{v}$$

in virtù dell'osservazione $\boldsymbol{O}_1$ del n. **3** la (58) diviene:

$$K_a^2 = 2\,\frac{(\lambda^2+\mu^2)^{-2}}{(v.v)^3}\begin{vmatrix} v.v & v.E_a \\ E_a.v & E_a.E_a\end{vmatrix}. \tag{59}$$

Si noti ora che, tenute presenti le (57), (51) e, successivamente, le (53), (56), risulta:

$$E_a = -\lambda\mu\,\delta_v v - \mu^2\,\delta_{\tilde{v}} v + \lambda^2\,\delta_v\tilde{v} + \lambda\mu\,\delta_{\tilde{v}}\tilde{v} = (\lambda^2-\mu^2)\,\delta_v\tilde{v} + 2\lambda\mu\,\widetilde{\delta_v\tilde{v}}. \tag{60}$$

In virtù dell'osservazione $\boldsymbol{O}_2$ del n. **3**, la (59) si riduce quindi a:

$$K_a^2 = \frac{2}{(v\cdot v)^3}\begin{vmatrix} v.v & v.\delta_v\tilde{v} \\ \delta_v\tilde{v}.v & \delta_v\tilde{v}.\delta_v\tilde{v}\end{vmatrix}. \tag{61}$$

Poichè nell'espressione a secondo membro della (61) non intervengono i parametri λ, μ, la curvatura K_a risulta *indipendente* dalla linea C considerata.

È così dimostrato il teor. $\boldsymbol{T}_7$ [39].

---

[39] Alla stessa conclusione si perviene anche notando che, a causa delle (11), l'espressione a secondo membro è precisamente la curvatura hermitiana associata della linea coordinata $\underset{1}{C}$ nel punto O.

13. – Curvature medie e totali. — Si è accennato nella prefazione e al **n. 11** che, nel caso di una V_{2n} hermitiana, per la curvature caratteristiche ed hermitiane ordinarie delle curve C di una superficie caratteristica Σ_2 uscenti da un punto O, non si hanno teoremi analoghi a $\boldsymbol{T}_7$.

In questo numero è esaminata la distribuzione delle curvature hermitiane ordinarie K (n. **7**). Dal risultato, tenuto conto del teor. $\boldsymbol{T}_7$ e della relazione $(42)_7$ si otterrà anche la distribuzione delle curvature caratteristiche K^* (n. **8**).

Dalla definizione $(33)_1$ della curvatura K, procedendo come al n. **12**, si perviene senza difficoltà alla relazione:

$$K^2 = 2\,\frac{(\lambda^2+\mu^2)^{-2}}{(v.v)^3}\begin{vmatrix} v.v & v.E \\ E.v & E.E \end{vmatrix} \tag{62}$$

analoga alla (59).

L'espressione E, in virtù delle (53), (54), (55), può scriversi:

$$E = 2\lambda\mu\,\delta_v\tilde{v} + (\mu^2 - \lambda^2)\,\tilde{\delta}_v\tilde{v} + (\mu^2+\lambda^2)\,K_v v\,. \tag{63}$$

Posto:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} v.v & v.\delta_v v \\ \delta_v v.v & \delta_v v.\delta_v v \end{vmatrix}, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} v.v & v.K_v v \\ K_v v.v & K_v v.K_v v \end{vmatrix}$$

ed indicati risp. con D', D'' la parte reale e il coefficiente dell'immaginario di:

$$\Delta = \begin{vmatrix} v.v & v.\delta_v\tilde{v} \\ K_v v.v & K_v v.\delta_v\tilde{v} \end{vmatrix}$$

tenuta presente la (63) e l'oss. $\boldsymbol{O}_2$ del n. **3**, della (62) segue:

$$K^2 = 2\,\frac{(\lambda^2+\mu^2)^{-1}}{(v.v)^3}\left[(\lambda^2+\mu^2)(\Delta_1+\Delta_2) + 2\,(2\lambda\mu D' + (\mu^2-\lambda^2)\,D'')\right].$$

Introdotto poi l'angolo α tra la tangente alla linea C in considerazione e la tangente alla linea coordinata $\underset{1}{C}$ nel punto O di Σ_2, poichè:

$$\lambda = \varrho\cos\alpha \qquad \mu = \varrho\sin\alpha$$

si ottiene, in definitiva, la *relazione*:

$$K^2 = \frac{2}{(v.v)^3}\left[\Delta_1 + 2\,(D' \sin 2\alpha + D'' \cos 2\alpha) + \Delta_2\right] \tag{64}$$

con Δ_1, Δ_2, D', D'', indipendenti dalla linea C.

Alla (64) si può dare forma più semplice. Si riconosce infatti senza difficoltà che, al variare su Σ_2 della linea C, uscente da O, la curvatura hermitiana ordinaria K presenta un massimo K_M e un minimo K_m in corrispondenza a direzioni ortogonali.

Previo eventuale cambiamento del parametro complesso t nelle equazioni (44) della superficie caratteristica Σ_2, è lecito supporre che le linee coordinate $\underset{1}{C}$, $\underset{2}{C}$, uscenti da O, siano ivi tangenti alle direzioni estremanti.

La (64) si riduce allora semplicemente alla *relazione*:

$$K^2 = K_M^2 \cos^2 \alpha + K_m^2 \sin \alpha \tag{65}$$

analoga alla classica formula di EULERO.

L'analogia accennata suggerisce la considerazione, per le superficie caratteristiche, di una *curvatura hermitiana media* e di una *curvatura hermitiana totale* entrambe dipendenti dalla struttura complessa di V_{2n}.

Come si è accennato all'inizio di questo numero, si ottengono conclusioni dello stesso tipo anche per le curvature caratteristiche delle curve C di Σ_2, uscenti al punto O. In particolare, le direzioni estremanti coincidono con quelle del caso precedente.

Per una superficie caratteristica potranno quindi essere introdotte anche una *curvatura caratteristica media* e una *curvatura caratteristica totale.*

È immediato riconoscere che, se V_{2n} è una *varietà kähleriana*, le curvature medie e totali di cui sopra si riducono alla curvatura caratteristica di MARTINELLI (n. **11**).

Bibliografia.

[1] E. BOMPIANI, *Connessioni affini e geometria riemanniana* Rend. di Mat. e Appl. (1951).

[2] M. BRUNI, *Su alcuni sistemi di sottospazi di uno spazio hermitiano* Rend. di Mat. e Appl. (1951).

[3] E. CARTAN, *Leçons sur la Géometrie des espaces de Riemann,* 2^{me} ed., Gauthier-Villars, Paris, (1951).

[4] B. ECKMANN, *Cours sur les variétés complexes*, Centro Internazionale Matematico Estivo C.I.M.E., Cremonese, Roma, (1956).

[5] A. LICHNEROWICZ, *Thèrie globale des connexions et des groupes d'holonomie*, Cremonese, Roma, (1955).

[6] E. MARTINELLI, *Qualche proprietà geometrica nelle varietà a struttura complessa*, Atti Accad. Ligure, **9**, (1953).

[7] E. MARTINELLI, *Sulle varietà a struttura complessa*, Ann. di Mat., **43**, (1957).

[8] E. MARTINELLI, *Sulla curvatura delle superficie caratteristiche in una varietà kähleriana*, Atti Accad. Naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. Fis. Mat., **21**, (1956).

[9] E. MARTINELLI. *Generalizzazione dei teoremi di minimo volume di Wirtinger a tutte le varietà kähleriane o quasi kähleriane*, Ann. Mat. Pura e Appl., **50**, (1960).

[10] E. MARTINELLI, *Sulle varietà a struttura complessa o quasi complessa*, Sem. Mat. Bari, **52-53**, (1960).

[11] G. B. RIZZA, *Deviazione caratteristica delle faccette piane di una varietà a struttura complessa*, Atti Accad. Naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. Fis. Mat., **24**, (1958).

[12] G. B. RIZZA, *Holomorphic deviation for the 2q-dimensional sections of complex analytic manifolds*, Arch. Math., **10**, (1959).

[13] G. B. RIZZA, *Deviazione caratteristica e proprietà locali delle 2q-faccette di una V_{2n} a struttura complessa*, Rend. Accad. Naz. dei XL **10**, (1959).

[14] G. B. RIZZA, *Deviazione caratteristica e proprietà globali sulle varietà quasi hermitiane*, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat., **30** (1961).

[15] J. A. SCHOUTEN, *Ricci-Calculus*, 2nd. ed., Springer, Berlin, (1954).

[16] B. SEGRE, *Forme differenziali e loro integrali*, I, II, Docet, Roma, (1951), (1955).

[17] A. WEIL, *Introduction à létude des variétés kählériennes*, Hermann, Paris (1958).

[18] K. YANO, *The theory of Lie derivatives, and its applications*, North-Holland, Amsterdam, (1955).

[19] K. YANO, S. BOCHNER, *Curvature and Betti numbers*, Ann. of Math. Studies, n. 32, Princeton Univ. Press, (1953).