

GIANFRANCO CAPRIZ (*)

Un problema di idrodinamica. (**)

I. - Generalità.

I moti di un liquido viscoso incompressibile che riempia interamente lo spazio compreso tra due cilindri indefiniti, l'uno ruotante entro l'altro, sono stati ripetutamente studiati: ad esempio sono famosi i lavori di G. I. TAYLOR sulla stabilità del moto alla Couette. Molte ricerche hanno avuto di mira risultati interessanti la teoria della lubrificazione: JEFFERY [1], DUFFING [2], REISSNER [3] e WANNIER [4] ⁽¹⁾ hanno esaminato in dettaglio il moto per il caso di cilindri uniformemente ruotanti intorno ai rispettivi assi (assi che son supposti paralleli ma non coincidenti) nell'ipotesi che siano trascurabili le forze di inerzia nel fluido.

Si è trattato, in quel caso, di risolvere le equazioni di STOKES

$$(1.1) \quad \begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= \eta \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= \eta \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right), \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0, \end{aligned}$$

(*) Indirizzo: 30 Greenfield Road, Stafford (Inghilterra).

(**) Ricevuto il 15 Giugno 1961.

⁽¹⁾ I numeri in neretto e tra parentesi quadra si riferiscono alla Bibliografia posta a termine del lavoro. Gli Autori citati sono quelli i cui lavori sono di più facile consultazione. Ma la prima trattazione completa pare sia dovuta a JUKOSWKY e TSCHAPLYGIN: si vedano i riferimenti a pag. 387 del volume per il 1887 dei Fortschr. Phys. ed a pag. 766 del volume per il 1904 dei Fortschr. Math. L'analisi di B. DUTT nel Bull. Calcutta Math. Soc., 10 (1919), 43 è viziata da un errore; corretti sono invece i risultati di S. C. MITRA nello stesso Bulletin, 14 (1924), 151-160.

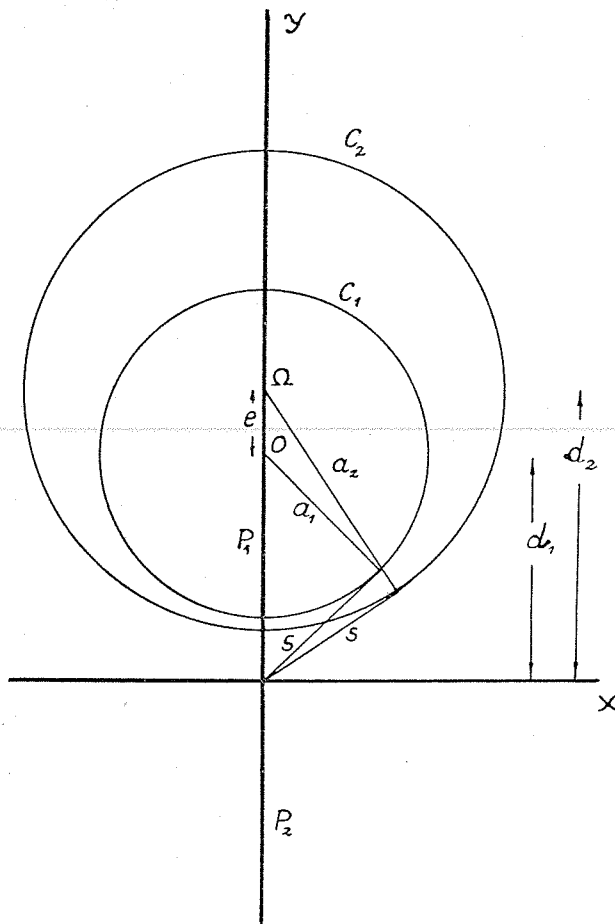
(p , pressione; u, v , componenti della velocità; η , viscosità) nel campo \mathfrak{D} limitato da due circonferenze $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ (si veda la figura), con dati opportuni per u, v su $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$. WANNIER ha anche calcolato la forza e la coppia agente su ciascun

cilindro, giungendo così a risultati di diretto interesse pratico.

Per lo studio del comportamento dinamico dei perni lubrificati ha interesse anche un altro problema, che verrà studiato in questo lavoro e che è più generale di quello ora citato: precisamente il problema che nasce dal considerare il caso nel quale sono permesse all'asse del cilindro interno traslazioni arbitrarie normali all'asse stesso. Si tratta ancora di risolvere le equazioni (1.1) in \mathfrak{D} , ma con condizioni al contorno più complesse che verranno precisate in seguito.

Va notato che, se si suppone piccolo il gioco $2c$ tra i cilindri in confronto ai loro raggi a_1, a_2 , il problema si semplifica notevolmente e può essere

attaccato con mezzi più elementari (si veda, ad es., [5]). Si presentano però dei casi (per esempio in alcuni dispositivi sperimentali) dove l'ipotesi della piccolezza di $c/a_1, c/a_2$ non può essere accettata con confidenza e comunque rimane l'interesse di conoscere l'ordine di grandezza dell'errore commesso col considerare infinitesimi quei rapporti. Di qui la principale ragione del presente lavoro: altre applicazioni dei risultati ottenuti sono però possibili ed un esempio è indicato brevemente all'inizio dell'ultimo paragrafo.



2. - Impostazione del problema ed alcune osservazioni preliminari.

Useremo qui, per quanto possibile, le notazioni introdotte da WANNIER nel lavoro citato, in modo che siano facili i confronti. In particolare adotteremo lo stesso sistema di riferimento, come risulta chiaramente dalla figura: l'asse y congiunge i centri dei due cerchi, la posizione dell'asse x dipende dalla eccentricità, di modo che si ha

$$d_2^2 - a_2^2 = d_1^2 - a_1^2 = s.$$

S'intende che qui la scelta del riferimento ha carattere istantaneo — perchè O può avere posizione arbitraria nel cerchio di centro Ω e raggio c — ma ciò non disturba una analisi nella quale non si devon eseguire mai derivazioni rispetto al tempo. Nella figura sono indicati anche alcuni simboli con significato evidente, sicchè non ci sembra necessario ripeterne la definizione.

Qui si pensa che il cilindro esterno sia fisso; quindi le condizioni al contorno su \mathcal{C}_2 sono

$$(2.1) \quad u = 0, \quad v = 0 \quad \text{su} \quad \mathcal{C}_2.$$

Il cilindro interno si suppone invece che ruoti uniformemente con velocità angolare ω intorno al suo asse; di più si suppone che la traccia O dell'asse si muova nel cerchio permesso dal gioco; quindi alla velocità di O si attribuiscono componenti arbitrarie U, V . In conclusione le condizioni su \mathcal{C}_1 sono

$$(2.2) \quad u = U - \omega(y - d_1), \quad v = V + \omega x, \quad \text{su} \quad \mathcal{C}_1.$$

Convieni ora introdurre la funzione di corrente ψ , per cui

$$(2.3) \quad u = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial \psi}{\partial x},$$

in modo che l'equazione di continuità è automaticamente soddisfatta. Le rimanenti due equazioni richiedono che ψ sia una funzione biarmonica e che p/η sia la funzione coniugata del laplaciano di ψ , che cioè $\Delta \psi + i(p/\eta)$ sia una funzione analitica uniforme in \mathfrak{D} . In termini di ψ le condizioni (2.1), (2.2) richiedono che

$$(2.4) \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0, \quad \text{su} \quad \mathcal{C}_2,$$

$$(2.5) \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = V + \omega x, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = -U + \omega(y - d_1), \quad \text{su} \quad \mathcal{C}_1.$$

La soluzione del problema si può ottenere combinando opportunamente due funzioni armoniche tipiche per il campo \mathfrak{D} : precisamente le funzioni

$$\varphi_1 = \log [x^2 + (s + y)^2], \quad \text{e} \quad \varphi_2 = \log [x^2 + (s - y)^2],$$

la cui differenza è costante ed eguale a $\log [(\delta + s)/(\delta - s)]$ su ogni circonferenza \mathcal{C} di centro $(0, \delta)$ e raggio $(\delta^2 - s^2)^{1/2}$; infatti su \mathcal{C} si ha

$$x^2 + y^2 - 2\delta y + s^2 = 0.$$

Si noti che, in particolare, valgono le eguaglianze

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \log [(d_i + s)/(d_i - s)] \quad \text{su } \mathcal{C}_i \quad (i = 1, 2).$$

Ci proponiamo di controllare che l'espressione esplicita di ψ è la seguente

$$\psi = \Phi_0 + x\Phi_1 + y\Phi_2 + \Phi_3,$$

dove le Φ_i sono funzioni (delle quali le prime tre armoniche) in cui compaiono delle costanti A, B, B_1 , ecc.:

$$\Phi_0 = A (\varphi_1 - \varphi_2) + D_1 x + Dy,$$

$$\Phi_1 = F_1 (\varphi_1 - \varphi_2),$$

$$\Phi_2 = F (\varphi_1 - \varphi_2) + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x} (B_1 \varphi_1 - C_1 \varphi_2) + \frac{\partial}{\partial y} (B \varphi_1 - C \varphi_2) \right],$$

$$\Phi_3 = E (x^2 + y^2 + s^2).$$

È immediata l'osservazione che ψ è biarmonica; faremo vedere nel prossimo paragrafo che una opportuna scelta delle costanti permette anche di soddisfare le condizioni al contorno. Notiamo qui che, dalle relazioni

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\eta \frac{\partial}{\partial y} (\Delta \psi), \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \eta \frac{\partial}{\partial x} (\Delta \psi),$$

segue

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 2\eta \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial x} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 2\eta \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial x} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} \right);$$

si può dunque determinare p (a prescindere da una costante)

$$p = 2\eta \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial x} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} \right)$$

ed essere certi che essa è uniforme in \mathfrak{D} . Anzi si può esprimere facilmente in termini di Φ_0, Φ_1, Φ_2 l'intero tensore degli sforzi nel liquido, le cui componenti (quando trazioni siano contate positivamente) sono legate a p e ψ dalle relazioni

$$\pi_{xx} = -p - 2\eta \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}, \quad \pi_{yy} = -p + 2\eta \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y},$$

$$\pi_{xy} = \eta \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right);$$

si ha infatti

$$(2.6) \quad \begin{aligned} \pi_{xx} &= -2\eta \left(2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} + \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial x \partial y} + x \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x \partial y} + y \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial x \partial y} \right), \\ \pi_{yy} &= 2\eta \left(2 \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} + \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial x \partial y} + x \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x \partial y} + y \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial x \partial y} \right), \\ \pi_{xy} &= 2\eta \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} - \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} + \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial x^2} + x \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x^2} + y \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial x^2} \right). \end{aligned}$$

3. - Esame delle condizioni al contorno

Prima di scrivere esplicitamente le condizioni al contorno vanno ricavate delle espressioni per le derivate prime di ψ . Alcuni calcoli elementari permettono di notare che si ha

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \alpha_1 + \alpha_2 s \frac{x}{y} + \alpha_3 x + \alpha_4 \left(y + \frac{s^2}{y} \right),$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = \alpha_5 - \alpha_2 \frac{s\delta}{y} - \alpha_4 x \left(1 - \frac{\delta}{y} \right) + \alpha_3 y,$$

dove le α_i sono espressioni costanti sulle circonferenze \mathcal{C} (dipendenti linearmente dalle A, B, B_1 , ecc.), delle quali indicheremo con $\alpha_i^{(1)}, \alpha_i^{(2)}$ i valori assunti su \mathcal{C}_1 e \mathcal{C}_2 rispettivamente. Allora le condizioni da soddisfare sono

$$\begin{aligned}\alpha_i^{(2)} &= 0, & (i = 1, 2, 3, 4, 5); \\ \alpha_1^{(1)} &= V, & \alpha_2^{(1)} = 0 \quad \alpha_3^{(1)} = \omega, \\ \alpha_4^{(1)} &= 0, & \alpha_5^{(1)} = -U - \omega d_1;\end{aligned}$$

cioè dieci equazioni lineari nelle dieci incognite A, B, B_1 , ecc. Qui scriveremo il sistema ridotto che si ottiene eliminando A, B, C, F_1, B_1, C_1 , coll'uso di due nuove costanti K e K_1 :

$$A = K (s^2 - d_1 d_2), \quad B = 2K (d_1 + s) (d_2 + s), \quad C = 2K (d_1 - s) (d_2 - s);$$

$$F_1 = (K_1/s)(s^2 - d_1 d_2), \quad B_1 = 2K_1 (d_1 + s)(d_2 + s), \quad C_1 = -2K_1 (d_1 - s)(d_2 - s).$$

Il sistema ridotto è

$$a_2^2 E - sF - Ks (d_2 - d_1) = 0,$$

$$a_1^2 E - sF + Ks (d_2 - d_1) = \frac{\omega}{2} a_1^2,$$

$$D + 2 d_2 E + F \operatorname{lg} \frac{d_2 + s}{d_2 - s} + 2sK = 0,$$

$$D + 2 d_1 E + F \operatorname{lg} \frac{d_1 + s}{d_1 - s} + 2sK = -U,$$

$$D_1 + K_1 \left[2d_1 + \frac{s^2 - d_1 d_2}{s} \operatorname{lg} \frac{d_2 + s}{d_2 - s} \right] = 0,$$

$$D_1 + K_1 \left[2d_2 + \frac{s^2 - d_1 d_2}{s} \operatorname{lg} \frac{d_1 + s}{d_1 - s} \right] = V,$$

e si presta a immediate eliminazioni. Qui importano solo le espressioni esplicite di F ed F_1 :

$$F = \left[U \left(1 + \frac{a_2^2}{a_1^2} \right) - \omega (d_2 - d_1) \right] \left[\left(1 + \frac{a_2^2}{a_1^2} \right) \operatorname{lg} \frac{d_2 + s}{d_2 - s} \frac{d_1 - s}{d_1 + s} + \frac{4s}{a_1^2} (d_2 - d_1) \right]^{-1},$$

(3.1)

$$F_1 = -V \left[\frac{2s (d_2 - d_1)}{d_1 d_2 - s^2} + \operatorname{lg} \frac{d_2 + s}{d_2 - s} \frac{d_1 - s}{d_1 + s} \right]^{-1},$$

perchè questi due coefficienti sono gli unici ad intervenire nelle formule che danno le componenti F_x , F_y della forza agente sul cilindro interno. Per un tratto di cilindro di lunghezza unitaria si ha infatti

$$(3.2) \quad \begin{aligned} F_x &= \int_{\mathcal{C}_1} \left(\pi_{xx} \frac{dx}{dn} + \pi_{xy} \frac{dy}{dn} \right) dl, \\ F_y &= \int_{\mathcal{C}_1} \left(\pi_{xy} \frac{dx}{dn} + \pi_{yy} \frac{dy}{dn} \right) dl, \end{aligned}$$

con notazioni ovvie: n normale a \mathcal{C}_1 rivolta verso l'interno di \mathfrak{D} ; l arco lungo \mathcal{C}_1 contato positivamente in senso antiorario. Sostituendo ora nelle (3.2) le espressioni (2.6) si ottiene

$$\begin{aligned} F_x &= -2\eta \int_{\mathcal{C}_1} \left[\frac{d}{dl} \left(\frac{\partial \Phi_0}{\partial x} + x \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} + y \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} \right) + \frac{d\Phi_2}{dn} \right] dl, \\ F_y &= -2\eta \int_{\mathcal{C}_1} \left[\frac{d}{dl} \left(\frac{\partial \Phi_0}{\partial y} + x \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} + y \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} \right) - \frac{d\Phi_1}{dn} \right] dl, \end{aligned}$$

e quindi, più semplicemente,

$$F_x = -2\eta \int_{\mathcal{C}_1} \frac{d\Phi_2}{dn} dl, \quad F_y = 2\eta \int_{\mathcal{C}_1} \frac{d\Phi_1}{dn} dl.$$

Anzi, poichè φ_1 è una funzione armonica regolare colle sue derivate nell'interno di \mathcal{C}_1 , mentre φ_2 ha una singolarità in $P_1(0, s)$, si ha anche

$$\begin{aligned} F_x &= 2\eta \int_0^{2\pi} \varrho \left[\frac{d}{dr} \left(F\varphi_2 + C_1 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} + C \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \right) \right]_{r=\varrho} d\theta, \\ F_y &= -2\eta F_1 \int_0^{2\pi} \varrho \left(\frac{d\varphi_2}{dr} \right)_{r=\varrho} d\theta, \end{aligned}$$

ove (r, θ) sono coordinate polari con polo P_1 e ϱ è un valore sufficientemente piccolo di r . È immediato allora constatare che valgono le relazioni

$$(3.3) \quad F_x = 8\pi\eta F, \quad F_y = -8\pi\eta F_1.$$

4. - Applicazioni.

Cominciamo collo studiare il comportamento di un cilindro ruotante indefinito che si muova, mantenendo invariata l'orientazione del proprio asse, in un liquido viscoso che occupi un semispazio. Il sistema di riferimento può essere il solito, in vista della circostanza che l'orientazione degli assi è ora invariabile, l'asse x riducendosi alla traccia della parete di confine, alla quale traccia si va anche a sovrapporre la circonferenza \mathcal{C}_2 di raggio infinito.

Le componenti della forza per unità di lunghezza agente sul cilindro si ottengono dalle (3.1), (3.3) passando al limite per $a_2 \rightarrow \infty$, $d_2 \rightarrow \infty$:

$$F_x = -8\pi\eta U \{ \log (d_1 + s) (d_1 - s)^{-1} \}^{-1},$$

$$F_y = -8\pi\eta V \{ \log (d_1 + s) (d_1 - s)^{-1} - (2s/d_1) \}^{-1}.$$

Ne segue la generalizzazione di un noto risultato: il moto di rotazione del cilindro attorno al proprio asse non ha alcuna influenza su F_x , F_y . La forza ha il carattere di una resistenza viscosa di mezzo, per quanto non sia esattamente opposta alla velocità se non nel caso in cui l'asse del cilindro si muova in un piano parallelo o normale alla parete; infatti non solo è, ovviamente,

$$\log (d_1 + s) (d_1 - s)^{-1} > 0,$$

nel campo che ci interessa, ma anche

$$\log (d_1 + s) (d_1 - s)^{-1} - (2s/d_1) > 0.$$

Se, ad esempio, il cilindro (che si supponga non soggetto ad altre forze) è lanciato con una velocità iniziale di componenti 0, $-V_0$ ($V_0 > 0$), esso si arresterà prima di urtare la parete, esattamente alla distanza b_1 per cui

$$(4.1) \quad mV_0 = 8\pi\eta \int_{b_1^{(0)}}^{b_1} \frac{dy}{\log \{ 1 + [1 - (a_1/y)^2]^{1/2} \} - \log \{ 1 - [1 - (a_1/y)^2]^{1/2} \} - 2 [1 - (a_1/y)^2]^{1/2}}$$

se m è la massa per unità di lunghezza del cilindro e $b_1^{(0)}$ la distanza iniziale dell'asse dalla parete. Si noti che la (4.1) è univocamente risolvibile in termini di b_1 ($> a_1$), qualunque sia V_0 , perchè l'integrando a secondo membro è positivo e l'integrale diverge a $+\infty$ quando $b_1 \rightarrow a_1$.

Passiamo ora a considerare un altro caso asintotico che interessa più direttamente la teoria della lubrificazione; precisamente il caso in cui il cilindro interno è solo lievemente eccentrico a quello esterno. La conoscenza delle forze F_x , F_y in quelle circostanze si presta a studi di stabilità; si vedano i paragrafi 5 e 6 del lavoro [5]; va osservato che la scelta del riferimento fa coincidere F_x , F_y con le componenti radiale e trasversa della forza (F_r , F_n in [5]). Quando il rapporto e/c , cioè $(d_2 - d_1)/(a_2 - a_1)$ può considerarsi come infinitesimo del primo ordine, valgono le eguaglianze approssimate

$$s \sim d_1 \sim d_2 \sim (a_2^2 - a_1^2)/(2e), \quad d_1 d_2 - s^2 \sim (a_1^2 + a_2^2)/2,$$

$$d_2 - s \sim a_2^2/(2d_2), \quad d_1 - s \sim a_1^2/(2d_1);$$

quindi, ponendo

$$(4.2) \quad \mathfrak{F} = 4\pi\eta \left[\left(1 + \frac{a_2^2}{a_1^2} \right) \log \frac{a_2}{a_1} - \frac{a_2^2}{a_1^2} + 1 \right]^{-1},$$

si ha

$$F_x = \mathfrak{F}e \left[\omega - \frac{U}{e} \left(1 + \frac{a_2^2}{a_1^2} \right) \right],$$

(4.3)

$$F_y = - \left(1 + \frac{a_2^2}{a_1^2} \right) \mathfrak{F}V.$$

Confrontando queste formule colle (4.6), (4.7) di [5] si possono notare alcune divergenze di ovvio carattere, le quali però non inficierebbero una discussione del problema della stabilità delle rotazioni uniformi « coassiali » di un perno lubrificato di grande lunghezza e gioco non trascurabile, discussione che fosse condotta parallelamente a quella dei paragrafi 4 e 5 di [5] (ove è considerato il caso di un perno di lunghezza finita e gioco infinitesimo). Infatti la funzione

$$(1 + Z^2) \log Z - Z^2 + 1$$

è positiva per ogni $Z > 1$; quindi è anche $\mathfrak{F} > 0$ per tutti i valori ammissibili del rapporto a_2/a_1 .

La differenza più notevole, tra la regola di stabilità da ritenersi valida qui quella provata in [5], è la seguente. Detta ν la frequenza propria del perno (dovuta ad una forza di richiamo elastica), la stabilità del moto di rotazione uniforme del perno è assicurata per tutte le velocità di rotazione ω minori di $[1 + (a_2/a_1)^2] 2\pi\nu$. Quando, come si suppone in [5], a_2 si possa confondere con a_1 , la regola di stabilità si esprime invece nella disuguaglianza più semplice $\omega < 4\pi\nu$.

Bibliografia.

- [1] G. B. JEFFERY, *The Rotation of Two Circular Cylinders in a Viscous Fluid*, Proc. Roy. Soc., A 101 (1922), 169-174.
- [2] G. DUFFING, *Beitrag zur Theorie der Flüssigkeitsbewegung zwischen Zapfen und Lager*, Z. Angew. Math. Mech., 4 (1924), 296-314.
- [3] H. REISSNER, *Ebene und räumliche Strömung zäher, inkompressibler, trägheitsfreier Flüssigkeiten zwischen exzentrischen, relativ zueinander rotierenden Zylinderflächen.*, Z. Angew. Math. Mech., 15 (1935), 81-87.
- [4] G. H. WANNIER, *A Contribution to the Theory of Lubrication*, Quart. Appl. Math., 8 (1950), 1-32.
- [5] G. CAPRIZ, *On some dynamical problems arising in the theory of lubrication*, Riv. Mat. Univ. Parma (2) 1 (1960), 1-20.

Summary.

Some known results on the steady-state behaviour of a lubricated journal bearing with a large clearance are generalized to cover transient conditions. It is then possible to discuss, for instance, the question of stability of a spring-supported rotating journal. The rule of stability is $\omega < 2\pi v [1 + (a_2/a_1)^2]$, where ω is the rotational speed of the journal, $2\pi v$ its critical speed, and a_1, a_2 the radii of journal and bearing respectively.