Riv. Mat. Univ. Parma (2) 2 (1961), 171-182

D. QUILGHINI (*)

Alcune osservazioni sulle soluzioni dell'equazione della diffusione. (**)

1. - Introduzione e posizione del problema.

In alcuni problemi di diffusione ha interesse conoscere la dipendenza della concentrazione U, della sostanza che si diffonde in un mezzo S, dal coefficiente di diffusività K supposto indipendente dal posto e dal tempo sia esplicitamente sia implicitamente tramite la concentrazione. Un problema di questo tipo si presenta, ad esempio, in alcune tecniche per la determinazione del coefficiente di diffusività relativo alla diffusione di isotopi radioattivi nei metalli.

In questi procedimenti, dopo aver depositato una prefissata quantità dell'isotopo radioattivo su una delle facce terminali di una sbarretta cilindrica del metallo in studio, si fa avvenire il processo di diffusione tenendo il metallo ad una prefissata temperatura T_0 costante e, dopo un certo tempo, con opportune misure effettuate su sezioni diverse della sbarretta metallica, si determina, punto per punto, la concentrazione della sostanza radioattiva. Si ripete poi l'esperienza a temperature diverse, ferme restando tutte le altre condizioni, e si cerca di risalire, dalle variazioni che si riscontrano nella concentrazione, alla legge di dipendenza, dalla temperatura, del coefficiente di diffusività K. È quindi necessario in questi procedimenti conoscere la dipendenza della concentrazione U dal coefficiente di diffusività. Nella presente nota, studiando questo problema, scrivo, sotto opportune ipotesi, l'equazione alle derivate parziali, con le relative condizioni ai limiti, alla quale soddisfa la funzione $V = \dfrac{\partial U}{\partial K}$.

Infine, dopo aver fatto alcune osservazioni sui risultati trovati, studio, in un caso particolare, che però è di un certo interesse ai fini delle ricerche

(*) Indirizzo dell'A.: Istituto di Matematica « U. Dini » della Università di Firenze, Via Alfani, 81 - Firenze.

(**) Ricevuto il 26-7-1961.
Lavoro eseguito nell'ambito del VII gruppo di ricerca matematica del C.N.R.

tecniche alle quali ho accennato sopra, come dipende la concentrazione dal coefficiente di diffusività superficiale pensato, anche esso, come parametro indipendente.

Nelle ipotesi fatte sulla indipendenza del coefficiente di diffusività K dal posto, dal tempo e dalla concentrazione, in assenza di moti convettivi e di sorgenti interne, il problema di determinare la concentrazione $U(P, t)$ della sostanza diffusa nei punti P di un sistema S occupante il campo C limitato dalla superficie $\sum$ è retto dal sistema [**1**] (1):

$$(\mathrm{I}) \begin{cases} \Delta_2 U(P, t) = \dfrac{1}{K} \dfrac{\partial U(P,t)}{\partial t}, & P \in C, \quad t > 0, \\ \lim\limits_{t \to 0} U(P, t) = f(P), & P \in C, \\ \lim\limits_{P \to P^* \in \Sigma} L^{(1)} U(P, t) = \varphi(P^*, t) & P^* \in \sum, \quad t > 0, \end{cases}$$

dove $f(P)$ è la concentrazione, nota, nei punti $P \in C$ all'istante iniziale, $\varphi(P^*, t)$ è una funzione, anch'essa nota, definita nei punti $P^* \in \sum$ per $t > 0$ ed infine $L^{(1)}$ è un operatore differenziale nelle sole variabili spaziali, lineare, al più del primo ordine ed a coefficienti costanti. In particolare, indicato con $\boldsymbol{n}$ il versore normale interna a $\sum$, può aversi:

$$L^{(1)} U(P, t) = U(P, t), \quad L^{(1)} U(P, t) = \frac{\partial U(P, t)}{\partial \boldsymbol{n}},$$

$$L^{(1)} U(P, t) = A \frac{\partial U(P, t)}{\partial \boldsymbol{n}} + BU(P, t),$$

a seconda che su $\sum$ è assegnata la concentrazione, il flusso o una combinazione lineare flusso-concentrazione.

Manifestamente il problema di vedere come dipende la concentrazione U dal coefficiente di diffusività K si riconduce al confronto tra le soluzioni $U = U(P, t)$ ed $U_1 = U_1(P, t)$ ottenute dal sistema (I) in corrispondenza ai valori K e $K_1 = K + \Delta K$ del coefficiente di diffusività. A questo proposito si ha immediatamente:

---

(1) I numeri in neretto ed in parentesi quadra si riferiscono alla bibliografia posta al termine della nota.

Se $U_1(P, t)$ è la soluzione del sistema (I) in corrispondenza al valore $K_1 = K + \Delta K$ del coefficiente di diffusività si ha:

$$U_1(P, t) = \overline{U}\left(P, \frac{K + \Delta K}{K} t\right) \tag{1}$$

dove $\overline{U}(P, t)$ è la soluzione del sistema (I) in corrispondenza al valore K del coefficiente di diffusività quando al posto di $\varphi(P^*, t)$ si ponga $\varphi\left(P^*, \dfrac{K}{K + \Delta K} t\right)$.

Infatti, indicata con τ la variabile temporale nel sistema (I), si ha:

$$(\mathrm{I}_1)\quad \begin{cases} \Delta_2 U_1(P, \tau) = \dfrac{1}{K + \Delta K} \dfrac{\partial U_1(P, \tau)}{\partial \tau}, & P \in C, \quad \tau > 0, \\ \lim\limits_{\tau \to 0} U_1(P, \tau) = f(P), & P \in C, \\ \lim\limits_{P \to P^* \in \Sigma} L^{(1)} U_1(P, \tau) = \varphi(P^*, \tau), & P^* \in \sum, \quad \tau > 0. \end{cases}$$

Da qui, posto

$$\tau = \frac{K}{K + \Delta K} t, \tag{2}$$

$$U_1(P, \tau) = U_1\left(P, \frac{K}{K + \Delta K} t\right) = \overline{U}(P, t) \tag{3}$$

e perciò anche:

$$U_1(P, t) = \overline{U}\left(P, \frac{K + \Delta K}{K} t\right) \tag{4}$$

sostituendo nel sistema (I_1) τ tramite la (2) ed $U_1(P, t)$ tramite la (3), tenuto conto della (4), segue l'asserto.

2. - La funzione $V = \dfrac{\partial U}{\partial K}$.

Ciò premesso supponiamo che il campo C, con la sua frontiera $\sum$, e le condizioni ai limiti siano tali da garantire l'esistenza e l'unicità della soluzione $U = U(P, t, K)$, $P \in C$, $t > 0$, $K > 0$, del sistema (I) in un prefissato sottoinsieme del campo delle funzioni continue e derivabili, almeno due volte rispetto alle variabili spaziali ed una volta rispetto a t e rispetto a K, con derivate continue e tali che risultino, inoltre, continue le funzioni $\dfrac{\partial^3 U}{\partial x_i^2 \partial K}$, $\dfrac{\partial^3 U}{\partial K \partial x_i^2}$, $i = 1, 2, 3$ e $\dfrac{\partial^2 U}{\partial K \partial t}$, $\dfrac{\partial^2 K}{\partial t \partial K}$.

A questo proposito osserviamo che, almeno nel caso di condizioni al contorno stazionarie, la supposta regolarità rispetto a K delle soluzioni del sistema (I) si riduce, posto $Kt = \zeta$, alle analoghe ipotesi di regolarità rispetto a ζ delle soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} \Delta_2 U = \dfrac{\partial U}{\partial \zeta}, & P \in C, \quad \zeta > 0, \\ \lim\limits_{\zeta \to 0} U = f(P), & P \in C, \\ \lim\limits_{P \to P^* \in \Sigma} L^{(1)} U = \varphi(P^*), & P^* \in \Sigma, \quad \zeta > 0. \end{cases}$$

Diversi Autori si sono occupati del problema di stabilire sotto quali ipotesi sui dati al contorno e sul campo C è possibile garantire la regolarità delle soluzioni di quest'ultimo sistema. Senza entrare nei dettagli rimandiamo in particolare alla memoria di M. Gevrey [2], limitandoci qui a supporre le suddette condizioni, delle quali preciseremo la portata al termine della nota.

In queste ipotesi si ha:

Se $U = U(P, t, K)$ *è la soluzione del sistema* (I) *la funzione:*

$$V(P, t) = \frac{\partial U(P, t)}{\partial K}, \qquad P \in C, \qquad t > 0$$

è soluzione del sistema:

$$\text{(II)} \quad \begin{cases} \Delta_2 V(P, t) + \dfrac{1}{K} \Delta_2 U(P, t) = \dfrac{1}{K} \dfrac{\partial V(P, t)}{\partial t}, & P \in C, \quad t > 0, \\ \lim\limits_{t \to 0} V(P, t) = 0, & P \in C, \\ \lim\limits_{P \to P^* \in \Sigma} L^{(1)} V(P, t) = 0, & P^* \in \Sigma, \quad t > 0, \end{cases}$$

Cioè $\dfrac{\partial U}{\partial K}$ *può interpretarsi come la concentrazione in* C *dovuta esclusivamente ad una distribuzione di sorgenti* $S(P, t) = \dfrac{1}{K} \Delta_2 U(P, t)$, *essendo omogenee le condizioni al contorno.*

Infatti, per le ipotesi fatte sulla derivabilità rispetto a K della soluzione del sistema (I), derivando, rispetto a K, ambo i membri della equazione

$$K \Delta_2 U = \frac{\partial U}{\partial t}, \qquad P \in C, \qquad t > 0,$$

applicando il criterio di H. A. SCHWARZ [3], si ha, dopo aver diviso per K:

$$(5) \qquad \Delta_2 V + \frac{1}{K} \Delta_2 U = \frac{1}{K} \frac{\partial V}{\partial t}, \qquad P \in C, \qquad t > 0.$$

Per determinare le condizioni ai limiti alle quali deve soddisfare $V(P, t)$ osserviamo che, indicato al solito con $U(P, t)$ ed $U_1(P, t)$ le soluzioni del sistema (I) in corrispondenza ai valori K e $K_1 = K + \Delta K$ del coefficiente di diffusività, si ha:

$$(6) \qquad U_1(P, t) - U(P, t) = \Delta K\, \overline{V}(P, t), \qquad P \in C, \qquad t > 0,$$

essendo $\overline{V}(P, t)$ la derivata di $U(P, t, K)$ rispetto a K valutata nel generico punto $P \in C$, $t > 0$, per un valore $\overline{K}$, in generale variabile con P e con t, ma in ogni caso intermedio tra K e $K + \Delta K$.

Si ha poi, per la supposta continuità di $\dfrac{\partial U}{\partial K}$,

$$(7) \qquad \lim_{\Delta K \to 0} \overline{V}(P, t) = V(P, t)$$

qualunque siano $P \in C$ e $t > 0$.

Inoltre, tenuto conto che $L^{(1)}$ è un operatore differenziale lineare, al più del primo ordine, nelle sole variabili spaziali, si ha pure:

$$(8) \qquad \lim_{\Delta K \to 0} L^{(1)}\, \overline{V}(P, t) = L^{(1)} V(P, t).$$

qualunque siano $P \in C$ e $t > 0$.

Ciò premesso, per essere:

$$\lim_{t \to 0} [U_1(P, t) - U(P, t)] = 0, \qquad P \in C,$$

$$\lim_{P \to P^* \in \Sigma} [L^{(1)} U_1(P, t) - L^{(1)} U(P, t)] = 0, \qquad P^* \in \Sigma, \qquad t > 0,$$

dalla (6) segue, per ogni fissato $\Delta K \neq 0$,

$$(9) \qquad \lim_{t \to 0} \overline{V}(P, t) = 0, \qquad P \in C,$$

$$(10) \qquad \lim_{P \to P^* \in \Sigma} L^{(1)}\, \overline{V}(P, t) = 0, \qquad P^* \in \Sigma, \qquad t > 0.$$

Queste ultime due insieme alla (7) ed alla (8) implicano che risulti:

(11) $$\lim_{t \to 0} V(P,\ t) = 0, \qquad P \in C,$$

(12) $$\lim_{P \to P^* \in \Sigma} L^{(1)}\ V(P,\ t) = 0, \qquad P^* \in \sum, \qquad t > 0\ .$$

Infatti a causa della (9), fissato $P = P' \in C$, scelto un σ positivo arbitrario si può determinare un ε positivo tale che per ogni t positivo e minore di ε, $0 < t < \varepsilon$, risulti:

(13) $$-\frac{\sigma}{2} < \overline{V}(P',\ t) < \frac{\sigma}{2}\ .$$

Adesso, fissato $P = P' \in C$ e t positivo minore di ε in guisa che valga la (13), scegliamo, tenuto conto della (7) $\Delta K \neq 0$, in guisa che risulti, qualunque sia $\overline{K}$ compreso tra K e $K + \Delta K$:

(14) $$-\frac{\sigma}{2} < V(P',\ t) - \overline{V}(P',\ t) < \frac{\sigma}{2}\ .$$

Dalla (13) e dalla (14) si ha perciò:

(15) $$-\sigma < V(P',\ t) < \sigma.$$

Infatti la (14), a meno di diminuire eventualmente ΔK può stabilirsi, fissato $P = P' \in C$, per ogni $t > 0$, e perciò la (15) vale per ogni t positivo e minore di ε e per $P = P' \in C$; segue perciò da qui la (11). Analogo ragionamento si segue per dimostrare la (12). Infatti, a causa della (10), fissato $t = t' > 0$, indicato con P^* un punto della superficie $\sum$, scelto un σ positivo arbitrario si può determinare un ε positivo tale che per ogni punto $P \in C$ appartenente alla sfera di centro P^* e raggio ε risulti:

(16) $$-\frac{\sigma}{2} < L^{(1)}\ \overline{V}(P,\ t) < \frac{\sigma}{2}\ .$$

Adesso, fissato $t = t' > 0$ e P in guisa che valga la (16), scegliamo, tenuto conto della (8), $\Delta K \neq 0$ in guisa che risulti, qualunque sia $\overline{K}$ compreso tra K e $K + \Delta K$:

(17) $$-\frac{\sigma}{2} < L^{(1)}\ V(P,\ t') - L^{(1)}\ \overline{V}(P,\ t') < \frac{\sigma}{2}\ .$$

Dalla (16) e dalla (17) si ha perciò:

$$-\sigma < L^{(1)} V(P, t') < \sigma . \tag{18}$$

Infatti a meno di diminuire eventualmente ΔK la (17) può stabilirsi per ogni punto P che soddisfa la (16) e perciò dalla (18) segue la (12).

Così dalle (5), (11) e (12) segue il teorema.

Supponiamo adesso che le condizioni al contorno del sistema (I) siano stazionarie, sia cioè $\lim\limits_{P \to P^* \in \Sigma} L^{(1)} U(P, t) = \varphi(P^*)$. In questa ipotesi la (1) diventa:

$$U_1(P, t) = U\left(P, \frac{K + \Delta K}{K} t\right) \tag{19}$$

essendo $U(P, t)$ la soluzione del sistema (I) in corrispondenza al valore K del coefficiente di diffusività.

Da quest'ultima segue immediatamente:

in condizioni al contorno stazionarie si ha:

$$K \frac{\partial U}{\partial K} = t \frac{\partial U}{\partial t} . \tag{20}$$

Infatti, tenuto conto della (19), abbiamo:

$$\lim_{\Delta K \to 0} \frac{U_1(P, t) - U(P, t)}{\Delta K} = \lim_{\Delta K \to 0} \frac{U\left(P, t + \frac{\Delta K}{K} t\right) - U(P, t)}{\Delta K} =$$

$$= \frac{t}{K} \lim_{\Delta K \to 0} \frac{U\left(P, t + \frac{\Delta K}{K} t\right) - U(P, t)}{\frac{\Delta K}{K} t} .$$

e quindi la (20). L'ultima relazione scritta mostra inoltre come, in condizioni al contorno stazionarie per il sistema (I), la regolarità rispetto a K della soluzione $U(P, t, K)$ si riduce alle analoghe condizioni di regolarità rispetto a t.

Dalla (20) si ha poi:

$$U(P, t, K) = U(P, Kt) ,$$

vale a dire $U(P, t, K)$ è esclusivamente funzione di P e del prodotto Kt.

Tornando al caso generale, in cui cioè le condizioni al contorno per il sistema (I) non sono stazionarie, dalla (1) si ha

$$\lim_{\Delta K\to 0}\frac{U_1(P,\ t)-U(P,\ t)}{\Delta K}=\frac{t}{K}\lim_{\Delta K\to 0}\frac{U\left(P,\ t+\dfrac{\Delta K}{K}\,t\right)-U(P,\ t)}{\dfrac{\Delta K}{K}\,t}+$$

$$+\lim_{\Delta K\to 0}\frac{\overline{U}\left(P,\ \dfrac{K+\Delta K}{K}\,t\right)-U\left(P,\ \dfrac{K+\Delta K}{K}\,t\right)}{\Delta K}.$$

Perciò, se esiste $\dfrac{\partial U}{\partial t}$ l'esistenza della derivata di U rispetto a K è condizionata dall'esistenza di

$$D(P,\ t)=\lim_{\Delta K\to 0}\frac{\overline{U}\left(P,\ \dfrac{K+\Delta K}{K}\,t\right)-U\left(P,\ \dfrac{K+\Delta K}{\Delta K}\,t\right)}{\Delta K}.$$

e viceversa.

Supponiamo ancora che esista $\dfrac{\partial U}{\partial K}$ e che soddisfi alle condizioni di regolarità poste all'inizio.

Avremo

$$V(P,\ t)=\frac{t}{K}\,\frac{\partial U(P,\ t)}{\partial t}+D(P,\ t), \tag{21}$$

e quindi

$$\Delta_2 V(P,\ t)=\frac{t}{K}\,\Delta_2\,\frac{\partial U(P,\ t)}{\partial t}+\Delta_2 D(P,\ t)$$

ed anche

$$\frac{1}{K}\,\frac{\partial V(P,\ t)}{\partial t}=\frac{1}{K^2}\,\frac{\partial U(P,\ t)}{\partial t}+\frac{t}{K^2}\,\frac{\partial^2 U(P,\ t)}{\partial t^2}+\frac{1}{K}\,\frac{\partial D(P,\ t)}{\partial t}.$$

Sottraendo membro a membro, tenuto conto dei sistemi (I) e (II), segue

$$\Delta_2 D(P,\ t)=\frac{1}{K}\,\frac{\partial D(P,\ t)}{\partial t},\qquad P\in C,\qquad t>0. \tag{22}$$

Inoltre passando nella (21) al limite per $t \to 0$, ricordando che

$$\lim_{t \to 0} V(P, t) = 0, \qquad P \in C,$$

segue

$$\lim_{t \to 0} D(P, t) = 0, \qquad P \in C, \tag{23}$$

ed infine, per essere

$$\lim_{P \to P^* \in \Sigma} \frac{L^{(1)} \overline{U}\left(P, \frac{K + \Delta K}{K} t\right) - L^{(1)} U\left(P, \frac{K + \Delta K}{K} t\right)}{\Delta K} =$$

$$= \frac{\varphi(P^*, t) - \varphi\left(P^*, t + \frac{\Delta K}{K} t\right)}{\frac{\Delta K}{K} t} \frac{t}{K},$$

passando al limite per $\Delta K \to 0$, se $\varphi(P^*, t)$ è derivabile rispetto a t per ogni $P^* \in \sum$ e per ogni $t > 0$, segue

$$\lim_{P \to P^* \in \Sigma} L^{(1)} D(P, t) = -\frac{t}{K} \frac{\partial \varphi(P^*, t)}{\partial t}, \quad P^* \in \sum, \qquad t > 0. \tag{24}$$

Perciò dalle (22), (23) e (24) segue che $D(P, t)$ è soluzione del sistema:

$$\text{(III)} \quad \begin{cases} \Delta_2 D(P, t) = \dfrac{1}{K} \dfrac{\partial D(P, t)}{\partial t}, & P \in C, \qquad t > 0, \\ \lim\limits_{t \to 0} D(P, t) = 0, & P \in C, \\ \lim\limits_{P \to P^* \in \Sigma} L^{(1)} D(P, t) = -\dfrac{t}{K} \dfrac{\partial \varphi(P^*, t)}{\partial t}, & P^* \in \sum, \qquad t > 0. \end{cases}$$

Siamo adesso in grado di precisare la portata delle ipotesi fatte sulla regolarità, rispetto a K, delle soluzioni $U(P, t, K)$ del sistema (I).

Infatti, tenuto conto della osservazione fatta per scrivere la (21), possiamo dire che:

se il campo C, con la sua frontiera $\sum$, e le condizioni ai limiti sono tali che, oltre ad esistere $\dfrac{\partial \varphi(P^*, t)}{\partial t}$ per $P^* \in \sum$ e $t > 0$, garantiscono l'esistenza e l'unicità, nel campo delle funzioni continue e derivabili, per ogni $P \in C$ e $t > 0$, delle soluzioni dei sistemi (I) e (III) ed inoltre è

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta_2 U = \Delta_2 \frac{\partial U}{\partial t}$$

allora le soluzioni $U(P, t, K)$ del sistema (I) soddisfano a tutte le condizioni di regolarità imposte rispetto a K e viceversa.

3. - Un caso particolare.

Terminando, come applicazione dei risultati trovati, determiniamo, in un caso particolare, come dipende la concentrazione $U(P, t)$ dal coefficiente di diffusività superficiale pensato come parametro indipendente.

Supponiamo cioè che al contorno sia assegnata una condizione del tipo:

$$\lim_{P \to P^* \in \Sigma} L^{(1)} U(P, t) = \lim_{P \to P^* \in \Sigma} \left[U(P, t) - \frac{1}{H} \frac{\partial U(P, t)}{\partial n} \right] = U_0(P^*, t), \quad P^* \in \sum, \quad t > 0.$$

essendo $U_0(P^*, t)$ la concentrazione, nota, nei punti di $\sum$ provenendo dal l'esterno del campo C occupato dal sistema S ed H il coefficiente di diffusività superficiale.

Ci limiteremo a studiare il caso molto particolare in cui il campo C è un semispazio limitato da un piano, che assumiamo come piano $x = 0$, ed il sistema S è in condizioni iniziali uniformi ed al contorno dipendenti esclusivamente dal tempo. Questo caso, pur essendo molto particolare, è di effettivo interesse nelle tecniche di cui si è detto in principio.

In questo caso la concentrazione $U(x, t)$ è soluzione del sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \dfrac{1}{K} \dfrac{\partial U}{\partial t}, & x > 0, \qquad t > 0, \\[2ex] \lim\limits_{t \to 0} U(x, t) = c = \text{cost}, \; x > 0, & \\[2ex] \lim\limits_{x \to 0} \left[U(x, t) - \dfrac{1}{H} \dfrac{\partial U(x, t)}{\partial x} \right] = U_0(t), & t > 0, \end{cases}$$

da qui, ponendo $Hx = \eta$ e $k = H^2 K$, segue

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} = \dfrac{1}{k} \dfrac{\partial U}{\partial t}, & \eta > 0, \qquad t > 0, \\[2ex] \lim\limits_{t \to 0} U = c, & \eta > 0, \\[2ex] \lim\limits_{\eta \to 0} \left[U - \dfrac{\partial U}{\partial \eta} \right] = U_0(t), & t > 0. \end{cases}$$

Avremo perciò:

$$\frac{\partial U(\eta, t, k)}{\partial H} = \frac{\partial U}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial H} + \frac{\partial U}{\partial k}\frac{\partial k}{\partial H},$$

e per essere:

$$\frac{\partial U}{\partial \eta} = \frac{1}{H}\frac{\partial U}{\partial x}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial H} = x, \quad \frac{\partial U}{\partial k} = \frac{t}{k}\frac{\partial U}{\partial t} + D = \frac{t}{H^2 K}\frac{\partial U}{\partial t} + D, \quad \frac{\partial k}{\partial H} = 2HK$$

otteniamo

$$\frac{\partial U}{\partial H} = \frac{x}{H}\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{2t}{H}\frac{\partial U}{\partial t} + 2HKD$$

dove $D(x, t)$ è la soluzione del sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 D}{\partial x^2} = \dfrac{1}{K}\dfrac{\partial D}{\partial t}, & x > 0, \qquad t > 0 \\ \lim\limits_{t \to 0} D = 0 & x > 0, \\ \lim\limits_{x \to 0}\left[D - \dfrac{1}{H}\dfrac{\partial D}{\partial x}\right] = -\dfrac{t}{H^2 K}\dfrac{\partial U_0(t)}{\partial t}, & t > 0 . \end{cases}$$

Bibliografia.

[1] J. Crank, *The mathematics of diffusion*, Oxford 1956, (Cap. I e IX).

[2] M. Gevrey, *Sur les équations aux dérivées partielles du type parabolique*, J. Math. Pures Appl. (4) **9** (1913), (Cap. III).

[3] G. Sansone, R. Conti, *Lezioni di analisi matematica*, Padova, 1959, (Cap. I, n. 3).