Riv. Mat. Univ. Parma (2) 2 (1961), 207-216

ENRICO BOMBIERI (*)

I raggi singolari delle serie di potenze e le variazioni di segno dei coefficienti. (**)

1. - Introduzione.

Sia $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ una serie di potenze convergente in $|z| < 1$.

Si dice che $R_\varphi \equiv z = re^{i\varphi}$ è un raggio singolare per $f(z)$ se, per ogni $\varepsilon > 0$, $f(z)$ non è limitata nel settore $|z| < 1$, $\varphi - \varepsilon < \arg z < \varphi + \varepsilon$.

Si può osservare (D. GAIER e W. MEYER-KÖNIG [1]) che in alcuni teoremi sulla distribuzione dei punti critici degli elementi analitici si può sostituire la parola « raggio singolare » al posto di « punto critico ».

Vale per esempio il teorema di D. GAIER e W. MEYER-KÖNIG:

Teorema A:

« Sia $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^{n_k}$ una serie di potenze con lacune di HADAMARD, cioè con $n_{k+1}/n_k \geqslant q > 1$ $(k \geqslant k_0)$.

Allora, se $f(z)$ ha un raggio singolare, ogni raggio R_φ è singolare ».

È interessante osservare (P. ERDÖS e A. RÉNYI [2]) che il teorema in questione non è più valido se sostituiamo alle lacune di HADAMARD lacune di FABRY, cioè per le quali $n_k/k \to +\infty$. Anzi, P. ERDÖS [3] ha dimostrato che non è sufficiente nemmeno supporre

$$n_{k+1} - n_k \to +\infty .$$

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica dell'Università, via C. Saldini, 50, Milano (Italia).

(**) Ricevuto il 28 luglio 1961. Studio eseguito nell'ambito del Gruppo di ricerca n. 14 (1960-61) del C.N.R..

Infine P. ERDÖS e A. RÉNYI [2] hanno mostrato che le proprietà aritmetiche della successione $\{n_k\}$ entrano in gioco in questi problemi. Ci occuperemo in questa nota dell'estensione del noto teorema di A. HURWITZ e di G. PÓLYA [4]:

Teorema B:

« Sia $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ una serie di potenze con raggio di convergenza 1; allora esiste una funzione $f^*(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \pm a_n z^n$, che ha la circonferenza $|z| = 1$ come frontiera di punti critici; inoltre la classe C delle funzioni f^* con questa proprietà ha la potenza del continuo ».

L'estensione del teorema B sarà su due direzioni: la prima, per ottenere una misura nell'insieme delle serie $\sum_{n=0}^{\infty} \pm a_n z^n$ e la seconda per sostituire la parola « raggio singolare » al posto di « punto critico ».

Il teorema che dimostreremo è il seguente:

Teorema 1:

Sia $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *una serie di potenze convergente in* $|z| < 1$, *e supponiamo che esista una successione* $\{n_k\}$ *tale che*

$$n_{k+1}/n_k \geqslant q > 1, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} |a_{n_k}|^2 = +\infty. \tag{1}$$

Allora ogni raggio R_φ *è un raggio singolare per «quasi tutte» le funzioni* $\sum_{n=0}^{\infty} \pm a_n z^n$.

Osservazione 1:

« quasi tutte » nel senso della misura che introdurremo: la misura della classe C delle funzioni $\sum \pm a_n z^n$ per le quali ogni raggio R_φ è singolare, è $m(C) = 1$.

Osservazione 2:

se la funzione $f(z) = \sum a_n z^n$ ha infiniti coefficienti $a_{n'}$ per i quali $|a_{n'}| > c_0$, c_0 costante positiva, allora essa soddisfa alle condizioni del teorema.

Resta aperto il problema di indebolire le condizioni imposte alla successione dei coefficienti $\{a_n\}$. Può darsi che sia sufficiente la condizione $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 = +\infty$, in luogo della (1).

Osservazione 3:

Il teorema 1 viene a precisare il seguente teorema analogo di D. Gaier e W. Meyer-König [1]:

Teorema B′

« Sia $f(z) = \sum_0^\infty a_n z^n$ una serie di potenze convergente in $|z| < 1$, e sia $\sum_0^\infty |a_n| = +\infty$. Allora esiste una successione di segni $\{\pm 1\}$ tale che $f^*(z) = \sum_0^\infty \pm a_n z^n$ ha ogni raggio R_φ come raggio singolare ».

Tuttavia il procedimento da noi seguito è differente da quello usato da questi due Autori. Infatti, perveniamo al risultato analogo a quello del teorema B' esteso a « quasi tutte » le funzioni f^*, facendo uso delle funzioni di Rademacher, e di un lemma (v. lemma 4) che riguarda una certa trasformazione dell'intervallo $[0, 1)$ in se stesso. La parte finale della dimostrazione si basa sopra una idea classica e utilizza il teorema A di Gaier e Meyer-König.

2. - Funzioni di Rademacher e introduzione della misura.

Sia t un numero di $(0, 1)$ e consideriamo lo sviluppo di t in serie binaria:

$$t = \sum_{n=1}^\infty b_n/2^n.$$

In questa formula i coefficienti b_n sono 0 oppure 1; se t è della forma $m/2^n$, scriveremo lo sviluppo nella forma in cui tutti i coefficienti sono 0 da un certo posto in poi. Così scriveremo

$$3/4 = 1/2 + 1/2^2 + 0/2^3 + \ldots \quad \text{e non} \quad 3/4 = 1/2 + 0/2^2 + 1/2^3 + 1/2^4 + \ldots$$

Poniamo $r_n(t) = 1 - 2b_n$; $r_n(t)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ è la successione delle funzioni di Rademacher.

Avremo

$$1 - 2t = \sum_{n=1}^\infty r_n(t)/2^n \quad \text{con } r_n(t) = +1 \text{ oppure } -1\,. \tag{2}$$

Ponendo per definizione $r_n(t+1) = r_n(t)$, abbiamo

$$r_n(t) = r_1(2^{n-1}t)\,. \tag{3}$$

Ne segue che la funzione $r_n(t)$ è periodica con periodo $1/2^{n-1}$. È evidente che ad ogni successione di segni $\{\pm 1\}$ che non sia dello stesso segno da un certo posto in poi, corrisponde uno e un sol numero t tale che $\{\pm 1\} \equiv \{r_n(t)\}$.

Poichè le successioni di segni $\{\pm 1\}$ che sono definitivamente costanti formano una infinità numerabile, la classe delle funzioni $f^*(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \pm a_n z^n$ coincide, a meno di una infinità numerabile di elementi, con la classe delle funzioni

$$f(z;\ t) = \sum_{n=0}^{\infty} r_{n+1}(t)\, a_n z^n, \quad \text{per } 0 \leqslant t < 1\,.$$

Siamo ora in grado di introdurre una misura (1) nella classe delle funzioni $f(z;\ t)$: ad ogni insieme di funzioni $f(z;\ t)$ possiamo fare corrispondere l'insieme dei t, e introdurre la misura di LEBESGUE per questi insiemi di t. Osserviamo infine che J. E. LITTLEWOOD e A. C. OFFORD [5] hanno usato questo tipo di misura per studiare il comportamento delle funzioni intere del tipo $\sum \pm c_n z^n$.

Si presenta ora il problema di verificare che gli insiemi che consideremo sono misurabili. A questo provvede il seguente

Lemma 1:

L'insieme $E_\varphi = E_\varphi(f)$ dei punti t per i quali la corrispondente funzione $f(z;\ t)$ possiede il raggio R_φ come singolare è misurabile.

Dimostrazione:

le funzioni $r_n(t)$ sono evidentemente misurabili, e quindi anche la funzione $f(z,\ t)$ delle due variabili z, t è misurabile per $|z| < 1$. Sia ora $R_n(\eta)$ il settore $\varphi - \eta < \arg z < \varphi + \eta$, $|z| \leqslant 1 - 1/n$.

Poniamo $K_n(t,\ \eta) = \max\limits_{z \in R_n(\eta)} |f(z,\ t)|$.

Per il teorema del massimo modulo $K_n(t,\ \eta) \leqslant K_{n+1}(t,\ \eta)$; d'altra parte da quanto precede è evidente che $K_n(t,\ \eta)$ è una funzione misurabile. Dunque è misurabile l'insieme $E_n(\eta,\ K)$ dei punti t per i quali $K_n(t,\ \eta) < K$, e avremo anche $E_n(\eta,\ K) \supseteq E_{n+1}(\eta,\ K)$. Dunque esiste l'insieme limite $\lim\limits_{n\to\infty} E_n(\eta,\ K) = E(\eta,\ K)$, e questo insieme limite risulta misurabile.

Sia $E(\eta) = \lim\limits_{n\to\infty} E(\eta,\ n)$; allo stesso modo, anche $E(\eta)$ è misurabile, e quindi anche $E_\varphi = \lim\limits_{\eta\to 0} E(\eta)$. Ma ora, per il modo con cui è stato costruito, l'insieme E_φ è l'insieme dei t per i quali

$$\lim_{\eta\to 0} \varlimsup_{\substack{|z|\to 1- \\ |\arg z - \varphi| < \eta}} |f(z,\ t)| = +\infty,$$

cioè l'insieme dei punti t per i quali il raggio R_φ è singolare per $f(z,\ t)$, e il lemma è dimostrato.

---

(1) Inoltre si dimostra facilmente che la probabilità che $r_n(t)$ sia $= +1$ oppure -1, è $1/2$, e che queste probabilità ottenute al variare di n sono fra loro indipendenti. Ciò giustifica l'introduzione di una misura basata sugli $r_n(t)$.

3. - Lemmi preliminari.

Il seguente lemma è fondamentale per la dimostrazione del nostro teorema. Questo lemma è dovuto sostanzialmente a H. STEINHAUS [10].

Lemma 2:
Se E_φ è l'insieme definito nel lemma 1, allora $m(E_\varphi) = 0$ oppure $m(E_\varphi) = 1$.

Dimostrazione:
osserviamo dapprima che se il raggio R_φ è singolare per $f(z, t)$, è anche singolare per ogni funzione ottenuta da $f(z, t)$ alterando un numero finito di coefficienti. Ma ora dalla (3) segue che se $n \geqslant k$, allora $r_n(t + 1/2^{k-1}) = r_n(t)$. Dunque le due successioni di segni $\{ r_n(t) \}$ e $\{ r_n(t + 1/2^{k-1}) \}$ differiscono soltanto per un numero finito di elementi. Dalla precedente osservazione concludiamo che:

se $t \in E_\varphi$, allora $(t + 1/2^{k-1}) \pmod 1 \in E_\varphi$, per ogni k intero positivo.

In altre parole, l'insieme E_φ è periodico, con periodo arbitrariamente piccolo; dal lemma 1 sappiamo che E_φ è misurabile, e dunque per un noto teorema di BURSTIN (legge dello $0 - 1$) avremo il lemma 2. Vedi a questo proposito M. KAC [6].

Il lemma 2 ci dice quindi che: fissato un raggio R_φ, esso ha il medesimo comportamento (di non-singolarità oppure di singolarità) per «quasi tutte» le funzioni $f(z, t)$.

Lemma 3:
E' possibile ripartire l'insieme I dei raggi R_φ di argomento φ razionale in due classi disgiunte I_1 e I_2 con le seguenti proprietà:

(i) ogni raggio di I_1 è non-singolare per «quasi tutte» le $f(z, t)$.

(ii) ogni raggio di I_2 è singolare per «quasi tutte» le $f(z, t)$.

Dimostrazione:
poichè l'insieme dei numeri razionali è numerabile, ordiniamolo in una successione $\{ \varphi_n \}$. Dividiamo ora gli indici n in due classi N_1 e N_2 al seguente modo:

$$\begin{array}{llll} \text{se} & m(E_{\varphi_n}) = 0 & \text{allora} & n \in N_1 \\ \text{se} & m(E_{\varphi_n}) = 1 & \text{allora} & n \in N_2 . \end{array}$$

Poichè evidentemente l'insieme $E_1 = \bigcup_{n \in N_1} E_{\varphi_n}$ è misurabile e di misura nulla, così l'insieme $E_2 = \bigcap_{n \in N_2} E_{\varphi_n}$ è misurabile e di misura 1 (si usa l'additività della misura di LEBESGUE), la classe I_1 sarà l'insieme dei raggi R_{φ_n} con $n \in N_1$; analogamente per I_2, e il lemma è dimostrato. Occorre ora un nuovo lemma.

Sia t_0 un numero fissato, e consideriamo la trasformazione $t \to T = T(t)$ definita da

$$r_n(t_0)\, r_n(t) = r_n(T) \qquad n = 1, 2, \dots . \tag{4}$$

Per quanto è stato detto sulle funzioni di RADEMACHER, T esiste sempre ed è unica, fatta eccezione per una infinità numerabile di punti t. Tuttavia se ricordiamo la (2), possiamo porre per ogni t:

$$1 - 2T = \sum_{n=1}^{\infty} r_n(t_0)\, r_n(t)/2^n \tag{5}$$

la trasformazione così ottenuta sarà biunivoca senza eccezioni. Allora avremo:

Lemma 4:

Se E è un insieme misurabile, anche $T(E)$ è misurabile, e la trasformazione $t \to T$ conserva la misura, cioè

$$m(E) = m(T(E)).$$

Dimostrazione:

è evidente dalla (5) (il secondo membro converge uniformemente ed è uniformemente limitato) che $T(t)$ è una funzione misurabile, e che la trasformazione $T(t)$ conserva la misurabilità.

Ricordiamo ora la seguente proprietà delle funzioni di RADEMACHER:

$$r_n^2(t) = 1 \tag{i}$$

$$\int_0^1 r_{m_1}(t) \dots r_{m_k}(t)\, dt = 0 \quad \text{se} \quad m_1 > m_2 > \dots > m_k . \tag{ii}$$

Dunque per la (5) avremo

$$\int_0^1 T^k(x)\, dx = \int_0^1 \left\{ \sum (1 - r_n(t_0)\, r_n(t))/2^{n+1} \right\}^k dt; \tag{6}$$

d'altra parte è permesso integrare termine a termine, e per le (i) e (ii), se

$$\int_0^1 r_{m_1}(t) \dots r_{m_k}(t)\, dt \neq 0,$$

gli indici $m_1, \ldots, m_k$ saranno tali che $r_{m_1}(t) \ldots r_{m_k}(t) \equiv 1$. Ma allora avremo $r_{m_1}(t_0) \ldots r_{m_k}(t_0) = 1$, e ne segue che l'integrale del secondo membro della (6) non dipende da t_0. Per valutarlo, poniamo $t_0 = 0$; ricaviamo così

$$\int_0^1 T^k(x)\, dx = \int_0^1 x^k\, dx, \quad \text{per } k \text{ intero} \geqslant 0. \tag{7}$$

Si trova ora senza difficoltà che se $f(x)$ è misurabile, lo è anche $f(T(x))$; e se f è inoltre sommabile e di quadrato sommabile, essendo lo spazio L^2 separabile e completo, dal teorema di approssimazione di WEIERSTRASS si trova dalla (7) che:

se f è sommabile e appartiene allo spazio L^2

$$\int_0^1 f(T(x))\, dx = \int_0^1 f(x)\, dx. \tag{8}$$

Ma ora, se $e(x)$ è la funzione caratteristica dell'insieme E, poichè $T(T(x)) = x$ tranne al più per una infinità numerabile di punti, $e(T(x))$ sarà la funzione caratteristica di $T(E)$, tranne al più per una infinità numerabile di punti.

Usando la (8) avremo infine

$$m(T(E)) = \int_{T(E)} dx = \int_0^1 e(T(x))\, dx = \int_0^1 e(x)\, dx = m(E),$$

e il lemma è infine dimostrato.

Osservazione:
è sufficiente ai fini del nostro lavoro sapere che se $m(E) = 0$, allora $m(T(E)) = 0$; d'altra parte poichè le trasformazioni $T(x)$ introdotte nel lemma 4 possono comparire anche in altre questioni, ci è sembrato interessante il fatto che la trasformazione $t \to T$ conservasse la misura.

4. - Dimostrazione del teorema.

Sia $\{n_k\}$ una successione con $n_{k+1}/n_k \geqslant q > 1$ tale che

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_{n_k}|^2 = +\infty. \tag{9}$$

Siano inoltre t_1 e t_2 due numeri tali che

$$r_{n+1}(t_1) = r_{n+1}(t_2) = 1 \qquad \text{se} \qquad n = n_k$$

$$r_{n+1}(t_1) = -r_{n+1}(t_2) \qquad \text{se} \qquad n \neq n_k.$$

È chiaro che tali numeri esistono sempre.

Allora (tranne per una infinità numerabile di punti t)

$$f(z, T_1) = \sum_{n=0}^{\infty} r_{n+1}(t_1)\, r_{n+1}(t)\, a_n\, z^n$$

$$f(z, T_2) = \sum_{n=0}^{\infty} r_{n+1}(t_2)\, r_{n+1}(t)\, a_n\, z^n$$

dove $T_1 = T_1(t)$ e $T_2 = T_2(t)$ sono le trasformazioni introdotte nel lemma 4.

Poniamo, seguendo una idea che E. LANDAU [7] ha utilizzata per dimostrare il teorema B di HURWITZ e PÓLYA:

$f^*(z, t) = \{ f(z, T_1) + f(z, T_2) \}/2$, e osserviamo che a causa del lemma 3 e del fatto che la $T(t)$ conserva la misura sarà: ogni raggio di I_1 è non-singolare per « quasi tutte » le $f(z, T_1)$ e « quasi tutte » le $f(z, T_2)$. Ne segue il risultato:

(a) ogni raggio di I_1 è non-singolare per « quasi tutte » le $f^*(z, t)$.

La dimostrazione viene ora rapidamente, se si utilizza la (a). Avremo, tranne per una infinità numerabile di t,

$$f^*(z, t) = \sum_{k=1}^{\infty} r_{n_k}(t)\, a_{n_k+1}\, z^{n_k},$$

da cui, tenendo conto della (9):

$$1/2\pi \int_0^{2\pi} | f^*(re^{iu}, t) |^2\, du = \sum |a_{n_k}|^2\, r^{2n_k} \to +\infty, \tag{10}$$

per $r \to 1-$. Dunque, se si esclude una infinità numerabile di punti t, ogni $f^*(z, t)$ ha almeno un raggio singolare, e poichè $f^*(z, t)$ ha lacune di HADAMARD possiamo applicare il teorema A di D. GAIER e W. MEYER-KÖNIG ottenendo:

ogni $f^*(z, t)$ ha ogni R_φ come raggio singolare, se si fa eccezione per un insieme numerabile di valori della t.

Ne segue immediatamente dalla (a) che l'insieme I_1 è vuoto. Dunque ogni raggio R_φ di argomento razionale è singolare per « quasi tutte » le $f(z, t)$; poichè è chiaro che l'insieme dei φ tali che R_φ è singolare per « quasi tutte » le $f(z, t)$ è chiuso, e d'altra parte i punti di argomento razionale sono densi su $|z| = 1$, il teorema 1 risulta così dimostrato.

È possibile, col medesimo ragionamento, dimostrare il seguente

Teorema C: (H. Steinhaus [10])

« Sia $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ una serie di potenze convergente in $|z| < 1$; allora « quasi tutte » le funzioni $\sum_{n=0}^{\infty} \pm a_n z^n$ hanno la circonferenza $|z| = 1$ come frontiera di singolarità ».

Si ottiene quindi una precisazione del teorema B di Hurwitz e Pólya. Nel caso che $\lim |a_{n'}|^{1/n'} = 1$, dove n' indica la successione degli indici m per i quali $a_m \neq 0$, il teorema C (sotto una forma anche più precisa) è dovuto a Hausdorff [8].

Vogliamo infine ricordare, in questo ordine di idee, il seguente

Teorema D (H. Boerner [9]):

« Sia $f(z) = \sum |a_n| \exp(2\pi i x_n) z^n$. Nello spazio torico reale del punto $X = (x_0, x_1, ...)$ (mod. 1) l'insieme delle serie prolungabili fuori del cerchio di convergenza è un insieme di misura nulla ».

Bibliografia.

[1] D. Gaier e W. Meyer-König, *Singuläre Radien bei Potenzreihen*, Jber. Deutsch. Math. Verein., **59**, (1956), 36-48.

[2] P. Erdös e A. Rényi, *On singular radii of power series*, Publ. of the Math. Inst. of the Hungar. Acad. of Science, vol. III, (1958), 159-169.

[3] P. Erdös, *Über eine Fragestellung von* Gaier *und* Meyer-König, Jber. Deutsch. Math. Verein., **60**, (1957), 89-92.

[4] A. Hurwitz e G. Pólya, *Zwei Beweise eines von Herrn* Fatou *vermuteten Satzes*, Acta Math., **40**, (1917), 179-181.

[5] J. E. Littlewood e A. C. Offord, *On the distribution of zeros and a-values of a random integral function (II)*, Ann. of Math., (2) **49**, (1948), 885-952.

[6] M. Kac, *Statistical indipendence in probability, analysis and number theory*, Carus Math. Monographs n. **12**.

[7] E. Landau, *Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie*, Zweite Auflage, Berlin 1929.

[8] F. Hausdorff, *Zur Verteilung der fortsetzbaren Potenzreihen*, Math. Z. **4**, (1919), 98-103.

[9] H. BOERNER, *Über die Häufigkeit der nicht analytisch fortsetzbaren Potenzreihen*, S.-B. Deutsch. Akad. Wiss. Berlin kl. Math. Phis. Tech. (1938), 165-174.

[10] H. STEINHAUS, *Über die Wahrscheinlichkeit dafur, dass der Konvergenzkreis eine Potenzreihe ihre natürliche Grenze ist*, Math. Z. **31**, (1929), 408-416.

[11] L. BIEBERBACH, *Analytische Fortsetzung*, Ergeb. der Math., 1955.

Summary.

The following theorem, extending a well known result of HURWITZ *and* PÓLYA *on powers series* $\sum \pm a_n z^n$, *is proved:*

Theorem: Let the a_n *fulfill a certain condition. Then every radius of the circle of convergence is a singular radius (in the sense of* GAIER *and* KÖNIG*) for almost all such power series.*