Riv. Mat. Univ. Parma (2) 2 (1961), 313-354

PASQUALE MASTROGIACOMO (*)

Su alcuni tipi di complessi quadratici di rette di S_n. (**)

PREMESSA.

Uno studio organico dei complessi algebrici di rette di ordine m di uno spazio proiettivo complesso ad n dimensioni (S_n) è stato iniziato per $m \geqslant 1$ ed $n \geqslant 2$ da B. SEGRE [9] (1) e da questi completato soltanto per i complessi quadratici di rette di tipo generale di S_4 ([10] e [11]). I complessi di rette del 1º e del 2º ordine di S_3 sono stati esaminati a fondo da F. KLEIN [8]. Tra i complessi quadratici di rette di tipo particolare di S_3 sono stati largamente studiati da BATTAGLINI [1], C. SEGRE [12], A. TERRACINI [15], E. BOMPIANI [5] ed altri i cosiddetti complessi armonici (cioè quelli mutati in sè dalle omologie armoniche determinate da un tetraedro) [3]. Recentemente E. BOMPIANI [5] ha determinato i complessi quadratici e cubici di rette di S_n $(n > 3)$ mutati in sè dalle omologie armoniche determinate da un $(n+1)$ — edro e successivamente [6] ha risolto l'analogo problema relativamente a spazi subordinati qualsiansi S_{h-1} di S_n. Particolari complessi armonici di S_3 sono i complessi tetraedrali o complessi di Reye: ricordo che un complesso tetraedrale può definirsi [3] come il luogo delle rette le cui intersezioni con le facce di un tetraedro assegnato formano un birapporto prefissato. Di esso sono note [3] diverse generazioni proiettive.

In questo lavoro realizzo in S_n $(n \geqslant 3)$ una delle possibili generalizzazioni dei complessi tetraedrali, introducendo un tipo di complesso quadratico di rette

---

(*) Indirizzo: Istituto di Geometria, Università di Bari (Italia).

(**) Ricevuto il 15 dicembre 1961.

Il presente lavoro è stato eseguito nell'ambito del Gruppo di ricerca n. 1 del Comitato per la Matematica del C. N. R. per l'anno accademico 1961-62.

(1) Le [ ] si riferiscono alla Bibliografia alla fine del lavoro.

(che per $n = 3$ coincide, nel caso generale, col complesso tetraedrale), assegnandone alcune generazioni proiettive e determinandone delle equazioni rispetto a riferimenti proiettivi intrinsecamente fissati.

Inoltre pongo in evidenza alcune proprietà di siffatti complessi e ne determino le *varietà centrali* (luoghi dei centri).

Un sunto particolareggiato del lavoro è contenuto nel seguente n. 1.

SUNTO.

1. – Limitandomi dapprima (§ **1**) al caso di $n = 4$, considero in S_4 una proiettività non degenere Ω tra due stelle $\sum$ e $\sum'$ di ∞^3 rette a centri distinti e dimostro che *il luogo delle rette incidenti rette corrispondenti in Ω è un complesso quadratico C.*

Osservato che in generale il luogo dei centri (*varietà centrale*) del complesso C, se C stesso è irriducibile, coincide col luogo dei punti di intersezione di rette corrispondenti in Ω (*nucleo di Ω*), determino una classificazione dei vari tipi di complessi C mediante una classificazione delle proiettività che li generano.

Esamino poi di ciascuno dei complessi così ottenuti il relativo luogo dei centri, provando che nel caso generale esso è costituito da una quartica razionale normale (irriducibile) ed in quelli particolari da una quartica variamente degenere ed infine, nei casi di riducibilità di C, da una coppia di piani. Determino, in opportuni riferimenti proiettivi intrinsecamente fissati, le equazioni dei complessi suddetti e delle relative varietà centrali. Verifico inoltre che i complessi sopra introdotti sono univocamente determinati dai rispettivi luoghi dei centri ed ottengo altre generazioni proiettive di alcuni dei complessi particolari precedenti (§ **2**).

Considerata poi (§ **1**) in S_4 una proiettività Ω non degenere tra due stelle di ∞^3 rette con lo stesso centro S, provo che, come nel caso di due stelle a centri distinti, il luogo delle rette incidenti rette corrispondenti in Ω è anche ora un complesso quadratico, che ovviamente può ottenersi proiettando da S il complesso subordinato da C in un generico iperpiano non passante per S.

Inoltre, assegnata in S_3 una omografia non degenere $\overline{\Omega}$, determino (§ **1**) l'equazione del luogo delle rette congiungenti punti in essa corrispondenti ottenendo così un complesso quadratico, che solo nel caso generale, come è noto [**3**], è un complesso tetraedrale, il cui tetraedro fondamentale è quello avente per vertici i punti uniti di $\overline{\Omega}$. Poichè in ogni caso il tipo di complesso così generato dipende ovviamente dalla configurazione degli elementi uniti della omografia generatrice $\overline{\Omega}$, si ottengono in tal modo, accanto ai complessi tetraedrali, altri tipi di complessi quadratici di rette irriducibili di S_3, che ho chiamato *pseudotetraedrali* (§ **3**).

Esamino poi (§ **4**) alcune proprietà dei complessi quadratici di rette di S_4 introdotti nel § **1**, determinando, tra l'altro, gli iperpiani ed i piani totali di questi complessi.

Al fine di generalizzare i suddetti complessi considero poi in S_n, per $n > 3$, una proiettività Ω tra le due stelle degli S_h, con $h = n - 3$, per due assegnati S_{h-1} fra loro indipendenti, e provo che anche ora il luogo delle rette incidenti S_h corrispondenti in Ω è un complesso quadratico C. Trascurando, per brevità, il problema della classificazione dei complessi così ottenuti e lo studio dei casi particolari, mi limito ad esaminare soltanto il caso in cui Ω è di tipo generale.

In tal caso determino le equazioni, in un riferimento proiettivo intrinsecamente fissato, di Ω, del complesso C da essa generato e della relativa varietà centrale, e dimostro che il complesso C è irriducibile e che la sua varietà centrale è una $S_{h-1} - V_h^4$ razionale, normale (irriducibile).

Dimostro poi che per $n \geqslant 8$ ($h \geqslant 5$) il complesso C può ottenersi proiettando, dall'S_{h-5} di intersezione degli spazi-asse delle due assegnate stelle di S_h, il complesso C' subordinato da C stesso in un qualunque S_7 sghembo col suddetto S_{h-5}. Analogamente la varietà centrale di C è in tal caso l'S_{h-5}-cono proiettante dal medesimo S_{h-5} la varietà centrale $S_3 - V_4^4$ di C'.

Infine, tornando a supporre n intero qualunque (> 3), provo che i suddetti complessi di S_n, nel caso che le proiettività generatrici Ω siano di tipo generale, sono univocamente determinati dalle rispettive varietà centrali e che le omografie di S_n che li mutano in sè sono tutte e sole le omografie di S_n che mutano in sè le rispettive varietà centrali.

§ 1. – Alcuni tipi di complessi quadratici di rette di S_4.

2. – Limitandoci per ora a considerare il caso di S_4, indichiamo con x^i ($i = 1, 2, 3, 4, 5$) le coordinate proiettive omogenee di un suo generico punto. Usufruendo dell'arbitrarietà del riferimento si assumano come punti O_1 e O_5 (²) i centri di due assegnate stelle di ∞^3 rette $\sum$ e $\sum'$. Siano s ed s' due rette generiche di $\sum$ e di $\sum'$, aventi per equazioni rispettivamente

$$\frac{x^2}{\lambda^1} = \frac{x^3}{\lambda^2} = \frac{x^4}{\lambda^3} = \frac{x^5}{\lambda^4} \qquad (\lambda^i \text{ non tutti nulli}), \tag{2.1}$$

(²) Nel seguito si indicherà con O_i il punto di coordinate proiettive omogenee tutte nulle tranne la *i-esima*. Inoltre si indicherà con U il *punto-unità* di S_4, con U_i ($i = 1, 2, 3, 4, 5$) il *punto-unità* dell'iperpiano di equazione $x^i = 0$, con U_{ij} ($i \neq j$) il *punto-unità* della retta O_iO_j ed infine con U_{ijk}(i, j, k a due a due diversi tra loro) il *punto-unità* del piano $O_iO_jO_k$.

e

$$\frac{x^1}{\lambda'^1} = \frac{x^2}{\lambda'^2} = \frac{x^3}{\lambda'^3} = \frac{x^4}{\lambda'^4} \qquad (\lambda'^i \text{ non tutti nulli})\,. \tag{2.2}$$

Inoltre sia Ω una proiettività non degenere tra $\sum$ e $\sum'$, rappresentata dalle equazioni

$$\varrho\lambda'^i = a^i_{.k}\lambda^k, \qquad (i,\ k = 1,\ 2,\ 3,\ 4;\ \ \varrho \neq 0 \ \text{ e } \ \text{Det.}\ (a^i_{.k}) \neq 0)\,, \tag{2.3}$$

nelle quali si è sottinteso il simbolo di sommazione rispetto all'indice k ripetuto.

Al fine di determinare *il luogo delle rette incidenti rette di $\sum$ e di $\sum'$ corrispondenti in Ω*, detti $\underset{1}{X}(\underset{1}{x}^i)$ e $\underset{2}{X}(\underset{2}{x}^i)$ due punti distinti qualunque di una generica retta r ed indicate con $x^i = \overset{1}{\mu}\underset{1}{x}^i + \overset{2}{\mu}\underset{2}{x}^i$ le coordinate proiettive omogenee del generico punto di r, si osservi che imponendo che r sia incidente ([3]) la retta di equazioni (2.1) si ricavano facilmente per le sue coordinate plückeriane p^{ik} le seguenti condizioni essenziali

$$\lambda^1\, p^{35} - \lambda^2\, p^{25} + \lambda^4\, p^{23} = \lambda^1\, p^{45} - \lambda^3\, p^{25} + \lambda^4\, p^{24} = 0\,.$$

Analogamente affinchè r incida la retta di equazioni (2.2) occorre e basta che risulti

$$p^{[12}\,\lambda'^{4]} = p^{[13}\,\lambda'^{4]} = 0\,,$$

in cui le parentesi quadre indicano l'operazione di alternazione ([4]).

([3]) Per la qual cosa basta sostituire le $x^i = \overset{1}{\mu}\underset{1}{x}^i + \overset{2}{\mu}\underset{2}{x}^i$ nelle (2.1) ed imporre che il sistema così ottenuto di equazioni lineari omogenee nelle variabili $\overset{1}{\mu}$ e $\overset{2}{\mu}$ ammetta una soluzione costituita da valori non entrambi nulli, determinati a meno di un comune fattore diverso da zero.

([4]) Ricordiamo che, considerata una qualsiasi espressione del tipo $a^{1,2,\ldots,n}$ si indica con $a^{[1,2,\ldots,n]}$ l'espressione seguente

$$a^{[1,2,\ldots,n]} = 1/n!\sum_{r_1,\ldots,r_n}^{1,\ldots,n}(-1)^r\, a^{r_1,\ldots,r_n}$$

in cui la sommatoria rispetto agli indici $r_1, r_2, \ldots, r_n$ è estesa a tutte le permutazioni semplici dei numeri naturali 1, 2, ..., n e l'indice r è il numero delle inversioni della permutazione $r_1 r_2 \ldots r_n$ rispetto alla permutazione $1\ 2 \ldots n$. Ricordiamo inoltre che l'operazione che conduce da $a^{1,2,\ldots,n}$ ad $a^{[1,2,\ldots,n]}$ si chiama *alternazione*.

In definitiva, tenendo conto delle (2.3), si ricava che il luogo richiesto è il luogo delle rette le cui coordinate plückeriane p^{ij} soddisfano l'equazione

$$\begin{vmatrix} p^{35} & -p^{25} & 0 & p^{23} \\ p^{45} & 0 & -p^{25} & p^{24} \\ p^{[12}a^{4]}_{\cdot 1} & p^{[12}a^{4]}_{\cdot 2} & p^{[12}a^{4]}_{\cdot 3} & p^{[12}a^{4]}_{\cdot 4} \\ p^{[13}a^{4]}_{\cdot 1} & p^{[13}a^{4]}_{\cdot 2} & p^{[13}a^{4]}_{\cdot 3} & p^{[13}a^{4]}_{\cdot 4} \end{vmatrix} = 0$$

Questa equazione, sviluppando opportunamente il determinante in essa contenuto, tenendo conto delle relazioni quadratiche tra le coordinate plückeriane di rette, dividendo ambo i membri per il fattore $p^{14}p^{25} \neq 0$ ([5]) ed indicando con $a^{ij\cdot\cdot}_{\cdot\cdot hk}$ il minore del 2° ordine contenuto nelle righe di indici i e j e nelle colonne di indici h e k della matrice $(a^{i}_{\cdot j})$ dei coefficienti delle (2.3), può scriversi più semplicemente

$$p^{[12}a^{34]}_{\cdot\cdot\alpha\beta}\, p^{\alpha+1\ \beta+1} = 0, \qquad (\alpha < \beta), \tag{2.4}$$

in cui la sommatoria rispetto agli indici ripetuti α e β è estesa a tutte le combinazioni semplici di classe due dei numeri naturali 1, 2, 3, 4.

Si può perciò concludere che

I. *Data in S_4 una proiettività non degenere Ω tra due stelle di ∞^3 rette a centri distinti, il luogo delle rette incidenti rette corrispondenti in Ω è un complesso quadratico.*

È ovvio che i punti di intersezione di rette corrispondenti in Ω sono centri di questo complesso e che inoltre le particolarità del complesso sono in stretta relazione con quelle della proiettività Ω. Al fine di esaminare i tipi di complessi che si ottengono considerando i vari tipi di proiettività Ω e di scriverne delle equazioni canoniche ricordiamo rapidamente la classificazione di queste ultime.

Avvertiamo che d'ora in poi chiameremo *nucleo della proiettività* Ω il luogo dei punti di intersezione di rette corrispondenti in Ω.

([5]) Si osservi che se Ω è non degenere, come abbiamo supposto, questo fattore è certamente non nullo, perchè se ad es. fosse $p^{14} = 0$ tutte le rette incidenti il piano $O_2O_3O_5$ incontrerebbero rette corrispondenti in Ω. Ciò implicherebbe che ad ogni retta per 0_5 appartenente a questo piano corrisponderebbero in Ω^{-1} tutte le rette per 0_1 ad essa incidenti, contro l'ipotesi che Ω sia non degenere. In modo analogo si prova che è $p^{25} \neq 0$.

Indicate poi con $m \equiv n'$ la retta O_1O_5 e con m' ed n rispettivamente le corrispondenti di m in Ω e di n' in Ω^{-1}, si osservi che sono a priori possibili i seguenti tre casi:

a) m' ed n sghembe,

b) $m' \not\equiv n$ complanari,

c) $m' \equiv n \ (\equiv m \equiv n')$.

Si osservi che nel *caso* a) se in Ω vi è un iperpiano unito esso coincide necessariamente con l'iperpiano $\alpha\,(m', n)$ (congiungente m' con n) e che per ciò in tal caso sono possibili soltanto le due seguenti eventualità:

a_1) in Ω non vi è alcun iperpiano unito;

a_2) in Ω vi è un solo iperpiano unito.

Nel *caso* b) Ω induce sul piano $\pi\,(m', n)$ una proiettività ω e nel fascio di iperpiani per π una proiettività ω'. Sono perciò in tal caso possibili le seguenti eventualità:

b_1) in ω' vi sono due iperpiani uniti distinti;

b_2) ω' è parabolica;

b_3) ω' è l'identità.

Nel *caso* c) Ω induce una proiettività ω tra i piani per $O_1\,O_5$ ed una proiettività ω' tra gli iperpiani per $O_1\,O_5$. In tal caso sono ovviamente possibili (lo verificheremo in seguito analiticamente) i seguenti sei casi particolari, caratterizzati dal fatto che

c_1) esistono tre piani uniti in ω tra loro distinti e tre iperpiani uniti in ω' tra loro distinti, congiungenti i tre piani uniti a due a due;

c_2) esistono due piani uniti in ω, uno doppio e l'altro semplice, e due iperpiani uniti in ω', uno doppio, congiungente i due piani uniti, ed uno semplice, passante per il piano unito doppio e non per quello semplice;

c_3) esistono un solo piano unito triplo in ω ed un solo iperpiano unito triplo in ω', passante per il piano unito;

c_4) esistono un fascio di piani uniti in ω appartenenti ad un iperpiano α, unito in ω', ed un piano π unito in ω, non appartenente ad α ed asse di un fascio di iperpiani uniti in ω';

c$_5$) vi è un fascio di piani uniti in ω appartenenti ad un iperpiano α, unito in ω', ed esiste un piano π, unito in ω, appartenente ad α ed asse di un fascio di iperpiani uniti in ω';

c$_6$) ω ed ω' sono proiettività identiche.

Esamineremo separatamente i complessi quadratici di rette corrispondenti ai casi precedenti. Osserviamo per ora che essi sono i soli generabili, nel modo anzidetto, mediante Ω e che sono tra loro proiettivamente distinti.

3. – Iniziamo con l'esaminare il *caso* a$_1$). Proviamo anzitutto che in tal caso *il nucleo di Ω è una quartica irriducibile $\in S_4$ (razionale normale)*. Considerato infatti un generico iperpiano non appartenente ad alcuna delle due stelle $\sum$ e $\sum'$ si osservi che su di esso l'assegnata proiettività Ω subordina una omografia ovviamente di tipo generale (come Ω stessa): ne segue facilmente che il nucleo di Ω è una curva algebrica C^4. Questa curva è certamente irriducibile perchè se, ad esempio, contenesse una retta r (ovviamente non passante nè per O_1 nè per O_5, essendo Ω non degenere), contro l'ipotesi che non vi siano iperpiani uniti, l'$S_3 \equiv \alpha\,(m',\ n)$ risulterebbe unito ([6]).

Poichè in modo analogo si prova che la suddetta C^4 non può contenere una conica irriducibile, ne consegue facilmente la sua irriducibilità. Infine, come ogni curva algebrica di ordine $r(C^r)$ irriducibile di S_r ([6 bis]), essa risulta razionale normale.

Ciò premesso per ottenere una equazione canonica del complesso (2.4) *nel caso a_1)* assumiamo m' come retta $O_5\,O_4$ ed n come retta $O_1\,O_2$. Considerata poi una retta p della stella $\sum$, $\not\equiv m$ ed appartenente al piano $(m,\ m')$, sia p' la sua corrispondente in Ω. Assumiamo p e p' rispettivamente come rette $O_1\,O_4$ e $O_5\,O_3$. Inoltre indicato con β l'iperpiano $\alpha'\,(m',\ n',\ p')$ pensato appertenente a $\sum$, sia β' il suo corrispondente in Ω ed osservato che β' contiene m' e p' e che $n' \notin \beta'$, $n \notin \beta'$, assumiamo come punto O_2 l'intersezione, certamente $\not\equiv$ da O_1, di n con β'. Detta infine q' la retta $O_2\,O_5$ ed osservato che la sua corrispondente q in Ω^{-1} appartiene a β, assumiamo come punto O_3 l'intersezione di q col piano $(m',\ p')$ e come punto U ([2]) un punto generico del nucleo di Ω. In conseguenza le equazioni di Ω diventano

$$\varrho\lambda'^i = \lambda^i \qquad (i = 1,\ 2,\ 3,\ 4) \tag{3.1}$$

([6]) Infatti, detto A un punto di intersezione di r con α (ne esiste almeno uno) si osservi che esso non appartiene ad alcuno dei due piani $(m,\ n)$ e $(m',\ n')$. Ne segue che all'iperpiano $(m,\ n,\ A)$, coincidente con α, corrisponde in Ω l'iperpiano $(m',\ n',\ A)$, pur'esso coincidente con α.

([6 bis]) L'effettiva appartenenza della nostra C^4 ad S_4 segue subito dalle a), a$_1$).

e l'equazione (2.4) del complesso generato da Ω assume la forma

$$\delta^{1\,2\,3\,4}_{\alpha\,\beta\,\gamma\,\varepsilon}\, p^{\alpha\beta}\, p^{\gamma+1\ \varepsilon+1} = 0 \quad (3.2)$$ [7]

in cui la sommatoria rispetto agli indici $\alpha\,\beta\,\gamma\,\varepsilon$ è estesa a tutte le permutazioni semplici di 1, 2, 3, 4.

Dalle (3.1) si deduce facilmente che il nucleo di Ω è la C^4 irriducibile di equazioni parametriche

$$x^1 = 1, \qquad x^2 = t, \qquad x^3 = t^2, \qquad x^4 = t^3, \qquad x^5 = t^4. \quad (3.3)$$

Poichè d'altronde, scritta l'equazione del cono del complesso con vertice in un punto generico $X\,(x^i)$, la ricerca della varietà centrale del complesso di equazione (3.2), ossia del luogo dei punti $X\,(x^i)$ vertici di coni del complesso indeterminati, conduce al sistema di equazioni

$$x^1\, x^5 - x^2\, x^4 = x^2\, x^5 - x^3\, x^4 = x^3\, x^5 - (x^4)^2 = 0,$$

le cui soluzioni sono date dalle coordinate di tutti e soli i punti della C^4 di equazioni (3.3), possiamo concludere che

I$_1$. *Assegnata in S_4 una proiettività di tipo generale Ω tra due stelle $\sum$ e $\sum'$ di ∞^3 rette a centri distinti, il luogo delle rette incidenti rette corrispondenti in Ω è un complesso quadratico irriducibile* [8], *la cui varietà centrale* (*luogo dei centri*) *coincide col nucleo di Ω ed è una quartica razionale normale.*

Allo scopo di invertire questa proposizione si consideri un generico complesso quadratico di rette, di equazioni

$$c_{ij,hk}\, p^{ij}\, p^{hk} = 0, \quad (3.4)$$

---

(7) Ricordiamo che il sinbolo di Murnagham $\delta^{1\,2\,3\,4}_{\alpha\,\beta\,\gamma\,\varepsilon}$ (generalizzazione del simbolo δ^i_k di Kronecker) è uguale a $+1$ o -1 se $\alpha\,\beta\,\gamma\,\varepsilon$ è una permutazione semplice dei numeri naturali 1, 2, 3, 4 rispettivamente di classe pari o di classe dispari rispetto alla permutazione 1 2 3 4; $\delta^{1\,2\,3\,4}_{\alpha\,\beta\,\gamma\,\varepsilon}$ è invece nullo in ogni altro caso.

(8) L'irriducibilità del complesso segue facilmente, oltre che dall'evidente irriducibilità della sua equazione (3.2), anche dalla (già provata) irriducibilità della C^4 sua varietà centrale.

in cui la sommatoria rispetto agli indici muti i, j, h, k è estesa a tutte le disposizioni con ripetizione di classe quattro dei numeri 1, 2, 3, 4, 5, per le quali risulti $i < j$, $h < k$, $i \leqslant h$ e tali che $(i = h) \Longrightarrow (j \leqslant k)$ e $(j = k) \Longrightarrow (i \leqslant h)$.

Imponendo che sia centro di questo complesso ogni punto della C^4 di equazioni parametriche (3.3) si ottengono le relazioni

$$c_{12,12} = c_{12,13} = c_{12,14} = c_{12,15} = c_{12,23} = c_{12,24} = c_{12,25} = c_{13,13} = c_{13,14} =$$

$$= c_{13,15} = c_{13,23} = c_{13,34} = c_{13,45} = c_{14,14} = c_{14,15} = c_{14,24} = c_{14,35} = c_{14,45} = c_{15,15} =$$

$$= c_{15,25} = c_{15,34} = c_{15,35} = c_{15,45} = C_{23,23} = C_{23,24} = C_{23,35} = C_{24,25} = c_{24,34} =$$

$$= c_{24,45} = c_{25,25} = c_{25,35} = c_{25,45} = C_{34,34} = C_{34,35} = C_{34,45} = C_{35,35} = C_{35,45} = c_{45,45} = 0 ;$$

$$c_{12,34} = - C_{13,24} = C_{14,23} ; \quad C_{12,35} = - C_{13,25} = C_{15,23} ; \quad C_{23,45} = - C_{24,35} = c_{25,34} ;$$

$$c_{14,25} = - c_{15,24} ; \quad C_{12,45} + C_{14,25} + c_{24,24} = 0 ;$$

$$c_{24,24} = - C_{14,34} = C_{13,35} = - C_{23,34} = - c_{23,25} .$$

Tenendo conto di queste relazioni e delle relazioni quadratiche tra le coordinate plückeriane di rette si ottiene per il complesso richiesto l'equazione (3.2). Si ha quindi che

II$_1$. *Assegnata in S_4 una quartica razionale normale (irriducibile) C^4, esiste un solo complesso quadratico di rette, anch'esso irriducibile* [8], *avente per luogo dei centri questa C^4.*

Detto complesso può ovviamente costruirsi, in ∞^2 modi, come luogo delle rette incidenti rette corrispondenti in una proiettività, il cui nucleo coincida con la C^4 suddetta, tra due stelle di ∞^3 rette aventi per centri due punti arbitrari distinti della C^4 medesima.

4. – Procedendo nel *caso* a$_2$) come nel numero precedente si assumano come $O_5 O_4$ e $O_1 O_2$ le rette m' ed n, rispettivamente corrispondenti in Ω ed in Ω^{-1} della $O_1 O_5 \equiv m \equiv n'$. Considerato poi il piano $\pi(m, m')$ appartenente alla stella di centro O_1, si assuma come punto O_2 l'intersezione ($\not\equiv O_1$) della retta n

col piano π' corrispondente in Ω di π [9] e come retta $O_1 O_4$ la corrispondente p in Ω^{-1} della retta $p' \equiv O_5 O_2$ [10]. In conseguenza si ha

$$a^1_{\cdot 4} = a^2_{\cdot 4} = a^3_{\cdot 4} = a^2_{\cdot 1} = a^3_{\cdot 1} = a^4_{\cdot 1} = a^1_{\cdot 3} = a^3_{\cdot 3} = a^4_{\cdot 3} = 0.$$

Procedendo poi alla ricerca dei punti di intersezione di rette corrispondenti in Ω fuori dell'iperpiano unito di equazione $x^3 = 0$, si trova la retta di equazioni [11]

$$a^3_{\cdot 2}\, x^1 - a^1_{\cdot 1}\, x^2 - a^1_{\cdot 2}\, x^3 = a^3_{\cdot 2}\, x^2 - a^2_{\cdot 2}\, x^3 - a^2_{\cdot 3}\, x^4 = - a^4_{\cdot 2}\, x^3 + a^3_{\cdot 2}\, x^4 - a^4_{\cdot 4}\, x^5 = 0.$$

Assunta questa come retta $O_3\, U_3$ [2], di equazioni $x^1 = x^2 = x^4 = x^5$, le equazioni di Ω diventano

$$\varrho\lambda'^1 = \lambda^1, \qquad \varrho\lambda'^2 = \lambda^3, \qquad \varrho\lambda'^3 = \lambda^2, \qquad \varrho\lambda'^4 = \lambda^4, \tag{4.1}$$

e per il complesso generato da Ω si ottiene l'equazione

$$p^{12}\, p^{35} - p^{13}\, p^{45} - p^{14}\, p^{34} - p^{23}\, p^{24} + p^{23}\, p^{25} + p^{24}\, p^{34} = 0\,. \tag{4.2}$$

Dalle (4.1) si deduce facilmente che il nucleo della proiettività Ω è costituito dalla cubica gobba irriducibile di equazioni parametriche

$$x^1 = 1, \qquad x^2 = t, \qquad x^3 = 0, \qquad x^4 = t^2, \qquad x^5 = t^3, \tag{4.3}$$

e dalla retta, incidente la cubica e non appartenente all'iperpiano della cubica stessa, di equazioni

$$x^1 = x^2 = x^4 = x^5. \tag{4.4}$$

Come nel caso precedente si verifica che la varietà centrale del complesso coincide col nucleo di Ω. Concludiamo perciò che

I$_2$. *Assegnata in S_4 una proiettività Ω non degenere del tipo a_2) tra due stelle $\sum$ e $\sum'$ di ∞^3 rette a centri distinti, il luogo delle rette incidenti rette corrispon-*

---

(9) Si osservi che π e π', in quanto appartenenti all'unico iperpiano unito nella proiettività indotta da Ω tra le due stelle di iperpiani di centri 0_1 e 0_5 rispettivamente, sono certamente incidenti.

(10) Si osservi che $p \in \pi$.

(11) Queste equazioni sono indipendenti, perchè la relativa matrice dei coefficienti ha rango tre.

denti in Ω è un complesso quadratico C irriducibile ([12]). *La varietà centrale di questo complesso coincide col nucleo di Ω ed è costituito da una cubica gobba irriducibile (passante per i centri di $\sum$ e $\sum'$) e da una retta incidente la cubica in un solo punto (distinto dai due centri) e non appartenente all'iperpiano della cubica.*

Poichè inoltre se si impone che sia centro di un generico complesso quadratico di rette, di equazione (3.4), ogni punto della cubica (4.3) e ogni punto della retta (4.4) si ritrova il complesso di equazione (4.2), possiamo concludere che

II_2. *In S_4 vi è un solo complesso quadratico (irriducibile) di rette avente il luogo dei centri costituito da una cubica gobba irriducibile e da una retta incidente la cubica in un sol punto e non appartenente all'iperpiano della cubica.*

Questo complesso può ovviamente ottenersi ([12]), in ∞^2 modi, come luogo delle rette incidenti rette corrispondenti in una proiettività, avente il nucleo costituito dalla cubica e dalla retta assegnate, tra due stelle di ∞^3 rette con centri in due punti arbitrari della cubica, distinti tra loro e dal punto di intersezione della cubica con la retta.

5. – Nel *caso* b) si assumano rispettivamente come $O_5 O_3$ e $O_1 O_3$ le corrispondenti in Ω e Ω^{-1} della retta $O_1 O_5 \equiv m \equiv n'$ e come punto U_{135} $(1, O, 1, O, 1)$ un generico punto appartenente al piano unito π (m, m'), $\notin O_1 O_5$, intersezione di rette corrispondenti in Ω. Ciò fatto la conica γ di Steiner relativa ad ω assume le equazioni

$$x^2 = x^4 = x^1 x^5 - (x^3)^2 = 0 . \tag{5.1}$$

Considerata poi la proiettività ω' subordinata da Ω nel fascio di iperpiani per π ed osservato che in essa vi è almeno un iperpiano unito lo si assuma come iperpiano di equazione $x^4 = 0$. Assumiamo inoltre come punto O_2 un punto, appartenente a questo iperpiano, $\notin \pi$ ed intersezione di rette corrispondenti in Ω ([13]). Dopo di che, se $x^2 = kx^4$ è l'equazione di un generico iperpiano α per π si prova che ad esso corrisponde in ω' l'iperpiano α' per π di equazione $x^2 = k' x^4$, con k e k' tali che

$$a^2_{\cdot 1}\, k - a^4_{\cdot 3}\, k' + a^2_{\cdot 3} = 0 . \tag{5.2}$$

([12]) Per un'altra generazione proiettiva di questo complesso cfr. il § 2, n. 15.
([13]) Ne esiste, come è noto (v. [3] § 3), almeno uno.

Supponiamo dapprima (*caso* b_1) che nella proiettività ω' vi siano due soli iperpiani uniti distinti. Osservato che uno di essi è stato assunto come iperpiano di equazione $x^4 = 0$, si assumano l'altro iperpiano unito come iperpiano di equazione $x^2 = 0$ e come punto O_4 un suo punto generico $\notin \pi$. In conseguenza le equazioni di Ω divengono

$$(5.3) \qquad \varrho\lambda'^1 = \lambda^2, \qquad \varrho\lambda'^2 = a^2_{.1}\,\lambda^1, \qquad \varrho\lambda'^3 = \lambda^4, \qquad \varrho\lambda'^3 = a^4_{.3}\,\lambda^3,$$

con $a^2_{.1} \neq a^4_{.3}$ ed entrambi $\neq 0$.

Si osservi che $a^2_{.1}/a^4_{.3}$ è l'unico invariante di Ω (e di ω'), di ovvio significato geometrico.

Si prova facilmente che il nucleo di Ω è in tal caso costituito dalla conica γ di equazioni (5.1) e dalle due rette r ed s, di equazioni rispettivamente

$$r) \qquad x^4 = 0, \qquad x^3 = a^2_{.1}\,x^1, \qquad x^5 = a^2_{.1}\,x^3,$$

$$s) \qquad x^2 = 0, \qquad x^3 = a^4_{.3}\,x^1, \qquad x^5 = a^4_{.3}\,x^3,$$

sghembe e incidenti γ rispettivamente nei punti $R\,(1,\ 0,\ a^2_{.1},\ 0, (a^2_{.1})^2)$ ed $S\,(1,\ O,\ a^4_{.3},\ O,\ (a^4_{.3})^2)$.

Col solito procedimento si verifica poi che il complesso C generato da Ω assume l'equazione

$$(5.4) \quad a^4_{.3}\,p^{12}\,p^{45} + a^2_{.1}\,a^4_{.3}\,p^{13}\,p^{24} - a^2_{.1}\,p^{14}\,p^{25} - (a^4_{.3} - a^2_{.1})\,p^{23}\,p^{34} + p^{24}\,p^{35} = 0\,,$$

che può ulteriormente semplificarsi assumendo R come punto U_{135}. per la qual cosa si ottiene $a^2_{.1} = 1$.

Infine poichè il nucleo di Ω coincide col luogo dei centri del complesso C, si può concludere che

I_3. *Assegnata in S_4 una proiettività Ω non degenere del tipo* b_1) *tra due stelle di ∞^3 rette a centri distinti, il luogo delle rette incidenti rette corrispondenti in Ω è un complesso quadratico irriducibile* (14). *La varietà centrale del complesso così ottenuto coincide col nucleo di Ω ed è costituito da due rette sghembe r ed s e da una conica irriducibile γ (passante per i centri delle due stelle) incidente ciascuna delle due rette in un solo punto e non appartenente all'iperpiano congiungente le rette medesime.*

---

(14) Per altre due diverse generazioni proiettive di questo complesso cfr. i numeri 15 e 16 del § 2.

Inversamente si verifica poi col solito procedimento che

II$_3$. *In S_4 esiste un solo complesso quadratico (irriducibile) di rette avente il luogo dei centri costituito da due rette sghembe r ed s e da una conica irriducibile γ, incidente ciascuna delle due rette in un solo punto e non appartenente all'iperpiano congiungente le rette medesime.*

Questo complesso può ottenersi ([14]), in ∞^2, come luogo delle rette incidenti rette corrispondenti in una qualunque proiettività, avente il nucleo costituito dalla conica γ e dalle due rette assegnate, tra due stelle di ∞^3 rette con centri in due punti generici della conica γ, distinti tra loro e dai punti di intersezione di γ con le due rette.

6. – Supponiamo ora che la proiettività ω' di equazione (5.2) sia parabolica (*caso* b$_2$)), cioè che si abbia $a^2_{.1} = a^4_{.3}$ e $a^2_{.3} \neq 0$. In tal caso il nucleo di Ω è costituito dalla conica γ di equazioni (5.1) e dalla retta, contata due volte, di equazioni

$$x^4 = 0, \qquad a^1_{.2}\, x^3 = a^2_{.1}\, x^1, \qquad a^1_{.2}\, x^5 = a^2_{.1}\, x^3 .$$

Osservato che questa retta incide γ in un solo punto, assumiamo questo punto come punto U_{135} ([2]). Assumiamo inoltre come rette $O_1\, U_2$ ([2]) e $O_5\, U$, di equazioni rispettive $x^2 = 0$, $x^3 = x^4 = x^5$ e $x^1 = x^2 = x^3 = x^4$, due generiche rette corrispondenti in Ω non appartenenti all'unico iperpiano unito in ω' (di equazione $x^4 = 0$). In conseguenza le equazioni di Ω divengono

$$\varrho\lambda'^1 = \lambda^2, \qquad \varrho\lambda'^2 = \lambda^1 + \lambda^3, \qquad \varrho\lambda'^3 = \lambda^4, \qquad \varrho\lambda'^4 = \lambda^3 \tag{6.1}$$

e l'equazione del complesso generato da Ω assume la forma

$$p^{13}\, p^{24} - p^{14}\, p^{45} - p^{15}\, p^{24} + p^{24}\, p^{35} - (p^{34})^2 = 0. \tag{6.2}$$

Poichè anche ora il luogo dei centri del complesso coincide col nucleo della proiettività Ω, concludiamo che

I$_4$. *Assegnata in S_4 una proiettività Ω non degenere del tipo* b$_2$) *tra due stelle $\sum$ e $\sum'$ di ∞^3 rette a centri distinti, il luogo delle rette incidenti rette corrispondenti in Ω è un complesso quadratico irriducibile. La varietà centrale di questo complesso coincide col nucleo di Ω ed è costituito da una conica irriducibile γ e da una retta doppia incidente γ in un sol punto.*

Poichè questo risultato può, come nei casi precedenti, invertirsi si ha che

II_4 – *In S_4 vi è un solo complesso quadratico (irriducibile) di rette avente il luogo dei centri costituito da una conica irriducibile γ e da una retta doppia incidente γ in un solo punto.*

Questo complesso può costruirsi, in infiniti modi, come luogo delle rette incidenti rette corrispondenti in una proiettività avente il nucleo costituito dalla conica γ e dalla retta assegnata, ancora doppia per il nucleo de la proiettività, tra due stelle di rette con centri in due punti generici delle conica, distinti tra loro e dal punto di intersezione di γ con la retta.

7. – Se infine la proiettività ω' (5.2) è l'identità (*caso* b_3)) si prova come al solito che il nucleo di Ω è costituito dalla conica γ di equazioni (5.1) e da un piano τ incidente γ in un solo punto. Assunto il piano τ come piano $O_4\, O_2\, U$ (2), di equazioni $x^1 = x^3 = x^5$, le equazioni di Ω divengono

$$\varrho\lambda^1 = \lambda^2, \qquad \varrho\lambda^{12} = \lambda^1, \qquad \varrho\lambda^{13} = \lambda^4, \qquad \varrho\lambda^{14} = \lambda^3 \tag{7.1}$$

e per il complesso generato da Ω si ricava l'equazione

$$p^{24}\,(p^{13} - p^{15} + p^{35}) = 0\,. \tag{7.2}$$

Perciò in tal caso il complesso C si spezza nei due complessi lineari speciali nucleati, costituiti dai luoghi delle rette incidenti rispettivamente il piano τ e il piano π di γ, e quindi il luogo dei centri è costituito da questi due piani τ e π. Concludendo si ha che

I_5 – *Assegnata in S_4 una proiettività Ω non degenere del tipo* b_3) *tra due stelle $\sum$ e $\sum'$ di ∞^3 rette a centri distinti, il luogo delle rette incidenti rette corrispondenti in Ω è un complesso quadratico riducibile in due complessi lineari speciali nucleati aventi per nuclei ciascuno uno di due piani incidenti in un solo punto.*

Si osservi che in tal caso, mentre il nucleo di Ω è costituito da una conica irriducibile γ (passante per i centri di $\sum$ e di $\sum'$) e da un piano τ (15) incidente γ

---

(15) È facile verificare che in generale ogni complesso quadratico di rette di S_4 per cui esiste un piano π luogo di centri si spezza in due complessi lineari, dei quali uno è costituito dal luogo delle rette incidenti il piano π. Se d'altra parte il complesso lineare rimanente ha più di un centro anch'esso ha un piano τ luogo di centri, cioè è pur esso un complesso lineare speciale nucleato avente per nucleo il piano τ.

in un solo punto (distinto dai due suddetti centri), il luogo dei centri del complesso generato da Ω è costituito dal piano τ e dal piano π di γ.

Inversamente [15] alla I_5 si ha poi che

II_5 – *In S_4 vi è un solo complesso quadratico di rette avente il luogo dei centri costituito da una conica γ irriducibile e da un piano τ incidente γ in un solo punto. Questo complesso si spezza nei due complessi lineari nucleati aventi per nuclei rispettivamente il piano τ e il piano π di γ.*

Ne consegue che questo complesso può, in infiniti modi, ottenersi come luogo delle rette incidenti rette corrispondenti in una proiettività, avente il nucleo costituito da uno qualunque, ad esempio τ, dei due piani e da una qualsiasi conica irriducibile $\bar{\gamma}$ appartenente all'altro piano π e passante per l'intersezione dei due piani, tra due stelle di ∞^3 rette con centri in due punti generici di $\bar{\gamma}$, distinti tra loro e dal punto di inter ezione di π con τ.

Facciamo inoltre notare che, come si può provare analiticamente, si perviene allo stesso risultato imponendo ad un generico complesso quadratico di rette di avere il luogo dei centri costituito da due coniche irriducibili qualunque, appartenenti ai due piani τ e π dianzi considerati, e incidenti nell'unico punto di intersezione dei piani medesimi.

8. – Consideriamo infine il *caso* c) in cui la retta $O_1 O_5 \equiv m \equiv n'$ è unita in Ω. Osserviamo che perciò deve aversi

$$a^2_{\cdot 4} = a^3_{\cdot 4} = a^4_{\cdot 4} = 0.$$

Rappresentato un piano qualunque per $O_1 O_5$ col sistema

$$\begin{cases} u_1 x^2 + u_2 x^3 + u_3 x^4 = 0 \\ v_1 x^2 + v_2 x^3 + v_3 x^4 = 0 \,, \end{cases}$$

in cui la matrice dei coefficienti abbia rango due, ed assunte come sue ccordinate proiettive omogenee k^i $(i = 1, 2, 3)$ i tre minori del 2° ordine della suddetta matrice

$$k^1 = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, \qquad k^2 = \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \qquad k^3 = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix},$$

si ricavano facilmente, per la proiettività ω indotta da Ω nella stella dei piani per $O_1\,O_5$, le equazioni

$$\varrho k'^i = a^{i+1}_{\cdot\ \ h}\, k^h \qquad (i,\ h = 1,\ 2,\ 3) \tag{8.1}$$

Analogamente, rappresentato un qualunque iperpiano per $O_1\,O_5$ con l'equazione

$$u_1\, x^2 + u_2\, x^3 + u_3\, x^4 = 0$$

ed assunte le u_i $(i = 1,\ 2,\ 3)$ come sue coordinate proiettive omogenee, si deducono facilmente, per l'inversa della proiettività ω' indotta da Ω nella stella degli iperpiani per $O_1\,O_5$, le equazioni

$$\tau u_i = a^{h+1}_{\cdot\ \ i}\, u'_h \qquad (i,\ h = 1,\ 2,\ 3). \tag{8.2}$$

Ricordiamo ora che, in relazione alla molteplicità delle radici ϱ_i $(i = 1,\ 2,\ 3)$ dell'equazione caratteristica di ω (e di ω') e al rango che tali radici fanno assumere alla matrice caratteristica di ω, possono aversi i seguenti casi

c_1) ω ha tre radici caratteristiche semplici ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3;

c_2) ω ha una radice caratteristica doppia di rango due ϱ_1 ed una semplice ϱ_2;

c_3) ω ha una radice caratteristica tripla di rango due ϱ_1;

c_4) ω ha una radice caratteristica doppia di rango uno ϱ_1 ed una semplice ϱ_2;

c_5) ω ha una radice caratteristica tripla di rango uno ϱ_1;

c_6) ω ha una radice caratteristica tripla di rango 0.

Nel *caso* c_1) in relazione alle tre radici caratteristiche ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 ci sono tre piani fra loro distinti uniti in ω e tre iperpiani tra loro distinti uniti in ω' e congiungenti i tre piani uniti a due a due.

Assumendo come piani $O_1\,O_5\,O_2$, $O_1\,O_5\,O_3$ e $O_1\,O_5\,O_4$ i piani uniti in ω relativi rispettivamente alle radici caratteristiche ϱ_1, ϱ_2 e ϱ_3, le equazioni (8.1) diventano semplicemente

$$\varrho k'^1 = \varrho_1\, k^1, \qquad \varrho k'^2 = \varrho_2\, k^2, \qquad \varrho k'^3 = \varrho_3\, k^3\,.$$

Osservato poi che su ogni piano unito in ω la proiettività Ω subordina una prospettività, si assumano come retta $O_2\,U_{15}$ (2) (di equazioni $x^3 = x^4 = x^1 - x^5 = 0$) l'asse della prospettività subordinata da Ω sul piano unito $O_1\,O_5\,O_2$, e come punti O_3 ed O_4 due punti qualsiansi non appartenenti alla retta $O_1\,O_5$ e rispettivamente appartenenti agli assi delle prospettività indotte da Ω sui piani uniti $O_1\,O_5\,O_3$ e $O_1\,O_5\,O_4$. In conseguenza le equazioni di Ω diventano

$$(8.3)\qquad \varrho\lambda'^1 = \varrho_1\,\lambda^4, \quad \varrho\lambda'^2 = \varrho_1\,\lambda^1, \quad \varrho\lambda'^3 = \varrho_2\,\lambda^2, \quad \varrho\lambda'^4 = \varrho_3\,\lambda^3.$$

Il nucleo di Ω è in tal caso costituito dalle rette $O_1\,O_5$, $O_2\,U_{15}$, $O_3\,A$, $O_4\,B$, rispettivamente di equazioni

$$x^2 = x^3 = x^4 = 0\,; \quad x^3 = x^4 = x^1 - x^5 = 0\,; \quad x^2 = x^4 = \varrho_2\,x^1 - \varrho_1\,x^5 = 0\,;$$

$$x^2 = x^3 = \varrho_3\,x^1 - \varrho_1\,x^5 = 0$$

ed il complesso quadratico di rette generato da Ω è rappresentato dall'equazione

$$(8.4)\qquad \varrho_2\,\varrho_3\,p^{12}\,p^{34} - \varrho_1\,\varrho_3\,p^{13}\,p^{24} + \varrho_1\,\varrho_2\,p^{14}\,p^{23} -$$
$$- \varrho_1\,\varrho_3\,p^{23}\,p^{45} + \varrho_1\,\varrho_2\,p^{24}\,p^{35} - \varrho_1^2\,p^{25}\,p^{34} = 0\,.$$

Si prova anche ora col solito procedimento che il luogo dei centri del complesso coincide col nucleo di Ω, per cui si può concludere che

I$_6$ – *Assegnata in S_4 una proiettività Ω del tipo* c$_1$) *tra due stelle $\sum$ e $\sum'$ di ∞^3 rette a centri distinti, il luogo delle rette incidenti rette corrispondenti in Ω è un complesso quadratico irriducibile* (14). *La varietà centrale del complesso coincide col nucleo di Ω ed è costituito dalla retta r congiungente i centri di $\sum$ e di $\sum'$ e da altre tre rette sghembe a due a due, tra loro indipendenti ed incidenti la retta r.*

E poichè il risultato come nei casi precedenti può invertirsi si ha che

II$_6$ – *In S_4 vi è un solo complesso quadratico (irriducibile) di rette avente per luogo dei centri quattro rette, tre delle quali tra loro indipendenti, a due a due sghembe e appoggiantisi alla quarta.*

Questo complesso può ottenersi (14), in infiniti modi, come luogo delle rette incidenti rette corrispondenti in una proiettività, avente il nucleo costituito dalle quattro rette assegnate, tra due stelle di ∞^3 rette con centri in due punti generici della suddetta quarta retta, distinti tra loro e dai punti di intersezione di questa con le altre tre rette.

9. – Nel *caso* c_2) si prova che ci sono due iperpiani uniti in ω' e due piani uniti in ω appartenenti ad uno solo, α, dei due iperpiani uniti. Precisamente alla radice doppia ϱ_1 corrisponde l'iperpiano unito doppio α contenente i due piani uniti ed il piano unito π intersezione dei due iperpiani uniti.

Assumiamo π come piano $O_1\,O_5\,O_2$, α come iperpiano di equazione $x^3 = 0$, l'altro piano unito (corrispondente alla radice semplice ϱ_2) come piano $O_1\,O_5\,O_4$ e l'altro iperpiano unito (anch'esso corrispondente alla radice semplice ϱ_2) come iperpiano di equazione $x^4 = 0$. Assumendo poi come rette $O_2\,U_{15}$ (^{2}) (di equazioni $x^3 = x^4 = x^1 - x^5 = 0$) l'asse della prospettività indotta da Ω sul piano unito in Ω $O_1\,O_5\,O_2$, come punto O_4 un punto qualunque, $\notin O_1\,O_5$, dell'asse della prospettività indotta da Ω sul piano unito in ω $O_1\,O_5\,O_4$, ed infine come rette di equazioni rispettive $x^4 = x^5 = x^2 + x^3 = 0$ e $x^1 = x^2 = x^4 = 0$ due generiche rette corrispondenti in Ω appartenenti all'iperpiano unito $x^4 = 0$, le equazioni di Ω diventano

$$(9.1) \qquad \varrho\lambda'^1 = \varrho_1\,\lambda^4, \qquad \varrho\lambda'^2 = \varrho_1\,(\lambda^1 + \lambda^2), \qquad \varrho\lambda'^3 = \varrho_1\,\lambda^2, \qquad \varrho\lambda'^4 = \varrho_2\,\lambda^3$$

e l'equazione del complesso generato da Ω assume la forma

$$(9.2) \qquad \varrho_2\,p^{13}\,p^{34} + (\varrho_2 - \varrho_1)\,p^{23}\,(p^{14} + p^{45}) + \varrho_1\,p^{34}\,p^{35} = 0.$$

Il nucleo di Ω è costituito dalle tre rette $O_1\,O_5$, $O_4\,A$ e $O_2\,U_{15}$ rispettivamente di equazioni

$$x^2 = x^3 = x^4 = 0, \quad x^2 = x^3 = \varrho_2\,x^1 - \varrho_1\,x^5 = 0 \quad \text{e} \quad x^3 = x^4 = x^1 - x^5 = 0,$$

delle quali le prime due semplici e l'ultima doppia. Il luogo dei centri del complesso generato da Ω coincide col nucleo di Ω, con la stessa molteplicità per le rette che lo compongono. Perciò si ha che

I_7 – *Assegnata in S_4 una proiettività Ω del tipo c_2) tra due stelle $\sum$ e $\sum'$ di ∞^3 rette a centri distinti, il luogo delle rette incidenti rette corrispondenti in Ω è un complesso quadratico irriducibile* (^{12}). *La varietà centrale di questo complesso coincide col nucleo di Ω ed è costituito dalla retta r congiungente i centri di $\sum$ e di $\sum'$ e da altre due rette, una doppia e l'altra semplice, sghembe e incidenti la r.*

Poichè questo risultato è invertibile si ha che

II$_7$ – *In* S_4 *esiste un solo complesso quadratico (irriducibile) di rette avente il luogo dei centri costituito da tre rette, delle quali una doppia e due semplici e tali che quella doppia ed una delle semplici siano sghembe ed incidenti la terza.*

Questo complesso può ottenersi (12), in infiniti modi, come luogo delle rette incidenti rette corrispondenti in una proiettività, avente il nucleo costituito dalle tre rette assegnate, delle quali quella doppia per il luogo dei centri del complesso ancora tale per il nucleo della proiettività, tra due stelle di ∞^3 rette con centri in due punti arbitrari della retta di appoggio, distinti tra loro e dai punti di intersezione di questa retta con le altre due.

10. – Nel *caso* c$_3$) si prova che vi è un solo piano π unito triplo in ω ed un solo iperpiano α unito triplo in ω', contenente π. Assumendo π come piano $O_1 O_5 O_2$ e α come iperpiano di equazione $x^4 = O$ si ha $a^3_{.1} = a^4_{.1} = a^4_{.2} = 0$, $a^2_{.1} = a^3_{.2} = a^4_{.3} = \varrho_1$, con $a^2_{.2}\, a^3_{.3} \neq 0$.

Assumiamo poi come piani di equazioni rispettive $x^2 + x^3 = x^4 = O$ e $x^2 = x^4 = 0$ due generici piani corrispondenti nella proiettività subordinata da Ω (e quindi da ω) nel fascio dei piani per $O_1 O_5$ appartenenti all'iperpiano α e come piani di equazioni rispettive $x^2 = x^3 = x^4$ e $x^2 = x^3 = O$ due piani qualunque non appartenenti ad α e corrispondenti in ω. Assumendo inoltre come retta $O_2 U_{15}$ (di equazioni $x^3 = x^4 = x^1 - x^5 = 0$) l'asse della prospettività subordinata da Ω sul piano π, e come iperpiani $x^5 = 0$ e $x^1 = 0$ due generici iperpiani, per O_1 e O_5 rispettivamente, luoghi di rette corrispondenti in Ω, le equazioni di Ω divengono

$$\varrho\lambda'^1 = \lambda^4, \quad \varrho\lambda'^2 = \lambda^1 + \lambda^4, \quad \varrho\lambda'^3 = \lambda^2 + \lambda^3, \quad \varrho\lambda'^4 = \lambda^3 \tag{10.1}$$

Il nucleo di Ω si prova essere costituito dalle due rette $O_1 O_5$ e $O_2 U_{15}$, la prima semplice e l'altra tripla, e per il complesso di rette generato da Ω si ha l'equazione

$$p^{24}(p^{14} + p^{45}) - p^{34}(p^{13} - p^{14} + p^{35}) = 0\,. \tag{10.2}$$

Poichè il luogo dei centri di questo complesso coincide col nucleo di Ω, con la medesima molteplicità per le rette che lo compongono, concludiamo che

I$_8$ – *In* S_4 *il luogo delle rette incidenti rette corrispondenti in una proiettività* Ω *di tipo* c$_3$) *tra due stelle* $\sum$ *e* $\sum'$ *di* ∞^3 *rette a centri distinti è un complesso quadratico irriducibile, la cui varietà centrale coincide col nucleo di* Ω *ed è costituito dalla retta* r *congiungente i centri e da un'altra retta tripla incidente la retta* r.

11. – Nel *caso* c_4) vi è un fascio F di piani (per $O_1 O_5$) uniti in ω contenuti in un iperpiano α, ed un fascio di iperpiani uniti in ω' passanti per un piano π (per $O_1 O_5$) non appartenente ad α (o ad F). Assumiamo α come iperpiano di equazione $x^4 = 0$ e π come piano $O_1 O_5 O_4$, ed imponiamo che α contenga un fascio di piani (per $O_1 O_5$) uniti in ω. Assumiamo poi come punto O_4 un punto generico, $\notin O_1 O_5$, dell'asse della prospettività indotta da Ω sul piano $O_1 O_5 O_4$ ed osservato che nell'iperpiano α vi è (oltre alla retta $O_1 O_5$) un piano luogo di punti di intersezione di rette corrispondenti in Ω, lo si assuma come piano di equazioni $x^4 = x^1 - x^5 = 0$. In conseguenza le equazioni di Ω diventano

$$\varrho\lambda'^1 = \varrho_1 \lambda^4, \qquad \varrho\lambda'^2 = \varrho_1 \lambda^1, \qquad \varrho\lambda'^3 = \varrho_1 \lambda^2, \qquad \varrho\lambda'^4 = \varrho_2 \lambda^3. \tag{11.1}$$

Il nucleo di Ω è in tal caso costituito dalle rette $O_1 O_5$, $O_4 A$ e dal piano $O_2 O_3 U_{15}$ rispettivamente di equazioni

$$x^2 = x^3 = x^4 = 0, \quad x^2 = x^4 = \varrho_2 x^1 - \varrho_1 x^5 = 0 \quad \text{e} \quad x^4 = x^1 - x^5 = 0$$

e perciò tali che la retta $O_4 A$ ed il piano $O_2 O_3 U_{15}$, sghembo con questa retta, incidano la retta $O_1 O_5$ in punti tra loro distinti.

L'equazione del complesso quadratico di rette generato da Ω assume in tal caso la forma

$$p^{23}(p^{14} + p^{45}) = 0\,. \tag{11.2}$$

Perciò il complesso si spezza nei due complessi lineari speciali nucleati aventi per nuclei ciascuno uno dei due piani di equazioni $x^2 = x^3 = 0$ e $x^4 = x^1 - x^5 = 0$ tra loro incidenti in un solo punto. Concludiamo quindi che

I_9 – *Assegnata in S_4 una proiettività Ω del tipo c_4) tra due stelle di ∞^3 rette a centri distinti, il luogo delle rette incidenti rette corrispondenti in Ω è un complesso quadratico riducibile in due complessi lineari speciali nucleati aventi per nuclei ciascuno uno di due piani che si incontrano in un solo punto.*

Si osservi che in tal caso, mentre il nucleo di Ω è costituito dalla retta r congiungente i centri delle due stelle, da un'altra retta s incidente r in un punto distinto dai due centri e da un piano τ ([15]) sghembo con s e incidente r (in un punto distinto dal punto di intersezione di r con s e dai centri delle due stelle), il luogo dei centri del complesso generato da Ω è invece costituito dal piano τ e dal piano delle due rette r ed s.

Poichè la I_9 può ovviamente invertirsi ([15]) si ha che

II_9 – *In S_4 vi è un solo complesso quadratico di rette avente per luogo dei centri due rette r ed s fra loro incidenti ed un piano τ, sghembo con una delle due rette, incidente l'altra e non appartenente con le due rette ad uno stesso iperpiano. Questo complesso si spezza* ([15]) *nei due complessi lineari speciali nucleati aventi per nuclei rispettivamente il piano τ ed il piano delle due rette.*

Ne consegue facilmente per il complesso in esame la possibilità di una costruzione geometrica (analoga a quella indicata per lo stesso complesso alla fine del n. 7) ottenuta mediante proiettività del tipo c_4) tra due stelle di ∞^3 rette a centri distinti.

12. – Nel *caso* c_5) vi è un fascio di iperpiani uniti in ω' passanti per un piano π (per $O_1 O_5$) e fra essi un iperpiano α contenente un fascio di piani (per $O_1 O_5$) uniti in ω. Assumiamo π come piano $O_1 O_5 O_2$, α come iperpiano di equazione $x^4 = 0$ ed imponiamo che i piani per $O_1 O_5$ appartenenti ad α siano uniti in ω. Assumiamo poi come iperpiani di equazioni rispettive $x^2 + x^1 = 0$ e $x^2 = 0$ due generici iperpiani corrispondenti in ω' e come iperpiani di equazioni rispettive $x^5 = 0$ e $x^1 = 0$ due generici iperpiani, rispettivamente appartenenti a $\sum$ e $\sum'$, luoghi di rette corrispondenti in Ω. Inoltre, osservato che nell'iperpiano α vi è (oltre alla retta $O_1 O_5$) un piano luogo di punti di intersezione di rette corrispondenti in Ω, lo si assuma come piano di equazioni $x^4 = x^1 - x^5 = 0$. In conseguenza le equazioni di Ω divengono

$$\varrho\lambda'^1 = \lambda^4, \qquad \varrho\lambda'^2 = \lambda^1 + \lambda^3, \qquad \varrho\lambda'^3 = \lambda^2, \qquad \varrho\lambda'^4 = \lambda^3 \tag{12.1}$$

Il nucleo di Ω è costituito dalla retta $O_1 O_5$, dal piano τ di equazioni $x^4 = x^1 - x^5 = 0$ e dalla retta $O_2 U_{15}$ appartenente a questo piano.

L'equazione del complesso generato da Ω assume la forma

$$p^{31}(p^{14} + p^{45}) = 0\,. \tag{12.2}$$

Perciò questo complesso si spezza nei due complessi lineari speciali nucleati aventi per nuclei ciascuno uno dei due piani $O_1 O_2 O_5$ e $O_2 O_3 U_{15}$, secantisi in una retta. Possiamo quindi concludere che

I_{10} – *In S_4 il luogo delle rette incidenti rette corrispondenti in una proiettività del tipo* c_5) *tra due stelle di ∞^3 rette a centri distinti è un complesso quadratico riducibile* ([15]) *nei due complessi lineari speciali nucleati aventi per nuclei ciascuno uno di due piani secantisi in una retta.*

Inversamente si ha (15) ovviamente che

II_{15} – *In* S_4 *vi è un solo complesso quadratico di rette avente per luogo dei centri due rette* r *ed* s *fra loro incidenti e un piano* τ *passante per una* (r) *delle due rette e non per l'altra* (s). *Detto complesso si spezza necessariamente nei due complessi lineari speciali nucleati aventi per nuclei rispettivamente il piano* τ *e il piano* π *delle due rette.*

Analogamente ai casi precedenti ne consegue per questo complesso una costruzione geometrica mediante proiettività del tipo c_5) tra due stelle di ∞^3 rette a centri distinti.

13. – Infine nel *caso* c_6) la proiettività ω è ovviamente l'identità. Poichè in tal caso il nucleo di Ω contiene, oltre alla retta $O_1 O_5$, un iperpiano, il complesso generato da Ω è ovviamente indeterminato. D'altronde ciò è confermato dal fatto che assumendo il suddetto iperpiano come iperpiano di equazione $x^1 = x^5$ le equazioni di Ω divengono

$$\varrho\lambda'^1 = \lambda^4, \qquad \varrho\lambda'^2 = \lambda^1, \qquad \varrho\lambda'^3 = \lambda^2, \qquad \varrho\lambda'^4 = \lambda^3 \tag{13.1}$$

e conseguentemente l'equazione (2.4) del complesso generato da Ω si riduce ad una identità. Si ha quindi che

I_{11} – *In* S_4 *il luogo delle rette incidenti rette corrispondenti in una proiettività di tipo* c_6) *tra due stelle di* ∞^3 *rette a centri distinti è indeterminato.*

Viceversa si ha ovviamente che

II_{11} – *Ogni complesso quadratico di rette di* S_4, *al cui luogo dei centri appartenga un iperpiano, è indeterminato.*

14. – In questo numero vogliamo determinare ed esaminare brevemente *il luogo delle rette di* S_4 *incidenti rette corrispondenti in una proiettività* Ω *non degenere fra due stelle* $\sum$ *e* $\sum'$ *di* ∞^3 *rette con lo stesso centro.*

A tal fine, assunto il centro di $\sum$ e di $\sum'$ come punto O_5 e rappresentate con le equazioni

$$\frac{x^1}{\lambda^1} = \frac{x^2}{\lambda^2} = \frac{x^3}{\lambda^3} = \frac{\lambda^4}{x^4} \qquad (\lambda^i \text{ non tutti nulli})$$

e

$$\frac{x^1}{\lambda'^1} = \frac{x^2}{\lambda'^2} = \frac{x^3}{\lambda'^3} = \frac{x^4}{\lambda'^4} \qquad (\lambda'^i \text{ non tutti nulli})$$

due generiche rette di $\sum$ e di $\sum'$ rispettivamente, consideriamo una proiettività Ω non degenere tra $\sum$ e $\sum'$ di equazioni (2.3).

Procedendo come al n. 2 si deduce che il luogo richiesto è anche ora *un complesso quadratico di rette* C, avente nel suddetto riferimento l'equazione seguente

$$p^{[12}\, a^{34]\cdot\cdot}_{\cdot\cdot\alpha\beta}\, p^{\alpha\beta} = 0, \qquad (\alpha < \beta), \tag{14.1}$$

in cui i simboli hanno il significato adottato per essi nella (2.4).

Si osservi che la (14.1) rappresenta, oltre che il complesso quadratico C, anche il complesso quadratico di rette C' subordinato da C nell'iperpiano di equazione $x^5 = 0$. Osserviamo inoltre che, indicate con λ^i $(i = 1, 2, 3, 4)$ le coordinate proiettive omogenee di un generico punto di questo iperpiano e considerata l'omografia $\overline{\Omega}$, di equazioni (2.3), subordinata da Ω nel suddetto iperpiano, il complesso C' dianzi menzionato è ovviamente il luogo delle rette congiungenti punti corrispondenti in $\overline{\Omega}$. Come immediata conseguenza si ritrova il noto [3] risultato:

III – *Assegnata in S_3 una omografia $\overline{\Omega}$ non degenere il luogo delle rette congiungenti punti corrispondenti in $\overline{\Omega}$ è un complesso quadratico.*

Concludendo si ha poi che

IV – *Assegnata in S_4 una proiettività Ω non degenere tra due stelle $\sum$ e $\sum'$ di ∞^3 rette con lo stesso centro S, il luogo delle rette incidenti rette corrispondenti in Ω è un complesso quadratico C.*

Ovviamente questo complesso può ottenersi proiettando da S il complesso C' generato, secondo la III, dalla omografia $\overline{\Omega}$ subordinata da Ω in un generico iperpiano non passante per S. Perciò i tipi di complessi C che si possono così ottenere sono in stretto legame con i tipi di complessi C' generabili, a norma della III, mediante le omografie di S_3. Rinviamo l'esame dei complessi C' al n. 17 e quello dei complessi C al n. 18.

§ 2. – Altre generazioni proiettive di alcuni dei complessi quadratici di rette di S_4 introdotti nel § 1.

15. – In questo e nel successivo numero ottengo per alcuni dei complessi quadratici di rette precedentemente determinati altre generazioni proiettive.

A tal fine si considerino la stella $\sum$ delle rette per un punto S contenute in un iperpiano α e la stella $\overline{\sum}'$ dei piani per una retta r non appartenente ad α ed incidente α nel punto $R \not\equiv S$ e si assumano rispettivamente l'iperpiano α come iperpiano di equazione $x^5 = O$, il punto S $(\in \alpha)$ come punto O_1, e la retta r

come retta $O_4\,O_5$. In conseguenza la generica retta p per $S \equiv O_1$ sarà rappresentabile con il sistema di equazioni

$$\frac{x^2}{\lambda^1} = \frac{x^3}{\lambda^2} = \frac{x^4}{\lambda^3}, \quad x^5 = 0, \tag{15.1}$$

ed il generico piano π' per $r\ (\equiv O_4\,O_5)$ col sistema

$$\frac{x^1}{\lambda'^1} = \frac{x^2}{\lambda'^2} = \frac{x^3}{\lambda'^3}, \tag{15.2}$$

in cui sia λ^i che λ'^i $(i = 1, 2, 3)$ sono non tutti nulli.

Siano inoltre

$$\varrho\lambda'^i = a^i_{.k}\,\lambda^k, \quad (i, k = 1, 2, 3; \quad \varrho \neq 0 \text{ e Det. } (a^i_{.k}) \neq 0) \tag{15.3}$$

le equazioni di una generica proiettività Ω non degenere tra la stella di rette $\sum$ e la stella di piani $\overline{\sum}'$.

Procedendo come al n. 2 si ha che

V – *Assegnata in S_4 una proiettività non degenere Ω tra una stella $\sum$ di rette contenute in un iperpiano α ed una stella $\overline{\sum}'$ dei piani per una retta $r \notin \alpha$ ed incidente α in un punto R distinto dal centro S di $\sum$, il luogo delle rette incidenti rette di $\sum$ e piani di $\overline{\sum}'$ corrispondenti in Ω è un complesso quadratico.*

L'equazione di questo complesso, nel riferimento fissato dianzi, è la seguente

$$p^{[23}\,a^{1]}_{.\alpha}\,p^{\alpha+1,5} = 0, \qquad (\alpha = 1, 2, 3) \tag{15.4}$$

con lo stesso significato dei simboli e le stesse convenzioni adottate nella (2.4).

Indicata con ω la proiettività subordinata da Ω tra $\sum$ e la stella di rette $\sum'$ di centro $R \equiv O_4$ ottenuta intersecando con l'iperpiano α la stella di piani $\overline{\sum}'$, e dette m' ed n le corrispondenti alla retta $RS\ (\equiv m \equiv n')$ rispettivamente in ω ed ω^{-1}, si osservi che sono possibili i seguenti casi:

d) m' ed n sghembe,

e) $m' \not\equiv n$ complanari,

f) $m' \equiv n\ (\equiv m \equiv n')$.

Iniziando con l'esaminare il *caso* d) (cioè quello generale) osserviamo che, se assumiamo m' ed n rispettivamente come rette $O_4\,O_3$ ed $O_1\,O_2$ e come punto

U_5 (²) un generico punto, distinto da R e da S, intersezione di due rette corrispondenti in ω, le equazioni di ω e di Ω divengono semplicemente

$$\varrho\lambda'^i = \lambda^i, \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{15.5}$$

e l'equazione del complesso generato da Ω assume la forma

$$p^{12}\, p^{45} - p^{13}\, p^{35} + p^{23}\, p^{35} = 0\,. \tag{15.6}$$

È facile verificare che il nucleo di ω (e di Ω) è la cubica gobba irriducibile di equazioni parametriche

$$x^1 = t^3, \quad x^2 = t^2, \quad x^3 = t, \quad x^4 = 1, \quad x^5 = 0 \tag{15.7}$$

e che il luogo dei centri del complesso è costituito da questa cubica e dall'asse r della stella di piani $\sum'$. Si può concludere quindi che

V₁ – *Il complesso quadratico di S_4 di cui alla V, nel caso che la proiettività Ω generatrice sia di tipo generale (cioè di tipo d), è irriducibile ed il suo luogo dei centri è costituito da una cubica gobba irriducibile (coincidente col nucleo di Ω) appartenente all'iperpiano α contenente $\sum$ e dalla retta r, asse di $\sum'$, non appartenente ad α ed incidente la suddetta cubica in un solo punto.*

Da questa proposizione e dalla II₂ consegue che in S_4 il complesso quadratico di rette, determinato univocamente dal fatto che il suo luogo dei centri è costituito da una cubica gobba irriducibile γ e da una retta r incidente la cubica in un solo punto R e non appartenente all'iperpiano della cubica, può ottenersi in infiniti modi, oltre che con la costruzione indicata per esso alla fine del n. 4, anche come luogo delle rette incidenti rette e piani corrispondenti in una qualunque proiettività del tipo d), avente per nucleo la cubica γ assegnata, tra la stella dei piani per r e la stella delle rette contenute nell'iperpiano della cubica e con centro in un punto arbitrario della cubica stessa, distinto dal punto di intersezione di questa con la retta r.

Considerato ora il *caso e*), in cui le rette m' ed n cono complanari e tra loro distinte, assumiamole rispettivamente come rette $O_4\,O_2$ e $O_1\,O_2$. Osservato poi che il nucleo di ω (e di Ω) è costituito dalla conica γ di Steiner relativa alla proiettività indotta da ω sul piano $\pi\,(m, m')$ e da una retta s incidente γ in un solo punto distinto dai centri R ed S delle due stelle di rette $\sum$ e $\sum'$, si assuma come retta $O_3\,U_{124}$ (²) (di equazioni $x^1 = x^2 = x^4$, $x^5 = 0$) la retta s. In conseguenza le equazioni di Ω (e di ω) divengono

$$\varrho\lambda'^1 = \lambda^1, \qquad \varrho\lambda'^2 = \lambda^3, \qquad \lambda\varrho'^3 = \lambda^2 \tag{15.8}$$

Il nucleo di ω (e di Ω) è costituito, come si è detto, dalla conica γ di equazioni

$$x^3 = x^5 = x^1 x^4 - (x^2)^2 = 0$$

e dalla retta s di equazioni $x^1 = x^2 = x^4$, $x^5 = 0$.

L'equazione del complesso generato da Ω assume la forma

$$p^{23} p^{25} + p^{12} p^{35} - p^{13} p^{45} = 0 \tag{15.9}$$

ed il relativo luogo dei centri è costituito dalla conica γ e dalle due rette sghembe r ed s, incidenti γ ciascuna in un solo punto e tali che i due iperpiani $\beta\,(m, m', r)$ e $\alpha\,(m, m', s)$ siano tra loro distinti. Concludiamo quindi che

V$_2$ – *Il complesso quadratico di rette di S_4 di cui alla V, nel caso che la proiettività Ω generatrice sia di tipo* e), *è irriducibile ed il suo luogo dei centri è costituito da due rette sghembe (una delle quali è l'asse r di $\sum'$) e da una conica irriducibile γ, incidente ciascuna delle due rette in un solo punto e non appartenente all'iperpiano congiungente le rette stesse.*

Da questa proposizione e dalla II$_3$ segue poi che in S_4 il complesso quadratico univocamente determinato dal fatto che il suo luogo dei centri è costituito da due rette sghembe r ed s e da una conica irriducibile γ incidente ciascuna delle due rette in un solo punto e non appartenente all'iperpiano congiungente le rette medesime, può costruirsi in infiniti modi, oltre che come indicato nel n. 5, come luogo delle rette incidenti rette e piani corrispondenti in una qualunque proiettività di tipo e), avente il nucleo costituito dalla conica γ e da una qualsiasi delle due rette, ad es. s, tra la stella dei piani per l'altra retta r e la stella delle rette contenute nell'iperpiano α congiungente il piano di γ con la retta s e passanti per un punto generico di γ, distinto dai punti di incidenza di γ con r ed s.

Considerando per ultimo il *caso* f), in cui la retta $O_1 O_4$ è unita in ω, per cui si ha $a^2_{\cdot 3} = a^3_{\cdot 3} = 0$, si osservi che ω subordina nel fascio dei piani per $O_1 O_4$ appartenenti all'iperpiano α una proiettività $\overline{\omega}$ in cui al generico piano π di equazioni $x^2 - \lambda x^3 = x^5 = 0$ corrisponde il piano π' di equazioni $x^2 - \lambda' x^3 = x^5 = 0$, con λ e λ' tali che

$$\lambda' = \frac{a^2_{\cdot 1} \lambda + a^2_{\cdot 2}}{a^3_{\cdot 1} \lambda + a^3_{\cdot 2}} . \tag{15.10}$$

Nel *caso* f) possono perciò verificarsi le seguenti eventualità:

f$_1$) in $\overline{\omega}$ esistono due soli piani uniti distinti,

f$_2$) $\overline{\omega}$ è parabolica,

f$_3$) $\overline{\omega}$ è l'identità.

Nel *caso* f_1), in cui in $\overline{\omega}$ ci sono due piani uniti distinti π_1 e π_2, assumiamo questi rispettivamente come piani $O_1\,O_4\,O_3$ e $O_1\,O_4\,O_2$, come retta $O_2\,O_{14}$ (²) l'asse della prospettività subordinata da ω sul piano π_1, e come punto O_3 un punto generico, $\notin O_1\,O_4$, dell'asse della prospettività subordinata da ω sul piano π_2. In conseguenza le equazioni di ω e di Ω divengono

$$(15.11) \qquad \varrho\lambda'^1 = a^1_{.3}\,\lambda^3, \qquad \varrho\lambda'^2 = a^1_{.3}\,\lambda^1, \qquad \varrho\lambda'^3 = a^3_{.2}\,\lambda^2$$

e l'equazione del complesso generato da Ω assume la forma

$$(15.12) \qquad a^1_{.3}\,p^{13}\,p^{25} - a^3_{.2}\,p^{12}\,p^{35} - a^1_{.3}\,p^{23}\,p^{45} = 0\,.$$

Il nucleo di ω (e di Ω) è costituito dalla retta $O_1\,O_4$ e dalle due rette sghembe ad essa incidenti $O_2\,O_{14}$ (²) e $O_3\,A$ (di equazioni $x^2 = x^5 = a^3_{.2}\,x^1 - a^1_{.3}\,x^4 = 0$). Il luogo dei dentri del suddetto complesso è invece costituito da quattro rette, tre delle quali tra loro indipendenti, a due a due sghembe, ed appoggiate alla quarta. Si ha perciò che

V_3 – *Il complesso quadratico di rette di S_4 di cui alla V, nel caso che la proiettività Ω generatrice sia di tipo f_1), è irriducibile ed il suo luogo dei centri è costituito da quattro rette, tre delle quali tra loro indipendenti sghembe a due a due, ed appoggiate alla quarta ($\equiv RS$).*

Da questa proposizione e dalla II_6 segue che in S_4 l'unico complesso quadratico di rette avente per luogo dei centri quattro rette, tre delle quali r, s, t tra loro indipendenti, a due a due sghembe, ed appoggiate alla quarta retta m, può ottenersi in infiniti modi, oltre che con la costruzione indicata nel n. 8, come luogo delle rette incidenti rette e piani corrispondenti in una qualunque proiettività di tipo f_1), avente il nucleo costituito dalla retta m e da due qualsiansi delle altre tre, ad es. s e t, tra la stella dei piani per la rimanente retta r e la stella delle rette contenute nell'iperpiano congiungente s con t e passanti per un punto generico di m distinto dai tre punti di intersezione di m stessa con le altre tre rette assegnate r, s, t.

Considerando poi il *caso* f_2), in cui la proiettività $\overline{\omega}$ è parabolica, si assumano come piano $O_1\,O_4\,O_2$ l'unico piano unito π, come retta $O_2\,U_{14}$ (di equazioni $x^3 = x^5 = x^1 - x^4 = 0$) l'asse della prospettività subordinata da $\overline{\omega}$ su π, come piani di equazioni $x^2 + x^3 = x^5 = 0$ e $x^2 = x^5 = 0$ due piani generici per $O_1\,O_4$ distinti da π appartenenti ad α e corrispondenti in $\overline{\omega}$ ed analogamente come piani di equazioni $x^4 = x^5 = 0$ e $x^1 = x^5 = 0$ due piani generici appartenenti ad α, per O_1 e per O_4 rispettivamente, non contenenti $O_1\,O_4$, e corrispondenti in ω, o meglio nella proiettività subordinata da ω tra le due stelle di piani appartenenti ad α e con centri O_1 e O_4 rispettivamente. In conseguenza le equazioni di ω e di Ω divengono

$$\varrho\lambda'^1 = \lambda^3, \qquad \varrho\lambda'^2 = \lambda^1 + \lambda^2, \qquad \varrho\lambda'^3 = \lambda^2 \tag{15.13}$$

e l'equazione del complesso generato da Ω assume la forma

$$p^{13}\,p^{35} + p^{15}\,p^{23} + p^{23}\,p^{45} = 0\,. \tag{15.14}$$

Il nucleo di Ω (e di ω) è costituito dalla retta $O_1\,O_4$ e dalla retta $O_2\,U_{14}$ contata due volte. Il luogo dei centri del complesso generato da Ω è invece costituito dalla retta $O_1\,O_4$, dalla retta $O_2\,U_{14}$ contata due volte e dall'asse r della stella $\overline{\sum}'$ di piani. Si conclude quindi che

V_4 – *Il complesso quadratico di rette di S_4 generato a norma della V, nel caso che la proiettività Ω generatrice sia di tipo* f_2), *è irriducibile ed il suo luogo dei centri è costituito da tre rette, due delle quali, una doppia e l'altra semplice* ($\equiv r$, *asse di* $\overline{\sum}'$), *sono sghembe e si apoggiano alla terza, pur essa semplice.*

Da questa proposizione segue per il complesso quadratico di rette determinato a norma della II_7, una costruzione (analoga a quella indicata dianzi per il *caso* f_1)) mediante proiettività di tipo f_2) tra due opportune stelle $\sum$ e $\overline{\sum}'$.

Infine nel *caso* f_3), in cui $\overline{\omega}$ coincide con l'identità, osservato che il nucleo di ω (e di Ω) è costituito oltre che dalla retta $O_1\,O_4$ da un piano τ (di equazioni $a^2_{\cdot 1}\,x^1 - a^1_{\cdot 1}\,x^2 - a^1_{\cdot 2}\,x^3 - a^1_{\cdot 3}\,x^4 = x^5 = 0$) appartenente all'iperpiano α e incidente $O_1\,O_4$ in un punto distinto da O_1 e da O_4, lo si assuma come piano $O_2\,O_3\,U_{14}$ (di equazioni $x^1 - x^4 = x^5 = 0$). In conseguenza le equazioni di ω e di Ω divengono

$$\varrho\lambda'^1 = \lambda^3, \qquad \varrho\lambda'^2 = \lambda^2, \qquad \varrho\lambda'^3 = \lambda^1 \tag{15.15}$$

l'equazione del complesso generato da Ω assume la forma

$$p^{23}\,(p^{15} - p^{45}) = 0\,. \tag{15.16}$$

Perciò questo complesso si spezza nei due complessi lineari speciali nucleati aventi per nuclei rispettivamente il piano τ ed il piano $O_1\,O_4\,O_5$ congiungente la retta RS con la retta r asse di $\overline{\sum}'$. Concludiamo quindi che

V_5 – *Il complesso quadratico di rette di cui alla V, nel caso che la proiettività generatrice Ω sia di tipo* f_3), *è riducibile in due complessi lineari speciali nucleati aventi per nuclei ciascuno uno di due piani incontrantisi in un solo punto.*

Da questa proposizione segue la possibilità, per il complesso quadratico di cui alla II_9, di una nuova costruzione, analoga a quella indicata più sopra nel *caso* f_1), mediante proiettività di tipo f_3) tra due opportune stelle $\sum$ e $\overline{\sum}'$.

16. – In questo numero ottengo un'altra generazione proiettiva, diversa dalle precedenti, per due dei complessi precedentemente determinati.

A tal fine, fissati in S_4 due iperpiani α e α' fra loro distinti e due fasci di piani $\sum$ e $\sum'$, rispettivamente appartenenti ad α e α' ad assi r ed r' sghembi ed entrambi non contenuti nel piano $\tau \equiv \alpha \cap \alpha'$ (intersezione di α con α'), sia Ω una proiettività non degenere tra $\sum$ e $\sum'$. Usufruendo dell'arbitrarietà del riferimento assumiamo α ed α' come iperpiani di equazioni $x^4 = 0$ e $x^2 = 0$ rispettivamente e gli assi r ed r' dei due fasci di piani come rette $O_1\,O_2$ e $O_3\,O_4$ rispettivamente. In conseguenza due piani generici π e π' rispettivamente appartenenti ai due fasci $\sum$ e $\sum'$, sono rappresentabili con le seguenti equazioni

$$x^4 = x^3 - \lambda x^5 = 0 \tag{16.1}$$

e

$$x^2 = x^1 - \lambda' x^5 = 0\,. \tag{16.2}$$

Detta ω la proiettività subordinata da Ω sul piano $\tau\,(\equiv \alpha \cap \alpha')$ ed osservato che essa in generale non è una prospettività, usufruendo del riferimento si può fare in modo che essa (e quindi Ω) abbia per equazione

$$\lambda\lambda' = 1\,. \tag{16.3}$$

Invece nel caso in cui ω sia una prospettività si può far sì che essa (e la Ω) abbia equazione

$$\lambda' = \lambda\,. \tag{16.4}$$

Osservo che nel primo caso la conica γ di Steiner relativa ad ω è quella di equazioni

$$x^2 = x^4 = x^1 x^3 - (x^5)^2 = 0 \tag{16.5}$$

e che nel secondo caso l'asse di prospettività di ω è la retta $O_5\,U_{13}$ (di equazioni $x^2 = x^4 = x^1 - x^3 = 0$).

Procedendo in modo analogo al n. 2 si prova che

VI$_1$ – *Fissata in S_4 una proiettività Ω non degenere di tipo generale (cioè che non sia una prospettività) fra due fasci di piani, rispettivamente contenuti negli iperpiani α e α' distinti tra loro, ad assi r ed r' sghembi ed entrambi non appartenenti al piano $\tau \equiv \alpha \cap \alpha'$, il luogo delle rette incidenti piani corrispondenti in Ω è un complesso quadratico irriducibile, il cui luogo dei centri è costituito da una conica irriducibile $\gamma \in \tau$, coincidente col nucleo di Ω* (16), *e dagli assi r ed r' dei due fasci di piani.*

Questo complesso assume nel riferimento proiettivo fissato dianzi l'equazione

$$p^{12}\,p^{34} - p^{25}\,p^{45} = 0\,. \tag{16.6}$$

Analogamente si ha che

VI$_2$ – *Fissata in S_4 una prospettività Ω tra due fasci di piani, rispettivamente contenuti negli iperpiani α e α' fra loro distinti, ad assi r ed r' sghembi ed entrambi non appartenenti al piano $\tau \equiv \alpha \cap \alpha'$, il luogo delle rette incidenti piani corrispondenti in Ω è un complesso quadratico irriducibile, il cui luogo dei centri è costituito dalla retta congiungente le due intersezioni col piano τ di r ed r', dall'asse della suddetta prospettività Ω e dagli assi r ed r' dei due fasci di piani assegnati.*

Nel riferimento precedentemente fissato il complesso di rette assume l'equazione

$$p^{12}\,p^{45} - p^{25}\,p^{34} = 0\,. \tag{16.7}$$

Dalla VI$_1$ segue che il complesso quadratico di rette determinato per la II$_3$ dal fatto che il suo luogo dei centri è costituito da una conica irriducibile γ e da due rette sghembe r ed r', incidenti γ ciascuna in un solo punto e tali che γ r ed r' non appartengano ad uno stesso iperpiano, può generarsi, oltre che con le costruzioni assegnate nei numeri 5 e 15, in un solo modo come luogo delle rette incidenti piani corrispondenti nella proiettività Ω, avente per nucleo la conica γ, tra i due fasci di piani rispettivamente appartenenti ai due iperpiani congiungenti il piano di γ con r ed il piano di γ con r', ed aventi per assi r ed r' rispettivamente.

(16) Si osservi che γ è la conica di Steiner relativa alla proiettività (non prospettività) ω subordinata da Ω sul piano $\tau \equiv \alpha \cap \alpha'$.

In modo analogo dalla VI_2 segue infine che in S_4 il complesso quadratico di rette determinato a norma della II_6 dal fatto che il suo luogo dei centri è costituito da quattro rette, tre delle quali r, s, t tra loro indipendenti, a due a due sghembe e incidenti la quarta retta m, può ottenersi, oltre che con le costruzioni indicate nei numeri 8 e 15, in tre soli modi come luogo delle rette incidenti piani corrispondenti nella prospettività Ω, avente per asse di prospettività una qualunque ad es. t, delle tre rette indipendenti assegnate, tra i due fasci di piani rispettivamente contenuti nei due iperpiani $\alpha \equiv r \cup t$ e $\alpha' \equiv s \cup t$ ed aventi come assi r ed s rispettivamente.

§ 3. – Complessi tetraedrali e pseudotetraedali di S_3.

17. – Nel numero 14 abbiamo provato (cfr. III) che il luogo delle rette congiungenti punti corrispondenti in una omografia $\overline{\Omega}$ non degenere di S_3 è un complesso quadratico $\overline{C}$, la cui equazione, se $\overline{\Omega}$ è rappresentata dalle (2.3), è la (14.1). Vogliamo ora esaminare brevemente e classificare i vari tipi di complessi $\overline{C}$ di S_3 generati a norma della III: è chiaro che a tal fine basterà classificare le omografie $\overline{\Omega}$ che li generano.

Ricordiamo che in S_3 i tipi proiettivamente distinti di omografie $\overline{\Omega}$ non degeneri sono quattordici: utilizzando le loro equazioni canoniche in opportuni riferimenti proiettivi e l'equazione (14.1) si ottengono altrettante equazioni canoniche per i complessi $\overline{C}$ da esse generati. Da queste equazioni e dalle configurazioni degli elementi uniti [17] delle omografie generatrici si ottengono facilmente i seguenti risultati:

1°) *Se l'omografia $\overline{\Omega}$ è di tipo generale, cioè se la sua equazione caratteristica ha quattro radici distinte, il complesso $\overline{C}$ da essa generato* (cfr. III) *è notoriamente* [3] *tetraedrale ed ha per tetraedro fondamentale quello avente per vertici i punti uniti di $\overline{\Omega}$.*

Infatti, assumendo i punti uniti di $\overline{\Omega}$ come vertici di un riferimento proiettivo, le equazioni (2.3) di $\overline{\Omega}$ divengono

$$\varrho x'^1 = \varrho_1 x^1, \quad \varrho x'^2 = \varrho_2 x^2, \quad \varrho x'^3 = \varrho_3 x^3, \quad \varrho x'^4 = \varrho_4 x^4$$

---

[17] Si noti che i punti uniti di $\overline{\Omega}$ sono certamente centri del complesso $\overline{C}$ generato da $\overline{\Omega}$.

e conseguentemente l'equazione (14.1) del complesso $\overline{C}$ generato da $\overline{\Omega}$ assume la forma

$$(17.1) \qquad (\varrho_1 - \varrho_4)(\varrho_2 - \varrho_3)\, p^{12} p^{34} - (\varrho_1 - \varrho_2)(\varrho_3 - \varrho_4)\, p^{14} p^{23} = 0,$$

dalla quale segue subito l'asserto.

2°) *Se l'equazione caratteristica di $\overline{\Omega}$ possiede una radice doppia di rango tre e due radici semplici, il complesso $\overline{C}$ generato da $\overline{\Omega}$* (v. III) *è irriducibile e lo diremo pseudotetraedrale di prima specie: in tal caso due dei suoi quattro centri sono coincidenti.*

È noto (cfr. ad es. [7] p. 352) infatti che in questo caso, scegliendo un opportuno riferimento proiettivo, le equazioni di $\overline{\Omega}$ assumono la forma canonica

$$\varrho x'^1 = \varrho_1 (x^1 + x^2), \quad \varrho x'^2 = \varrho_1 x^2, \quad \varrho x'^3 = \varrho_2 x^3, \quad \varrho x'^4 = \varrho_3 x^4.$$

Da queste segue, per il complesso $\overline{C}$ generato da $\overline{\Omega}$, l'equazione

$$(17.2) \qquad (\varrho_1 - \varrho_3)(\varrho_1 - \varrho_2)\, p^{12} p^{34} - \varrho_1 (\varrho_2 - \varrho_3)\, p^{23} p^{24} = 0 ,$$

dalla quale si deduce facilmente l'asserto.

3°) *Se l'equazione caratteristica di $\overline{\Omega}$ possiede due radici doppie, ciascuna di rango tre, il complesso generato da $\overline{\Omega}$ è irriducibile e lo diremo pseudotetraedrale di seconda specie: in questo caso i suoi quattro centri coincidono a coppie.*

Infatti, considerando in tal caso le seguenti equazioni canoniche (v. [7] p. 353) dell'omografia $\overline{\Omega}$

$$\varrho x'^1 = \varrho_1 (x^1 + x^2), \quad \varrho x'^2 = \varrho_1 x^2, \quad \varrho x'^3 = \varrho_2 (x^3 + x^4), \quad \varrho x'^4 = \varrho_2 x^4,$$

per il complesso $\overline{C}$ generato da $\overline{\Omega}$ si ottiene l'equazione

$$(17.3) \qquad (\varrho_1 - \varrho_2)^2\, p^{12} p^{34} - \varrho_1 \varrho_2 (p^{24})^2 = 0,$$

da cui si deduce subito l'asserto.

4°) *Se l'equazione caratteristica di $\overline{\Omega}$ possiede una radice tripla di rango tre ed una semplice, il complesso $\overline{C}$ generato da $\overline{\Omega}$ è irriducibile e lo diremo pseudotetraedrale di terza specie: in tal caso tre dei suoi quattro centri sono coincidenti in un punto distinto dal quarto centro.*

Infatti assumendo per $\overline{\Omega}$ le equazioni canoniche (v. [7] p 354)

$$\varrho x'^1 = \varrho_1 (x^1 + x^2),\ \varrho x'^2 = \varrho_1 (x^2 + x^3),\ \varrho x'^3 = \varrho_1 x^3,\ \varrho x'^4 = \varrho_2 x^4,$$

per il complesso $\overline{C}$ generato da $\overline{\Omega}$ si ricava l'equazione

$$(\varrho_1 - \varrho_2)(p^{13} p^{34} - p^{23} p^{24}) + \varrho_1 p^{23} p^{34} = 0, \tag{17.4}$$

dalla quale si deduce subito l'asserto.

5°) *Se l'equazione caratteristica di $\overline{\Omega}$ ha una radice quadrupla di rango tre, il complesso $\overline{C}$ generato da $\overline{\Omega}$ è irriducibile e lo diremo pseudotetraedrale di quarta specie: in tal caso i suoi quattro centri sono tutti coincidenti.*

Infatti, assumendo per $\overline{\Omega}$ le equazioni canoniche seguenti (v. [7] p. 355)

$$\varrho x'^1 = x^1 + x^2,\quad \varrho x'^2 = x^2 + x^3,\quad \varrho x'^3 = x^3 + x^4,\quad \varrho x'^4 = x^4$$

per il complesso $\overline{C}$ generato da $\overline{\Omega}$ si ottiene l'equazione

$$p^{14} p^{34} + p^{23} p^{34} - (p^{24})^2 = 0, \tag{17.5}$$

dalla quale segue subito l'asserto.

Esaminando poi i complessi $\overline{C}$ generati dagli altri tipi di omografie di S_3 si vede subito che le omografie di S_3 assiali e biassiali, speciali e non speciali, cioè tutte le omografie per le quali il valore minimo dei ranghi delle radici caratteristiche è due, generano complessi $\overline{C}$ riducibili in due complessi lineari speciali nucleati aventi per assi ciascuno uno degli assi delle omografie generatrici. A seconda che questi due assi siano sghembi, incidenti o coincidenti i complessi quadratici $\overline{C}$ relativi li diremo *riducibili rispettivamente di prima, seconda o terza specie.*

Infine i complessi $\overline{C}$ generati dalle omologie solide speciali e non speciali e dall'identità sono ovviamente indeterminati.

Concludendo si ha quindi che

VII. – *Il complesso $\overline{C}$ generato da un'omografia non degenere $\overline{\Omega}$ di S_3 a norma della* III *è irriducibile se, e solo se, le radici caratteristiche di Ω hanno tutte rango tre ed è un complesso tetraedrale solo nel caso che $\overline{\Omega}$ sia di tipo generale.*

Se invece il rango minimo delle radici caratteristiche di $\overline{\Omega}$ è due, ossia se l'omografia $\overline{\Omega}$ è assiale o biassiale, il complesso $\overline{C}$ degenera in due complessi lineari speciali nucleati aventi per nuclei ciascuno uno degli assi di $\overline{\Omega}$.

Infine se il rango minimo delle radici caratteristiche è uno o zero, ossia se $\overline{\Omega}$ è un'omologia solida o l'identità, il complesso $\overline{C}$ è indeterminato.

§ 4. – Proprietà dei complessi quadratici di S_4 introdotti nel § 1.

18. – In questo numero porremo in rilievo alcune proprietà dei complessi quadratici di rette di S_4 precedentemente ottenuti nel § **1** (cfr. I e IV).

Osserviamo anzitutto che il complesso $\bar{C}$ subordinato in un iperpiano da uno qualunque C di questi complessi di S_4 è un complesso quadratico $\bar{C}$ di S_3 di uno dei tipi esaminati nel numero precedente. Il tipo di complesso $\bar{C}$ subordinato dipende ovviamente dal tipo di complesso C assegnato e dall'S_3 che si considera.

Esaminiamo dapprima i complessi C di cui alla I, generati cioè mediante proiettività fra due stelle di ∞^3 rette a centri distinti (v. n. 2, 3, ..., 13).

Nel *caso* a_1) (v. I_1), a seconda che un iperpiano è generico, tangente, bitangente, osculatore o ipersculatore per la quartica luogo dei centri del complesso C, il complesso $\bar{C}$ in esso subordinato da C risulta rispettivamente tetraedrale, pseudotetraedrale di prima specie, di seconda specie, di terza specie o di quarta specie. È ovvio che in tal caso sono questi gli unici complessi subordinati.

Nel *caso* a_2) i complessi subordinati presentano le stesse particolarità precedenti con la variante che ora non esistono complessi subordinati pseudotetraedrali di seconda e di quarta specie, e con l'aggiunta che esistono complessi subordinati $\bar{C}$ riducibili (di prima e di seconda specie) in due complessi lineari speciali nucleati [18]. Inoltre, mentre nel *caso* a_1) non vi è alcun iperpiano totale del complesso C, nel *caso* a_2) è totale l'iperpiano di appartenenza della cubica facente parte del luogo dei centri di C: ciò segue facilmente dalla proposizione

VIII. – *Assegnata in S_3 una proiettività generica Ω^* non degenere tra due stelle di rette a centri distinti o coincidenti, il luogo delle rette incidenti rette corrispondenti in Ω^* è l'intero spazio rigato* [19].

Riprendendo in esame i complessi C di S_4 introdotti con la I, osserviamo che nel *caso* b_1) i complessi $\bar{C}$ subordinati sono o tetraedrali o pseudotetraedrali di

---

[18] Sono tali quelli subordinati negli iperpiani passanti per la retta r appartenente al luogo dei centri del complesso C.

[19] Infatti detti S ed S' i centri delle due stelle di rette di S_3, sia r una generica retta dello spazio non passante nè per S, nè per S'. Al piano che congiunge S con r corrisponde in Ω^* un piano per S', che incontra r (almeno) in un punto P'. Poichè la retta corrispondente in Ω^{*-1} alla $S'P'$ appartiene al piano congiungente S con r e quindi incide certamente la retta r, quest'ultima appartiene al luogo di rette richiesto. Infine, valendo ciò anche per le rette di ciascuna delle due stelle assegnate, resta così completamente provata la VIII.

prima specie, ovvero riducibili di prima specie. Dalla VIII si ha inoltre che sono totali per il complesso C i due iperpiani distinti uniti nella proiettività Ω generatrice di C.

Nel *caso* b_2) non vi è alcun complesso subordinato tetraedrale, nè alcun complesso subordinato pseudotetraedrale di terza o di quarta specie, ed esiste un solo iperpiano totale, che è quello unito doppio in Ω.

Nel *caso* c_1) non esiste alcun iperpiano in cui il complesso subordinato sia pseudotetraedrale o degenere di prima o di terza specie e sono totali soltanto i tre iperpiani uniti nella proiettività Ω generatrice del complesso.

Nel *caso* c_2) vi sono due soli i perpiani totali e sono tali gli iperpiani uniti in Ω. Inoltre tutti i complessi subordinati sono pseudotetraedrali di prima specie o riducibili.

Infine nel *caso* c_3) vi è un solo iperpiano totale, coincidente con l'iperpiano unito triplo in Ω, e tutti i complessi subordinati sono o pseudotetraedrali di terza specie o riducibili.

In tutti gli altri casi di complessi C generati a norma della I i complessi $\bar{C}$ subordinati da C sono sempre riducibili come i complessi C che li subordinano.

Osserviamo infine che in ogni caso i piani totali per il complesso C sono tutti e soli quelli secanti almeno in tre punti (distinti o coincidenti tutti o in parte) il luogo dei centri di C.

Limitandoci ora a considerare solo il caso generale, cioè il *caso* a_1), osserviamo che dall'unicità del complesso quadratico di rette di S_4 avente per luogo dei centri una assegnata quartica razionale normale (v. II_1) segue che *il gruppo delle omografie di S_4 che mutano in sè il suddetto complesso C coincide col gruppo delle omografie di S_4 che mutano in sè la quartica luogo dei centri di C.*

Consideriamo ora i complessi C di S_4 introdotti nel numero 14, generati nel modo descritto nella IV mediante proiettività tra due stelle di ∞^3 rette con lo stesso centro e ricordiamo che essi possono ottenersi proiettando da un punto S i complessi $\bar{C}$ esaminati nel numero 17, generati a norma della III mediante le omografie di un iperpiano generico non passante per S.

Nel caso generale, in cui il complesso C si ottiene proiettando da S un complesso $\bar{C}$ tetraedrale di S_3, il complesso C è irriducibile come $\bar{C}$ ed il suo luogo dei centri è ovviamente costituito da quattro rette per S tra loro indipendenti. In tal caso i complessi subordinati da C negli iperpiani non passanti per S sono tutti tetraedrali, quelli invece subordinati negli iperpiani per S, a seconda che questi iperpiani non contengano alcuna delle suddette quattro rette o ne contengano al più due, sono rispettivamente pseudotetraedrali di quarta specie o riducibili. Infine sono ovviamente totali (v. VIII) per il complesso C soltanto i quattro iperpiani (per S) congiungenti a tre a tre le quattro rette medesime. Osserviamo inoltre che sono totali per il complesso C tutti i piani per S e quelli non contenenti S e secanti almeno in tre punti (distinti o coincidenti tutti o in parte) le quattro rette su menzionate.

Nei casi in cui il complesso C si ottiene proiettando da S un complesso $\bar{C}$ di S_3 pseudotetraedrale di prima, seconda, terza o quarta specie, il complesso C è irriducibile come $\bar{C}$ ed il suo luogo dei centri è costituito da quattro rette per S, delle quali rispettivamente due, due coppie, tre o tutte e quattro coincidono In questi casi i complessi subordinati dai complessi C assegnati negli iperpiani non passanti per S sono ovviamente tutti pseudotetraedrali rispettivamente di prima, seconda, terza, o quarta specie. I complessi subordinati negli iperpiani per S non contenenti alcuna delle rette appartenenti al luogo dei centri di C sono sempre pseudotetraedrali di quarta specie come nel caso generale. Invece i complessi subordinati da C negli iperpiani contenenti una o due rette appartenenti al suddetto luogo dei centri di C sono in generale riducibili, potendo però alcuni di essi essere indeterminati. Precisamente sono tali (v. VIII) quei complessi subordinati in tutti e soli gli iperpiani uniti nella proiettività Ω generatrice del complesso C. In ogni caso sono ovviamente uniti in Ω e quindi certamente totali per C gli iperpiani congiungenti tre distinte (se esistono) delle suddette quattro rette.

Nei casi in cui il complesso C si ottiene proiettando da S un complesso $\bar{C}$ di S_3 riducibile in due complessi lineari speciali nucleati, aventi per nuclei ciascuno una di due rette r ed r' (sghembe o incidenti ovvero coincidenti), il complesso C è anch'esso riducibile in due complessi lineari speciali nucleati aventi per nuclei rispettivamente i due piani congiungenti S con r ed S con r' (incidenti solo in S, o solo in una retta per S ovvero coincidenti).

Infine è banale che se $\bar{C}$ è indeterminato tale risulta pure C.

Osserviamo ora che dalle I, IV consegue che

IX. – *Assegnata in S_4 una proiettività Ω non degenere tra due stelle di ∞^3 rette a centri distinti o coincidenti, il luogo delle rette incidenti rette corrispondenti in Ω è un complesso quadratico C.*

Raccogliendo i risultati conseguiti nelle I_1, I_2, ..., I_{11} e quelli illustrati dianzi relativi ai complessi introdotti nella IV si può concludere che il complesso C di cui alla IX è irriducibile se, e solo se, al nucleo della proiettività Ω che lo genera non appartiene alcun piano ed allora il suo luogo dei centri è una quartica razionale normale (caso generale) o una quartica variamente riducibile. Se invece al nucleo di Ω appartiene un iperpiano il complesso C è indeterminato. Infine in tutti gli altri casi (in cui il nucleo di Ω è costituito da un piano e da due rette incidenti, o da un piano e da una conica irriducibile ovvero da due piani) il complesso C è riducibile in due complessi lineari speciali nucleati, aventi per nuclei ciascuno un piano.

§ 5. – Alcuni tipi di complessi quadratici di rette di S_n.

19. – Ci proponiamo infine di introdurre un tipo di complessi quadratici di rette di S_n $(n > 3)$ analogo a quelli di S_3 e di S_4 precedentemente (v. § **1** e § **3**) determinati.

A tal fine, considerati in S_n $(n > 3)$ due spazi subordinati generici fra loro indipendenti, di dimensione $h-1 = n-4$, assumiamoli come spazi fondamentali $E_{h-1}(O_1 O_2 \dots O_h)$ ed $E'_{h-1}(O_5 O_6 \dots O_{n+1})$, e siano

$$\frac{x^{h+1}}{\lambda^1} = \frac{x^{h+2}}{\lambda^2} = \frac{x^{h+3}}{\lambda^3} = \frac{x^{h+4}}{\lambda^4} \qquad (h = n-3)$$

e

$$\frac{x^1}{\lambda'^1} = \frac{x^2}{\lambda'^2} = \frac{x^3}{\lambda'^3} = \frac{x^4}{\lambda'^4}$$

le equazioni di due generici S_h per E_{h-1} ed E'_{h-1} rispettivamente. Siano inoltre

$$\varrho\lambda'^i = a^i_{\cdot k}\,\lambda^k, \qquad (i,\ k = 1,\ 2,\ 3,\ 4; \quad \varrho \neq 0 \text{ e Det. } (a^i_{\cdot k}) \neq 0) \tag{19.1}$$

le equazioni di una proiettività Ω non degenere tra le due stelle $\sum$ e $\sum'$ degli S_h per E_{h-1} ed E'_{h-1} rispettivamente.

Seguendo lo stesso procedimento del numero 2 si ha che

X. – *Fissata in S_n $(n > 3)$ una proiettività Ω non degenere tra le due stelle degli S_h per due S_{h-1} fra loro indipendenti, con $h = n-3$ $(\geqslant 1)$* (20), *il luogo delle rette incidenti S_h corrispondenti in Ω è un complesso quadratico.*

L'equazione di questo complesso, nel riferimento dianzi fissato, è la seguente

$$p^{[12}\,a^{34]\cdot\cdot}_{\cdot\cdot\alpha\beta}\,p^{\alpha+h\ \beta+h} = 0, \qquad (\alpha < \beta)\ (^{20}), \tag{19.2}$$

con lo stesso significato dei simboli e con le stesse convenzioni adottate nella (2.4).

Dalla (19.2) si deduce subito che per $h \geqslant 5$ il complesso quadratico C può ottenersi proiettando dall'$S_{h-5}(O_5 O_6 \dots O_h)$, intersezione degli spazi-asse delle

---

(20) Si osservi che la X e la (19.2) continuano a sussistere anche per $h = 0$, con l'intesa che Ω in tal caso rappresenti una omografia di S_3.

due assegnate stelle di S_h, il complesso quadratico C' subordinato da C in un qualunque S_7 (ad es. quello di equazioni $x^5 = x^6 = ... = x^h = 0$) sghembo col predetto S_{h-5}, e quindi il luogo dei centri (*varietà centrale*) di C è l'S_{h-5} - cono proiettante dal medesimo S_{h-5} la varietà centrale di C'.

Ritornando al caso di h intero qualunque $\geqslant 1$ avvertiamo che nel seguito, per brevità, ci limiteremo a studiare il complesso C generato da Ω soltanto nel caso più generale.

20. – D'ora in poi supporremo sempre che la proiettività Ω sia di tipo generale. Sotto tale ipotesi si può facilmente provare ([21]) che per ogni valore intero di $h \geqslant 1$, è lecito assumere i corrispondenti in Ω degli iperpiani di $\sum$ di equazioni rispettive

$$x^{h+1} = 0, \quad x^{h+2} = 0, \quad x^{h+3} = 0, \quad x^{h+4} = 0 \quad \text{e} \quad x^{h+1} + x^{h+2} + x^{h+3} + x^{h+4} = 0$$

come iperpiani di equazioni rispettive

$$x^1 = 0, \quad x^2 = 0, \quad x^3 = 0, \quad x^4 = 0 \quad \text{e} \quad x^1 + x^2 + x^3 + x^4 = 0 .$$

Ciò fatto le equazioni di Ω diventano

$$\varrho \lambda'^i = \lambda^i \qquad (i = 1, 2, 3, 4) \tag{20.1}$$

e conseguentemente l'equazione del complesso C generato da Ω assume la forma canonica

$$\delta^{1\,2\,3\,4}_{\alpha\,\beta\,\gamma\,\varepsilon}\, p^{\alpha\beta}\, p^{\gamma+h\;\varepsilon+h} = 0 , \tag{20.2}$$

([21]) Ciò è ovvio per $h \geqslant 4$, non essendoci in tal caso alcun iperpiano comune alle due stelle $\sum$ e $\sum'$.

Avendo già dimostrato (cfr. n. 3) che per $h = 1$, se Ω è di tipo generale, è possibile scegliere un riferimento proiettivo rispetto al quale Ω assume le equazioni (20.1), supponiamo $h = 2$. Osserviamo che in tal caso, se Ω è di tipo generale, nel fascio F degli iperpiani comuni a $\sum$ e $\sum'$ non vi è alcun iperpiano corrispondente in Ω (o Ω^{-1}) ad un iperpiano dello stesso fascio. Perciò, considerati i due iperpiani di F di equazioni rispettive $x^3 = 0$ e $x^4 = 0$, sarà lecito assumere i loro corrispondenti in Ω come iperpiani di equazioni rispettive $x^1 = 0$ e $x^2 = 0$, ed i loro corrispondenti in Ω^{-1} come iperpiani di equazioni rispettive $x^5 = 0$ e $x^6 = 0$. Assumendo infine il corrispondente in Ω dell'iperpiano di equazione $x^3 + x^4 + x^5 + x^6 = 0$ come iperpiano di equazione $x^1 + x^2 + x^3 + x^4 = 0$, le equazioni di Ω diventano le (20.1).

Osserviamo infine che anche per $h = 3$ si perviene allo stesso risultato, procedendo in modo analogo.

con lo stesso significato dei simboli e con le stesse convenzioni adottate nella (3.2).

Ne consegue che la varietà centrale del complesso C coincide col nucleo di Ω ed ha le equazioni

$$(20.3) \qquad x^{h+1} = \varrho x^1, \quad x^{h+2} = \varrho x^2, \quad x^{h+3} = \varrho x^3, \quad x^{h+4} = \varrho x^4,$$

dalle quali si deduce subito che essa è il luogo degli ∞^1 S_{h-1} di intersezione degli iperpiani corrispondenti di quattro fasci indipendenti di iperpiani riferiti tra loro proiettivamente. Si noti però che, mentre per $1 \leqslant h \leqslant 4$ questi S_{h-1} sono a due a due sghembi, per $h \geqslant 5$ essi passano tutti per l'S_{h-5} $(O_5\, O_6 \ldots O_h)$, intersezione degli spazi-asse delle due stelle assegnate $\sum$ e $\sum'$ (o anche dei predetti quattro fasci di iperpiani). Ne consegue che in questo caso (cioè per $h \geqslant 5$) la varietà centrale V di C è l'S_{h-5}-cono proiettante dal suddetto S_{h-5} la varietà centrale V' del complesso di rette C' subordinato da C nell'S_7 di equazioni $x^5 = x^6 = \ldots = x^h = 0$, ovviamente sghembo con l'S_{h-5} in discorso (e del resto qualunque). Ciò d'altronde è confermato dal fatto, già posto in evidenza nel numero precedente e d'altra parte implicito nell'equazione (20.2) del complesso C, che lo stesso complesso C può ottenersi (per $h \geqslant 5$) proiettando dal medesimo S_{h-5} il complesso C' dianzi menzionato.

Tornando ora a supporre h intero qualunque $\geqslant 1$, e considerata la varietà centrale del complesso C, dalla sua generazione proiettiva mediante Ω o mediante i fasci proiettivi (20.3) si può dedurre (v. [**4**] Cap. 14° e 15°) che essa è una V_h^4 (di dimensione h e di ordine quattro) irriducibile, normale e razionale sia come luogo dei suoi ∞^h punti che come luogo dei suoi ∞^1 S_{h-1} generatori. Ricordiamo (cfr. [**13**], [**14**], [**2**] e [**4**] Cap. 14° e 15°) che questa varietà è detta una $S_{h-1} - V_h^4$ ed è un caso particolare, corrispondente ad $r = h + 3$ ed $i = h - 1$, delle note varietà $S_i - V_{i+1}^{r-i}$ $(i > 1)$ irriducibili di S_r.

21. - Poichè, come si è visto dianzi, per $h \geqslant 5$ il complesso C di equazione (20.2) può ottenersi proiettando un analogo complesso di S_7, esaminiamo ora brevemente ciò che accade per $1 \leqslant h \leqslant 4$, ed essendo stato precedentemente (§ **1**) esaminato il caso $h = 1$ iniziamo col considerare il caso $h = 2$.

In tal caso ($h = 2$) la varietà centrale del complesso C è una rigata V_2^4 irriducibile di S_5 (razionale normale), costituita da una serie razionale di ∞^1 rette sghembe a due a due (per le proprietà di questa varietà cfr. [**4**] e [**13**]).

Per $h = 3$ la varietà centrale del complesso C è una $S_2 - V_3^4$ irriducibile di S_6 (razionale normale), costituita da una serie razionale di ∞^1 piani a due a due sghembi (per le proprietà di questa varietà cfr. [**4**] e [**14**]).

Infine per $h = 4$ la varietà centrale del complesso C è una $S_3 - V_4^4$ irriducibile di S_7, normale e razionale sia come luogo dei suoi ∞^4 punti che come luogo dei suoi ∞^1 S_3 generatori, sghembi a due a due (per le proprietà di questa varietà cfr. [2] e [4]).

Tornando ora a supporre $h \geqslant 1$ intero qualunque e raccogliendo i risultati conseguiti in questo paragrafo si ha che

XI. – *Fissata in S_n $(n > 3)$ una proiettività Ω di tipo generale fra le due stelle $\sum$ e $\sum'$ degli S_h, con $h = n - 3$, per due S_{h-1} tra loro indipendenti, il luogo delle rette incidenti S_h corrispondenti in Ω è un complesso quadratico irriducibile* ([22]), *la cui varietà centrale coincide col nucleo di Ω ed è una $S_{h-1} - V_h^4$ razionale normale.*

Ricordiamo (v. n. 19) che per $h \geqslant 5$ il complesso C può ottenersi proiettando dall'S_{h-5} intersezione degli spazi-asse delle due stelle $\sum$ e $\sum'$ il complesso C' subordinato da C stesso in un qualunque S_7 sghembo col suddetto S_{h-5}: Analogamente la varietà centrale di C è in tal caso l'S_{h-5} - cono proiettante dal medesimo S_{h-5} la varietà centrale $S_3 - V_4^4$ di C'.

Ci proponiamo infine di invertire la XI. A tal fine ricordiamo anzitutto (v. [4] p. 378) che, *assegnata una qualunque $S_{h-1} - V_h^4$ irriducibile di S_{h+3} e fissati due suoi generici S_{h-1} generatori esiste una ed una sola proiettività Ω, il cui nucleo coincida con la data $S_{h-1} - V_h^4$, tra le due stelle di S_h aventi per spazi-asse i prefissati S_{h-1}.*

Se ne deduce subito che esiste almeno un complesso quadratico di rette di S_{h+3} la cui varietà centrale coincida con l'assegnata $S_{h-1} - V_h^4$: è certamente tale il complesso C generato, a norma della XI, dalla suddetta proiettività Ω. Si prova inoltre che di siffatti complessi ne esiste uno ed uno solo osservando che, se ne esistessero due tra loro distinti $\bar{C}$ e $\bar{C}'$, questi subordinerebbero in un generico $S_4\,\alpha$ due complessi quadratici C e C' fra loro distinti. Ciò però sarebbe in contrasto con le $\mathrm{II}_1, \mathrm{II}_2, \ldots, \mathrm{II}_{11}$ del § **1**, perchè $\bar{C}$ e $\bar{C}'$ sarebbero due complessi quadratici di rette di S_4 tra loro distinti ed aventi entrambi per varietà centrale la C^4 sezione di α con la $S_{h-1} - V_h^4$ assegnata. Si ha perciò che

XII. – *Data in S_{h+3} (per $h \geqslant 1$) una $S_{h-1} - V_h^4$ razionale normale (irriducibile), esiste un solo complesso quadratico di rette C, anch'esso irriducibile* ([22]), *avente l'assegnata $S_{h-1} - V_h^4$ come varietà centrale.*

Questo complesso può ovviamente costruirsi in infiniti modi, come luogo delle rette incidenti S_h corrispondenti nella proiettività, avente per nucleo la

---

([22]) L'irriducibilità del complesso C, oltre che dall'irriducibilità della sua equazione (20.2), segue ovviamente anche dalla (già provata) irriducibilità della sua varietà centrale.

suddetta $S_{h-1} - V_h^4$, tra le due stelle degli S_h per due qualunque S_{h-1} generatori tra loro distinti della medesima $S_{h-1} - V_h^4$.

Dalla XII segue inoltre che *le omografie di S_n che mutano in sè il complesso quadratico C (di S_n) di equazione* (20.2) *sono tutte e sole le omografie di S_n che mutano in sè la varietà centrale di C.*

Bibliografia.

[1] G. BATTAGLINI, *Sui sistemi di rette di 2° grado*, « Giorn. Mat. Battaglini », **6**, **7**, (1866).

[2] A. BELLATALLA, *Sulle varietà razionali normali composte di ∞^1 spazi lineari*, « Atti Accad. Sci. Torino Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. », **36** (1901).

[3] E. BERTINI, *Complementi di geometria proiettiva*, Zanichelli, Bologna (1927),

[4] E. BERTINI, *Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazi*, Principato. Messina (1923).

[5] E. BOMPIANI, *Su certi complessi quadratici e cubici di rette*, « Atti Accad. Naz Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. », (8), **24** (1958).

[6] E. BOMPIANI, *Complessi quadratici e cubici di spazi dotati di omologie armoniche*, « Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Mat. (8), **24** (1958).

[7] E. BOMPIANI, *Geometria Analitica e proiettiva*, Roma (1958).

[8] F. KLEIN, *Zur Theorie der Complexe I und II Grades*, Math. Annalen », **2**

[9] B. SEGRE, *Sui complessi algebrici di rette di S_n*, « Atti Accadl Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. », (5), **33** (1924).

[10] B. SEGRE, *I complessi quadratici di rette di S_4*, « Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. » (6), **2** (1925).

[11] B. SEGRE, *Studio dei complessi quadratici di rette di S_4*, « Ist. Veneto Sci. Lett. Atti Cl. Sci. Mat. Nat. », (1928-29).

[12] C. SEGRE, *Su una trasformazione irrazionale dello spazio*, « Giorn. Mat. Battaglini », **21** (1883).

[13] C. SEGRE, *Sulle rigate razionali in uno spazio lineare qualunque*, « Atti Acc. Sci. Torino Cl. Sci. Fis. Mat. », **19** (1884).

[13 *bis*] C. SEGRE, *Sulla geometria della retta e delle sue serie quadratiche*, Memoria Acc. Sci. Torino, **36** (2), (1884).

[14] C. SEGRE, *Sulle varietà a tre dimensioni composte di serie semplici razionali di piani*, « Atti Acc. Sci. Torino Cl. Sci. Fis. Mat., **21** (1885).

[15] A. TERRACINI, *Un'osservazione su un passo di un lavoro giovanile di C. Segre*, « Boll. Un. Mat. Ital. », (3), **12** (1957).

LUIGI MERLI (*)

Rettifica alla mia Nota: *Intersezioni di una funzione continua con le somme parziali della sua serie trigonometrica di Fourier e della sua serie di polinomi ortogonali.* (**)

Nell'enunciato di cui al terzo capoverso di pagina 69 l'inciso « *supposta generalmente continua e derivabile* » **deve essere sostituito** con le parole: « *supposta derivabile con derivate prima e seconda continue* », analogamente a quanto richiesto per la validità del precedente Teorema.

(*) Indirizzo: Istituto Matematico, Università, Firenze, (Italia).
(**) Ricevuto il 15 ottobre 1961. Vedi questa Rivista (2) 2 (1961), 67-76.