Riv. Mat. Univ. Parma (2) 3 (1962), 105-126

FRANCO FAVA (*)

Connessioni subordinate e derivazione assoluta. (**)

Introduzione.

Il procedimento di derivazione assoluta, usato con opportuni accorgimenti e congiuntamente con gli enti geometrici ad esso collegati, facilita lo studio delle proprietà differenziali delle varietà V_m immerse in spazi numerici X_n dotati di autoparallele; come ciò avvenga appare da un precedente lavoro [**8**] (1), ove, con i metodi accennati, è stato conseguito un primo gruppo di risultati relativi alle V_m di X_n.

Utilizzando in gran parte risultati conseguiti nel lavoro richiamato poc'anzi, e supponendo che X_n sia uno spazio a connessione affine A_n, ci proponiamo ora di far vedere come si possa procedere allo studio di alcune fondamentali questioni che si collegano con le *connessioni delle* V_m *subordinate da quella* (*affine*) *dello spazio di immersione* A_n (*con torsione*).

A tale scopo la connessione (in A_n) viene introdotta come strumento di derivazione assoluta (n. **1**).

Segue così l'immediata possibilità:

a) di ottenere (n. **2**), relativamente a spazi A_n (con torsione) ed operando direttamente sugli enti geometrici interessati, un teorema dimostrato, nel caso di connessioni simmetriche e con procedimenti facenti capo ai metodi di E. CARTAN, da E. BORTOLOTTI [**4**];

b) di conseguire (n. **3**) l'estensione, agli spazi A_n, di risultati stabiliti da E. CARTAN [**5**] relativamente a spazi A_3 (senza torsione) dotati di « superficie totalmente geodetiche ».

(*) Indirizzo: Politecnico, Torino, Italia.

(**) Ricevuto il 20-III1962.

Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del Gruppo di ricerca n. 11 del Comit. Naz. per la Mat. del C. N. R. (1961 62).

(1) I numeri tra [ ] si riferiscono alla Bibliografia che trovasi al termine del lavoro.

Dalle cose dette in generale, derivano poi nuovi contributi alla teoria delle superficie di uno spazio A_3 a connessione affine; qui ci limiteremo a considerare soltanto alcune tra le conseguenze dell'impostazione da noi data alla teoria delle connessioni subordinate, prendendo in esame, in modo particolare, quelle aventi attinenza con le nozioni (ivi introdotte in A_3) di:

a) *arco di curva* su una superficie (n. **5**);

b) *curve pangeodetiche* (e curve di DARBOUX) (n. **5**);

c) *direzioni assiali* relative a coppie di superficie in corrispondenza puntuale (n. **7**);

d) *giaciture osculatrici* stazionarie (in punti omologhi di superficie poste in corrispondenza puntuale) (n. **8**).

Nello studio delle superficie di A_3 si utilizzano i sistemi di equazioni di cui esse sono integrali dopo aver stabilito, con apposito procedimento di calcolo, le relative condizioni di integrabilità (n. **4**) ed aver indicato (n. **6**) il modo di utilizzare riferimenti locali determinati da vettori della giacitura 2-osculatrice alla superficie.

I risultati stabiliti coinvolgono — nella quasi totalità — unicamente le autoparallele dello spazio A_n e sono pertanto di natura proiettiva (nel senso di H. WEYL) e quindi applicabili a *spazi proiettivi curvi*; alcuni poi, quali, ad es., la nozione di direzioni assiali, sono di natura « topologica » e quindi estendibili a *spazi topologici* (²).

1. - Formule di derivazione lungo linee.

Sia A_n uno spazio a connessione affine riferito a coordinate x^α ($\alpha = 1, 2, \dots, n$).

Introdotto un nuovo sistema di coordinate $u^i (i = 1, 2 \dots, n)$ attraverso le relazioni:

$$x^\alpha = x^\alpha(u^1, u^2, \dots, u^n), \qquad \left(\frac{\partial(x^1, x^2, \dots, x^n)}{\partial(u^1, u^2, \dots, u^n)} \neq 0\right) \tag{1}$$

indichiamo con $\mu^\alpha_{(r)}$ il vettore tangente alla linea su cui varia u^r, ossia poniamo:

$$\mu^\alpha_{(r)} = \partial_r\, x^\alpha \qquad \left(\partial_r\, x^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial u^r}\right) \tag{2}$$

(²) Per le nozioni di spazio topologico e di spazio proiettivo curvo si veda : [**2**], Note I, V.

Per a^α vettore generico, esisteranno allora n funzioni $f^r(u^i)$ tali da avere:

$$a^\alpha = f^r \mu^\alpha_{(r)} ,$$

ossia: a^α combinazione lineare di $\mu^\alpha_{(r)}$.

La legge di derivazione assoluta di a^α lungo la linea coordinata (su cui varia) u^s, si può allora assegnare mediante la:

$$(3) \qquad a^\alpha_{(s)} = \partial_s f^r \mu^\alpha_{(r)} + f^r \mu^\alpha_{(rs)}$$

essendo:

$a^\alpha_{(s)}$ la derivata assoluta $\left(\text{che indicheremo anche: } \dfrac{\mathrm{D}a^\alpha}{\partial u^s}\right)$ di a^α lungo la linea u^s;

$$\partial_s f^r = \frac{\partial f^r}{\partial u^s} ; \qquad \mu^\alpha_{(rs)} = \frac{\mathrm{D}\mu^\alpha_{(r)}}{\partial u^s} .$$

L'espressione del vettore $a^\alpha_{(s)}$ si può quindi ritenere nota una volta data quella di $\mu^\alpha_{(rs)}$; questa si può assegnare mediante la combinazione lineare seguente:

$$(4) \qquad \mu^\alpha_{(rs)} = L^h_{rs} \, \mu^\alpha_{(h)}$$

con che *i coefficienti* L^h_{rs} *della combinazione lineare* (4), *assumono il ruolo di componenti della connessione* L *di* A_n (*nelle coordinate* u^i).

Poichè un cambiamento di coordinate definito da

$$u^i = u^i(u^{h'}) \qquad \left(\frac{\partial(u^1, u^2, \ldots, u^n)}{\partial(u^{1'}, u^{2'}, \ldots, u^{n'})} \neq 0\right)$$

permette di scrivere

$$\mu^\alpha_{(r')} = \mu^\alpha_{(r)} \vartheta^r_{r'} , \qquad (\vartheta^r_{r'} = \partial_{r'} u^r)$$

applicando la (3) si ha:

$$(5) \qquad \mu^\alpha_{(r's')} = \mu^\alpha_{(r)} \vartheta^r_{r's'} + \mu^\alpha_{(rs)} \vartheta^r_{r'} \vartheta^s_{s'} \qquad (\vartheta^r_{r's'} = \partial_{r's'} u^r)$$

da cui, detti $L^{h'}_{r's'}$ i coefficienti della connessione nelle $u^{i'}$, utilizzando le (4) e le

$$\mu^{\alpha}_{(r's')} = L^{h'}_{r's'}\, \mu^{\alpha}_{(h')},$$

si controlla subito che vale la ben nota relazione:

$$\vartheta^{h}_{r's'} + L^{h}_{rs}\, \vartheta^{r}_{r'}\, \vartheta^{s}_{s'} = L^{h'}_{r's'}\, \vartheta^{h}_{h'} \tag{6}$$

e che l'espressione di $\mu^{\alpha}_{(rs)}$ risulta (si interpretino le (6) relativamente al passaggio da coordinate x^{α} a coordinate u^{h}):

$$\mu^{\alpha}_{(rs)} = \partial_{rs}\, x^{\alpha} + L^{\alpha}_{\beta\gamma}\, \partial_{r}\, x^{\beta}\, \partial_{s}\, x^{\gamma} \tag{7}$$

essendo $L^{\alpha}_{\beta\gamma}$ le componenti della connessione di A_n nelle coordinate x^{α}.

Nelle (4) si possono far intervenire le componenti Γ^{h}_{rs} della connessione simmetrica associata Γ e le componenti Ω^{h}_{rs} del tensore di torsione di A_n; così procedendo si ha:

$$\nu^{\alpha}_{(rs)} = \Gamma^{h}_{rs}\, \mu^{\alpha}_{(h)}, \tag{4'}$$

$$\nu^{*\alpha}_{(rs)} = \Omega^{h}_{rs}\, \mu^{\alpha}_{(h)},$$

con

$$\nu^{\alpha}_{(rs)} = \frac{1}{2}\left(\mu^{\alpha}_{(rs)} + \mu^{\alpha}_{(sr)}\right), \quad \nu^{*\alpha}_{(rs)} = \frac{1}{2}\left(\mu^{\alpha}_{(rs)} - \mu^{\alpha}_{(sr)}\right).$$

Utilizzando le (4'), le derivate assolute lungo linee si possono fare rispetto alla connessione simmetrica associata Γ.

Se ora, con ricorso alle (4), si deriva lungo la linea u^{t} e si pone:

$$\frac{\mathrm{D}\mu^{\alpha}_{(rs)}}{\partial u^{t}} = \mu^{\alpha}_{(rst)}$$

e poi si calcola $\mu^{\alpha}_{(rts)}$, dal confronto si ottiene:

$$\mu^{\alpha}_{(rst)} - \mu^{\alpha}_{(rts)} = L^{h}_{rts}\, \mu^{\alpha}_{(h)}, \tag{8}$$

essendo L^{h}_{rts} le componenti (nelle u^{i}) del tensore di curvatura di A_n; poichè vale la relazione

$$L^{h}_{rts}\, \mu^{\alpha}_{(h)} = L^{\alpha}_{\beta\gamma\varepsilon}\, \mu^{\beta}_{(r)}\, \mu^{\gamma}_{(t)}\, \mu^{\varepsilon}_{(s)},$$

nelle (8) si possono fare intervenire le componenti $L^{\alpha}_{\beta\gamma\varepsilon}$ (nelle x^{λ}) del tensore di curvatura di A_n.

Se, partendo dalla 1ª delle (4′), si deriva rispetto alla connessione Γ, in luogo della (8) si ottiene la:

$$\nu^{\alpha}_{(rst)} - \nu^{\alpha}_{(rts)} = B^{h}_{rts}\,\mu^{\alpha}_{(h)}\,, \tag{8′}$$

essendo B^{h}_{rts} le componenti del tensore di curvatura relativo a Γ.

Un'altra conseguenza che sarà utile in seguito, si ha effettuando due derivazioni successive (lungo le linee u^h, u^k rispettivamente), ossia calcolando il vettore

$$\mu^{\alpha}_{(rshk)}$$

e poi confrontandolo con $\mu^{\alpha}_{(rskh)}$; si deduce in tal modo la relazione:

$$\mu^{\alpha}_{(rshk)} - \mu^{\alpha}_{(rskh)} = L^{p}_{rs}\,L^{q}_{pkh}\,\mu^{\alpha}_{(q)}\,. \tag{9}$$

In coordinate x^{α} la (9) si scrive [si utilizzi la (8) e successivamente la (4)]:

$$\mu^{\alpha}_{(rshk)} - \mu^{\alpha}_{(rskh)} = L^{\alpha}_{\beta\gamma\varepsilon}\,\mu^{\beta}_{(rs)}\,\mu^{\gamma}_{(k)}\,\mu^{\varepsilon}_{(h)}\,. \tag{9′}$$

Tenuto conto delle (6), è facile riconoscere che le componenti della connessione i cui indici non sono tutti uguali tra loro, sono degli invarianti (relativi) per quelle trasformazioni che lasciano inalterate le linee coordinate; nel caso invece delle componenti con indici tutti eguali, con una conveniente scelta del parametro su ciascuna linea coordinata, esse possono ridursi tutte a zero.

2. - Connessioni subordinate e sistemi t-assiali.

Consideriamo la varietà V_m di $A_n (2 \leqslant m < n)$ le cui equazioni sono date dalle (1) quando in esse si suppongono le $u^{m+1}, \ldots, u^n$ costanti (in particolare nulle).

Scritte le (4) come segue:

$$\mu^{\alpha}_{(rs)} = L^{p}_{rs}\,\mu^{\alpha}_{(p)} + L^{q}_{rs}\,\mu^{\alpha}_{(q)} \qquad \begin{matrix}(p = 1, 2, \ldots, m),\\ (q = m+1, \ldots, n)\end{matrix} \tag{10}$$

ed interpretate le (10) sulla V_m $(r, s = 1, 2, \dots, m)$:

le L^p_{rs} sono le componenti della connessione (della V_m) subordinata dalla $(n-m)$ — giacitura individuata dai vettori $\mu^\alpha_{(q)}$ (3).

Ciò premesso facciamo vedere che vale, per gli spazi A_n considerati, il seguente teorema (4):

il sistema t-assiale determinato su V_m dalla t-giacitura comune alla $(n-m)$ — giacitura dei vettori $\mu^\alpha_{(q)}$, ed alla giacitura 2-osculatrice alla V_m $(n-m \geqslant t)$, è il sistema delle autoparallele della connessione subordinata, sulla V_m, dalla $(n-$ $-m)$ — giacitura considerata.

Sia C una curva di V_m e ξ^p il relativo vettore tangente; introdotto il vettore λ^p (tangente alla V_m) tale che:

$$\xi^\alpha = \lambda^p \mu^\alpha_{(p)} \qquad (p = 1, 2, \dots, m), \tag{11}$$

con derivazione assoluta si ricava:

$$\frac{D\xi^\alpha}{dt} = \frac{d\lambda^p}{dt}\mu^\alpha_{(p)} + \lambda^p \frac{D\mu^\alpha_{(p)}}{dt}, \tag{12}$$

essendo t il parametro relativo alla curva C; la (12) si può scrivere nel modo che segue:

$$\frac{D\xi^\alpha}{dt} = \left(\frac{d\lambda^p}{dt} + L^p_{rs}\lambda^r\lambda^s\right)\mu^\alpha_{(p)} + \lambda^p \frac{D\mu^\alpha_{(p)}}{dt} - L^p_{rs}\lambda^r\lambda^s\mu^\alpha_{(p)}; \tag{13}$$

---

(3) Se si fa l'ipotesi che A_n sia uno spazio Riemanniano R_n, le L^q_{rs} risultano i simboli di CHRISTOFFEL di 2^a specie ed

$$L^q_{rs}\,\mu^\alpha_{(q)}$$

i vettori che, con BOMPIANI [3], possiamo indicare con $\Omega_{rs}^{\cdot\cdot\alpha}$. Le relazioni (10), dato il significato di $\mu^\alpha_{(rs)}$, permettono di riconoscere immediatamente che i vettori $\Omega_{rs}^{\cdot\cdot\alpha}$ $(r, s = 1, 2, \dots m)$ individuano con $\mu^\alpha_{(p)}$ $(p = 1, 2, \dots m)$ la giacitura 2-osculatrice alla V_m (in x^α); la « giacitura osculatrice » che il BOMPIANI individua utilizzando i vettori $\Omega_{rs}^{\cdot\cdot\alpha}$, dei quali sono pure messi in evidenza i significati geometrici (n. 3 della Nota citata), si ritrova quindi con il nostro procedimento fondato sull'uso dei vettori $\mu^\alpha_{(rs)}$, il cui significato geometrico è pure noto [8].

(4) Cfr. [4]. Ricordiamo, per comodità del lettore, che un sistema t-assiale è formato dalle curve (di V_m) aventi in ogni loro punto giacitura osculatrice con una direzione in comune con una prefissata t-giacitura (appartenente alla giacitura 2-osculatrice alla V_m nel punto).

Introdotta la derivata assoluta di λ^p rispetto alla connessione subordinata, si può scrivere:

$$\frac{D\xi^\alpha}{dt} = \frac{D\lambda^p}{dt}\mu^\alpha_{(p)} + (L^q_{rs}\lambda^r\lambda^s)\mu^\alpha_{(q)} \tag{14}$$

in quanto è

$$\frac{D\mu^\alpha_{(r)}}{dt} = \mu^\alpha_{(rs)}\lambda^s$$

ed inoltre sono valide le (10).

Nella (14) le L^p_{rs} che figurano nella derivata assoluta $\frac{D\lambda^p}{dt}$ (rispetto alla connessione subordinata) possono sostituirsi con le Γ^p_{rs} ed analogamente si può fare per le L^q_{rs}: ciò prova che la relazione (14) è vincolata soltanto alla connessione simmetrica associata (ossia alle autoparallele di A_n).

Cominciamo ora con l'ipotesi che C sia un'autoparallela relativa alla connessione subordinata; deve allora essere:

$$\frac{D\lambda^p}{dt} = \varphi\lambda^p; \tag{15}$$

sostituendo nella (14) $\left(\text{tener presente che è: } \lambda^p = \frac{du^p}{dt}\right)$, si ricava (cfr. (11)):

$$\frac{D\xi^\alpha}{dt} = \varphi\xi^\alpha + (\Gamma^q_{rs}\lambda^r\lambda^s)\mu^\alpha_{(q)}\,. \tag{14'}$$

La (14') è una relazione lineare tra i vettori ξ^α, $\frac{D\xi^\alpha}{dt}$ che individuano la 2-giacitura osculatrice a C, ed i vettori $\mu^\alpha_{(q)}$ della $(n-m)$— giacitura considerata: poichè vi è dipendenza lineare tra i vettori suddetti, si ha una direzione comune alle due giaciture considerate e quindi, dovendo ξ^α, $\frac{D\xi^\alpha}{dt}$ appartenere alla giacitura 2-osculatrice alla V_m:

Ogni autoparallela di V_m relativa alla connessione subordinata, appartiene al sistema t-assiale determinato dalla t-giacitura comune alla giacitura dei vettori $\mu^\alpha_{(q)}$ ed alla giacitura 2-osculatrice alla V_m.

Viceversa, l'ipotesi che la curva C appartenga al sistema t-assiale suddetto equivale all'esistenza di una relazione lineare tra i vettori ξ^α, $\frac{D\xi^\alpha}{dt}$ ed i t vettori

$\eta^\alpha_{(l)}$, della giacitura 2-osculatrice, che indiduano la t-giacitura d'incidenza:

$$\frac{\mathrm{D}\lambda^\alpha}{\mathrm{d}t} = \varphi\xi^\alpha + \psi^l\,\eta^\alpha_{(l)};$$

i vettori $\eta^\alpha_{(l)}$ si possono, a loro volta, esprimere come combinazioni lineari di $\mu^\alpha_{(q)}$:

$$\eta^\alpha_{(l)} = \varphi^q_l\,\mu^\alpha_{(q)}\ ;$$

si può allora scrivere

$$\frac{\mathrm{D}\xi^\alpha}{\mathrm{d}t} = \varphi\xi^\alpha + h^q\,\mu^\alpha_{(q)} \tag{14''}$$

con

$$h^q = \psi^l\,\varphi^q_l\,.$$

Dalla (14″), per confronto con la (14), poichè $\xi^\alpha = \mu^\alpha_{(p)}\,\lambda^p$, si deduce:

$$\frac{\mathrm{D}\lambda^p}{\mathrm{d}t} = \varphi\,\lambda^p\,,$$

ossia la (15): la C è un'autoparallela della connessione determinata, nella V_m, dagli $n - m$ vettori $\mu^\alpha_{(q)}$ (od anche da un altro sistema di $n - m$ vettori purchè linearmente indipendenti tra loro e linearmente dipendenti rispetto a $\mu^\alpha_{(q)}$).

Da quanto precede appare chiaro il ruolo della connessione simmetrica Γ nella determinazione dei sistemi t-assiali di V_m (ossia delle autoparallele delle connessioni subordinate).

3. - Varietà autoparallele.

Torniamo alle relazioni (10); supponiamo che siano soddisfatte le condizioni (cfr. (4′)):

$$\Gamma^q_{rs} = 0 \qquad \begin{matrix}(q = m+1,\ \ldots,\ n),\\ (r,\ s = 1,\ 2,\ \ldots,\ m);\end{matrix} \tag{16}$$

in tal caso è semplicemente [5]:

$$\nu^\alpha_{(rs)} = \Gamma^p_{rs}\,\mu^\alpha_{(p)} \qquad (p = 1,\ 2,\ \ldots,\ m)\,. \tag{17}$$

([5]) Le (17) si possono ovviamente interpretare in uno spazio Riemmaniano R_n; abbandonando la « forma vettoriale », ossia sostituendo i vettori $\mu^\alpha_{(rs)}$ con le loro espressioni (7), si ottengono subito le relazioni che si possono vedere a pag. 185 di [6].

È chiaro che attraverso le (17) le equazioni testè richiamate assumono nuova veste geometrica.

La giacitura 2-osculatrice alla V_m, essendo determinata dai vettori $\mu^\alpha_{(r)}$ e $\nu^\varkappa_{(rs)}$, ha dimensione m (6). Le quasi asintotiche $\gamma_{1,2}$ della V_m sono indeterminate, e perciò:

La V_m è una varietà autoparallela (o «totalmente geodetica») di A_n.

Le varietà autoparallele di A_n debbono perciò essere soluzioni di sistemi del tipo (17); scritto il sistema in discorso con coefficienti generici $\lambda^p_{rs} (= \lambda^p_{rs})$, si hanno le seguenti relazioni (cfr. (8')):

$$B^h_{rts}\mu^\varkappa_{(h)} = \Lambda^p_{rts}\mu^\varkappa_{(p)} \qquad (h = 1, 2, \ldots, n; \qquad r, t, s, p = 1, 2, \ldots, m); \tag{18}$$

ove le Λ^p_{rts} sono espresse con le λ^p_{rs} come le B^h_{rts} lo sono con le Γ^p_{rs}.

Dalle (18) si ricava quindi:

$$B^q_{rts} = 0 \tag{19}$$

e

$$B^p_{rts} = \Lambda^p_{rts}. \tag{19'}$$

Le (19), (19') sono condizioni necessarie affinchè in un punto di A_n si abbia una V_m autoparallela con tangente una m-giacitura assegnata; le (19) pongono ovviamente delle restrizioni per A_n e si presentano come l'analogo, in A_n, delle note condizioni relative a spazi A_3 senza torsione (7).

Se si vuole che A_n possieda in ogni suo punto una V_m autoparallela con una m-giacitura tangente arbitraria, allora deve essere *identicamente* (si scriva il 1° membro della (18) facendo uso della (8')):

$$B^\varkappa_{\beta\gamma\varepsilon}\mu^\beta_{(r)}\mu^\gamma_{(t)}\mu^\varepsilon_{(s)} = \Lambda^p_{rts}\mu^\varkappa_{(p)}. \tag{20}$$

Si ottengono così le seguenti condizioni di integrabilità:

$$B^\varkappa_{\beta\gamma\varepsilon} = 0, \qquad \Lambda^p_{rts} = 0$$

da cui si vede che: *la connessione simmetrica associata a quella data (in A_n), deve corrispondere ad uno spazio S_n euclideo.*

---

(6) Cfr. [8], n. 4.

(7) Cfr. [5], p. 265 e seg.

4. - Connessioni subordinate sulle V_2 di A_3. Condizioni di integrabilità delle equazioni delle V_2 di A_3.

Dalle cose dette in generale, veniamo ora ad alcune conseguenze relative al caso $n = 3$ ($m = 2$) ossia al caso delle superficie che, riferite alle asintotiche (che supponiamo distribuite in due sistemi distinti) si possono rappresentare, com'è noto, con una coppia di sistemi del tipo seguente [8]:

$$(21) \qquad \begin{cases} \nu^\alpha_{(11)} = \lambda^h_1 \mu^\alpha_{(h)} & \qquad (\mu^\alpha_{11} = \nu^\alpha_{11}) \\ & (h = 1,\ 2) \\ \nu^\alpha_{(22)} = \lambda^h_2 \mu^\alpha_{(h)} & \qquad (\mu^\alpha_{22} = \nu^\alpha_{22})\,. \end{cases}$$

Dal confronto delle (21) con le (4), si riconosce che è:

$$(21') \qquad \begin{cases} \lambda^h_1 = \Gamma^h_{11}, \quad \lambda^h_2 = \Gamma^h_{22} & \qquad (\Gamma^h_{11} = L^h_{11}, \quad \Gamma^h_{22} = L^h_{22}) \\ \Gamma^3_{11} = \Gamma^3_{22} = 0 & \qquad (\Gamma^3_{11} = L^3_{11}, \quad \Gamma^3_{22} = L^3_{22})\,. \end{cases}$$

I coefficienti che figurano nelle (21) hanno quindi il significato di *componenti della connessione della* V_2: esse sono *quelle componenti che non dipendono dalla direzione che determina la connessione* (*e nemmeno dalla torsione di* A_n).

Prima di trattare alcune questioni relative a superficie di A_3 — in particolare quelle per cui utilizzeremo particolari sistemi di coordinate (in A_3) — occupiamoci delle condizioni di integrabilità dei sistemi (21) sfruttando relazioni stabilite al n. 1 ed altre che ora ricaveremo.

Indichiamo con $\nu^\alpha_{(11h)}$, $\nu^\alpha_{(22h)}$, ... le derivate di $\nu^\alpha_{(11)}$, $\nu^\alpha_{(22)}$ ... lungo la u^h e rispetto alla connessione Γ: si ottengono subito le espressioni (si derivino le (21)):

$$(22) \qquad \begin{cases} \nu^\alpha_{(111)} = \partial_1 \lambda^h_1 \mu^\alpha_{(h)} + \lambda^h_1 \nu^\alpha_{(h1)} \\ \nu^\alpha_{(112)} = \partial_2 \lambda^h_1 \mu^\alpha_{(h)} + \lambda^h_1 \nu^\alpha_{(h2)} \\ \nu^\alpha_{(221)} = \partial_1 \lambda^h_2 \mu^\alpha_{(h)} + \lambda^h_2 \nu^\alpha_{(h1)} \\ \nu^\alpha_{(222)} = \partial_2 \lambda^h_2 \mu^\alpha_{(h)} + \lambda^h_2 \nu^\alpha_{(h2)}\,, \end{cases}$$

---

[8] Le (21) servono a rappresentare, più generalmente, superficie di spazi proiettivi curvi a 3 dimensioni.
Cfr. [8], n. 7.

da cui, con una successiva derivazione delle 2a., 3a., si ricava in particolare:

$$
(23) \qquad \begin{cases} \nu^{\alpha}_{(1122)} = \partial_{22}\, \lambda^h_1\, \mu^{\alpha}_{(h)} + 2\,\partial_2\, \lambda^h_1\, \nu^{\alpha}_{(h\,2)} + \lambda^h_1\, \nu^{\alpha}_{(h\,22)} \\ \nu^{\alpha}_{(2211)} = \partial_{11}\, \lambda^h_2\, \mu^{\alpha}_{(h)} + 2\,\partial_1\, \lambda^h_2\, \nu^{\alpha}_{(h\,1)} + \lambda^h_2\, \nu^{a}_{(h\,11)}\,. \end{cases}
$$

Alle (22) possiamo aggiungere le seguenti (cfr. (8′)):

$$
(24) \qquad \nu^{\alpha}_{(121)} = \nu^{\alpha}_{(112)} + B^k_{112}\, \mu^{\alpha}_{(k)}, \qquad \nu^{\alpha}_{(212)} = \nu^{\alpha}_{(221)} + B^k_{(221)}\, \mu^{\alpha}_{(k)}, \qquad (k=1,\ 2,\ 3)\,.
$$

Consideriamo come terza coordinata curvilinea u^3, accanto alle u^1, u^2, quella che rende soddisfatta la condizione:

$$
\nu^{\alpha}_{(12)} = \mu^{\alpha}_{(3)} \qquad\qquad (\mu^{\alpha}_{(3)} = \partial_3\, x^{\alpha})\,.
$$

La prima delle (23), fatte le dovute sostituzioni con ricorso alle (22), (24), si scrive:

$$
(25) \quad \nu^{\alpha}_{(1122)} = [\partial_{22}\, \lambda^h_1 + 2(\partial_2\, \lambda^1_1)\, \lambda^h_2 + \lambda^1_1\, (\partial_2\, \lambda^h_2 + \lambda^1_2\, \lambda^h_1 + B^h_{221}) + \lambda^2_1\, (\partial_2\, \lambda^h_2 + \lambda^2_2\, \lambda^h_2)]\, \mu^{\alpha}_{(h)} +
$$

$$
+ (2\,\partial_2\, \lambda^1_1 + \lambda^1_1\, \lambda^2_2 + \lambda^2_1\, \lambda^1_2 + \lambda^1_1\, B^3_{221})\, \mu^{\alpha}_{(3)}\,.
$$

Espressione analoga deducibile dalla precedente con opportuno scambio di indici, si ottiene per $\nu^{\alpha}_{(2211)}$; effettuando la differenza tra le espressioni così ottenute, si trova:

$$
(26) \qquad \nu^{\alpha}_{(1122)} - \nu^{\alpha}_{(2211)} = (\lambda^1_1\, B^k_{211} - \lambda^2_2\, B^k_{112} + A^k)\, \mu^{\alpha}_{(k)} \qquad (k = 1,\ 2,\ 3),
$$

essendo

$$
(26') \qquad \begin{cases} A^1 = \partial_{11}\, \lambda^1_2 - \partial_{22}\, \lambda^1_1 + \partial_1\, (\lambda^1_1\, \lambda^1_2) - \partial_2\, (\lambda^1_2\, \lambda^2_2) + \lambda^2_2\, \partial_2\, \lambda^1_1 - \lambda^1_2\, \partial_2\, \lambda^2_1, \\ A^2 = \partial_{11}\, \lambda^2_2 - \partial_{22}\, \lambda^2_1 + \partial_1\, (\lambda^1_2\, \lambda^2_1) - \partial_2\, (\lambda^2_1 \lambda^2_2) + \lambda^2_1\, \partial_1\, \lambda^1_2 - \lambda^1_1\, \partial_1\, \lambda^2_2, \\ A^3 = 2(\partial_2\, \lambda^1_1 - \partial_1\, \lambda^2_2)\,. \end{cases}
$$

D'altronde, dalla (cfr. (8′)):

$$
\nu^{\alpha}_{(112)} - \nu^{\alpha}_{(121)} = B^k_{121}\, \mu^{\alpha}_{(k)},
$$

derivando lungo la u^2 e rispetto a Γ, si deduce (cfr. (4′)):

(27) $$\nu^{\alpha}_{(1122)} - \nu^{\alpha}_{(1212)} = (\partial_2 B^k_{121} + \Gamma^k_{l2} B^l_{121})\, \mu^{\alpha}_{(k)} \qquad (l = 1, 2, 3);$$

procedendo in modo analogo a partire dalla relazione:

$$\nu^{\alpha}_{(221)} - \nu^{\alpha}_{(212)} = B^k_{212}\, \mu^{\alpha}_{(k)}$$

si ricava la differenza: $\nu^{\alpha}_{(2211)} - \nu^{\alpha}_{(2121)}$ e di conseguenza la relazione che segue:

(27′) $$\nu^{\alpha}_{(1122)} - \nu^{\alpha}_{(2211)} - (\nu^{\alpha}_{(1212)} - \nu^{\alpha}_{(2121)}) = C^k_{1212}\, \mu^{\alpha}_{(k)}$$

con

(27″) $$C^k_{1212} = \partial_2 B^k_{121} - \partial_1 B^k_{212} + \Gamma^k_{l2} B^l_{121} - \Gamma^k_{l1} B^l_{212}\,.$$

Se poi si tiene conto della (9′) e si passa a coordinate u^k, si ha [9]:

$$\nu^{\alpha}_{(1212)} - \nu^{\alpha}_{(2121)} = B^k_{312}\, \mu^{\alpha}_{(k)}$$

per cui la (27′) si può sostituire con la:

(28) $$\nu^{\alpha}_{(1122)} - \nu^{\alpha}_{(2211)} = (C^k_{1212} + B^k_{312})\, \mu^{\alpha}_{(k)}\,.$$

Dal confronto della (28) con la (26) si ottiene:

$$(C^k_{1212} + B^k_{312} + \lambda^1_1 B^k_{221} - \lambda^2_2 B^k_{112} - A^k)\, \mu^{\alpha}_{(k)} = 0,$$

da cui seguono le:

(29) $$C^k_{1212} + B^k_{312} + \lambda^1_1 B^k_{221} - \lambda^2_2 B^k_{112} - A^k = 0 \qquad (k = 1, 2, 3)\,.$$

---

(9) La (9′) scritta per le ν^{α} diviene:

$$\nu^{\alpha}_{(rshk)} - \nu^{\alpha}_{(rskh)} = B^{\alpha}_{\beta\gamma\varepsilon}\, \nu^{\beta}_{(rs)}\, \mu^{\gamma}_{(k)}\, \mu^{\varepsilon}_{(h)}\,.$$

Per avere la relazione che interessa, si tenga presente che:

$$\nu^{\beta}_{(rs)} = \nu^{\beta}_{(sr)} = \mu^{\beta}_{(3)}\,.$$

che sono le condizioni di integrabilità cercate (espresse in coordinate u^1, u^2, u^3).

In particolare: dalle (29), nell'ipotesi che sia:

$$\lambda_1^1 = \lambda_2^1 = \lambda_1^2 = \lambda_2^2 = 0, \tag{30}$$

si ottengono le condizioni:

$$C_{1212}^k + B_{312}^k = 0\,. \tag{30'}$$

Essendo soddisfatte le (30), le linee u^1, u^2 sono autoparallele (di A_n oltrechè della superficie); le (30') sono perciò le condizioni che debbono essere verificate in un punto affinchè lo spazio A_n possieda una superficie (per la quale siano assegnati $\mu_{(1)}^{\varkappa}$, $\mu_{(2)}^{\varkappa}$ e $\nu_{(12)}^{\varkappa}$) analoga alle quadriche dello S_3 proiettivo.

5. - Linee di Darboux. Pangeodetiche.

Consideriamo una superficie V_2 di A_3 rappresentata dalle (21) unitamente alle condizioni (29). È noto che [10]:

$$\lambda_1^2 \frac{(\mathrm{d}u^1)^2}{\mathrm{d}u^2}\,, \qquad \lambda_2^1 \frac{(\mathrm{d}u^2)^2}{\mathrm{d}u^1}$$

sono degli invarianti differenziali per la V_2 considerata.

A partire dai precedenti, sommando, si ottiene l'espressione:

$$\frac{\lambda_1^2\,(\mathrm{d}u^1)^3 + \lambda_2^1\,(\mathrm{d}u^2)^3}{\mathrm{d}u^1\,\mathrm{d}u^2} \tag{31}$$

la quale è, a sua volta, un invariante differenziale [11]; l'invariante (31) può essere utilizzato per introdurre la nozione di *elemento d'arco* sulla superficie.

Viene naturale, di conseguenza, considerare le direzioni in corrispondenza alle quali si annulla la forma

$$\lambda_1^2\,(\mathrm{d}u^1)^3 + \lambda_2^1\,(\mathrm{d}u^2)^3, \tag{32}$$

---

[10] Cfr. [2], Nota II, n. 6.

[11] Per ogni trasformazione delle coordinate e per quei cambiamenti dei parametri u^1, u^2 che lasciano fisse le asintotiche.

quali *direzioni di Darboux* della superficie (di A_3) considerata (*e linee di Darboux*, le linee integrali dell'equazione ottenuta annullando la forma suddetta) (12).

Per quanto riguarda la scelta della forma differenziale invariante (31) per introdurre l'elemento d'arco (e le direzioni di DARBOUX) in luogo di altre forme quali, ad es. le combinazioni lineari seguenti (a coefficienti h, k costanti con $h \neq k$) (13):

$$\frac{h\lambda_1^2\,(\mathrm{d}u^1)^3 + k\lambda_2^1\,(\mathrm{d}u^2)^3}{\mathrm{d}u^1\,\mathrm{d}u^2}\,,$$

si possono tenere presenti le considerazioni che seguono.

Si sa infatti che (14): *due coppie di elementi differenziali E_2 (del 2° ordine) con la stessa giacitura principale, ed un E_1 della giacitura principale comune, hanno un invariante finito.*

L'invariante in questione, indicato con I, lo si può calcolare considerando gli E_2 asintotici, gli E_2 delle autoparallele tangenti alle asintotiche (nel punto considerato) ed un E_1 della giacitura tangente alla superficie; tenuto conto che λ_1^h, λ_2^h sono le componenti di $\nu_{(11)}^\alpha$, $\nu_{(22)}^\lambda$ [cfr. (21)] rispettivamente, ed (1,0), (0,1), ($\mathrm{d}u^1$, $\mathrm{d}u^2$) quelle delle direzioni asintotiche e della direzione considerata (nel riferimento a cui appartengono le asintotiche come linee coordinate), l'espressione dell'invariante considerato risulta:

$$I = \frac{\begin{vmatrix} \lambda_1^1 & 1 \\ \lambda_1^2 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & \mathrm{d}u^1 \\ 1 & \mathrm{d}u^2 \end{vmatrix}^3}{\begin{vmatrix} \lambda_2^1 & 0 \\ \lambda_2^2 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & \mathrm{d}u^1 \\ 0 & \mathrm{d}u^2 \end{vmatrix}^3} = \frac{\lambda_1^2\,(\mathrm{d}u^1)^3}{\lambda_2^1\,(\mathrm{d}u^2)^3}\,. \tag{33}$$

Dalla (33) si ricava anzitutto:

$$\lambda_1^2\,(\mathrm{d}u^1)^3 - I\,\lambda_2^1\,(\mathrm{d}u^2)^3 = 0\,, \tag{33'}$$

da cui si vede intanto che: *tra valori di I e direzioni tangenti alla superficie (in un punto) intercede un'involuzione cubica*; ponendo poi $I = -1$ nella (33')

(12) Per « generalizzazioni formali » della nozione di direzioni di DARBOUX, ved. [5], pag. 275.

(13) Cfr. [1], p. 85 (n. 5).

(14) Cfr. [2], Nota II, n. 11.

(il cui 1º membro si può chiamare *forma di Darboux generalizzata*) si giunge alla terna già considerata; poichè nel caso di uno spazio S_3 proiettivo, al valore -1 di I corrispondono le classiche direzioni di DARBOUX, appare giustificata, attraverso la (32), la scelta fatta per introdurre l'elemento d'arco e le direzioni di DARBOUX su una V_2 di A_3.

Si tenga poi ancora presente quanto è immediato riconoscere, ossia che: *condizione necessaria e sufficiente affinchè due superficie di uno spazio a connessione affine A_3 siano proiettivamente applicabili, è che siano uguali gli elementi d'arco in punti corrispondenti* (15).

Dalla (31) si passa poi, come nel caso dello spazio ordinario, al seguente invariante integrale:

$$\int \frac{\lambda_1^2 + \lambda_2^1 (v')^3}{v'} \, du, \tag{34}$$

avendo posto:

$$u^1 = u, \qquad u^2 = v, \qquad v' = \frac{du^2}{du^1}.$$

Le curve estremali dell'integrale (34) sono le *pangeodetiche* della superficie; la corrispondente equazione risulta

$$2(\lambda_1^2 + \lambda_2^1 v'^3)\, v'' = \partial_1 \lambda_1^2 v' + 2\partial_2 \lambda_1^2 v'^2 - 2\partial_1 \lambda_2^1 v'^4 - \partial_2 \lambda_2^1 v'^5 \tag{34'}$$

ovviamente analoga a quella che si ha nel caso proiettivo.

Poichè è stato chiarito il significato dei coefficienti λ_1^h, λ_2^h in relazione alla connessione determinata (sulla superficie) da quella data in A_3, appare evidente il ruolo esplicato dalla connessione subordinata nell'introduzione degli enti considerati.

6. - Sviluppi locali. Cono di Segre.

Nella geometria differenziale delle superficie dello spazio ordinario, si fa frequente uso di « sviluppi locali ». Utilizzando i vettori con cui si individuano le successive giaciture osculatrici alle superficie di uno spazio a connessione affine, si ha la possibilità di fare qualcosa di analogo.

---

(15) Ricordiamo che le condizioni $\lambda_1^2 = \overline{\lambda}_1^2$ $\lambda_2^1 = \overline{\lambda}_2^1$ sono necessarie e sufficienti affinchè una corrispondenza (asintotica) tra due superficie V_2 e $\overline{V}_2$, rappresentate con equazioni del tipo (21), sia un'applicabilità proiettiva ([2], Nota V, n. 5).

Per l'intorno del 3° ordine (del punto $u^1 = u^2 = 0$) — al quale limiteremo le nostre considerazioni per ragioni di semplicità — supponendo $x^\alpha(0, 0) = 0$, si ha infatti:

$$(35)\qquad x^\alpha(u^1, u^2) = \mu^\alpha_{(r)} u^r + \frac{1}{2} \nu^\alpha_{(rs)} u^r u^s + \frac{1}{3!} \nu^\alpha_{(rst)} u^r u^s u^t + \dots,$$

ove $\mu^\alpha_{(r)}$, $\nu^\alpha_{(rs)}$, $\nu^\alpha_{(rst)}$ sono vettori che già abbiamo considerato ([16]).

Se si tiene conto della (21) e delle relazioni (22), (24) stabilite precedentemente, la (35) si scrive:

$$(36)\qquad x^\alpha = \mu^\alpha_{(r)} u^r + \frac{1}{2} [\lambda^h_1 \mu^\alpha_{(h)} (u^1)^2 + 2\mu^\alpha_{(3)} u^1 u^2 + \lambda^h_2 \mu^\alpha_{(h)} (u^2)^2] +$$

$$+ \frac{1}{3!} \{ [(\partial_1 \lambda^h_1 + \lambda^1_1 \lambda^h_1) (u^1)^3 + (2B^h_{112} + 3(\partial_2 \lambda^h_1 + \lambda^2_1 \lambda^h_2)) (u^1)^2 u^2 +$$

$$+ (2B^h_{221} + 3(\partial_2 \lambda^h + \lambda^1_2 \lambda^h_2)) u^1 (u^2)^2 + (\partial_2 \lambda^h_2 + \lambda^2_2 \lambda^h_2) (u^2)^3] \mu^\alpha_{(h)} +$$

$$+ [\lambda^2_1 (u^1)^3 + (2B^3_{112} + 3\lambda^1_1) (u^1)^2 u^2 + (2B^3_{221} + 3\lambda^2_2) u^1 (u^2)^2 + \lambda^1_2 (u^2)^3] \mu^\alpha_{(3)} \} + \dots$$

$$(h = 1, 2).$$

([16]) Per lo sviluppo (35) rimandiamo ai risultati del lavoro [8], nn. 2, 3, 8.

Per introdurre direttamente la (35) si può procedere come segue: si ricorra a coordinate y^α (normali) con la relazione ([7], p. 58):

$$(a)\qquad x^\alpha = y^\alpha - \frac{1}{2} (\Gamma^\alpha_{\beta\gamma})_0 y^\beta y^\gamma - \frac{1}{3!} (\Gamma^\alpha_{\beta\gamma\varepsilon}) y^\beta y^\gamma y^\varepsilon \dots$$

e poi si imponga alla (a) di essere identicamente verificata allorchè si pone

$$x^\alpha = \partial_r x^\alpha u^r + \frac{1}{2} \partial_{rs} x^\alpha u^r u^s + \frac{1}{3!} \partial_{rst} x^\alpha u^r u^s u^t + \dots$$

ed alle y^a si attribuiscono espressioni del tipo:

$$y^\alpha = m^\alpha_r u^r + m^\alpha_{rs} u^r x^s + m^\alpha_{rst} u^r u^s u^t + \dots.$$

Si ottiene così:

$$m^\alpha_r = \mu^\alpha_{(r)}, \quad m^\alpha_{rs} = \nu^\alpha_{(rs)}, \quad m^\alpha_{rst} = \nu^\alpha_{(rst)}, \dots.$$

Le x^α, adottando lo sviluppo (35), si riducono nient'altro che alle y^α ossia a coordinate normali.

Ponendo

$$x^\alpha(u^1,\ u^2) = p^k \mu^\alpha_{(k)} \qquad (k = 1,\ 2,\ 3),$$

si hanno gli sviluppi seguenti [17]:

$$p^h = u^h + \frac{1}{2}\left[\lambda^h_1(u^1)^2 + \lambda^h_2(u^2)^2\right] + \frac{1}{3!}\left\{(\partial_1\lambda^h_1 + \lambda^1_1\lambda^h_1)(u^1)^3 + \left[2B^h_{112} + 3(\partial_2\lambda^h_1 + \lambda^2_1\lambda^h_2)\right](u^1)^2u^2 + \right.$$

$$\left. + \left[2B^h_{221} + 3(\partial_2\lambda^h_2 + \lambda^1_2\lambda^h_2)\right]u^1(u^2)^2 + (\partial_2\lambda^h_2 + \lambda^2_2\lambda^h_2)(u^2)^3\right\} + \dots \qquad (h = 1,\ 2),$$

$$p^3 = u^1u^2 + \frac{1}{3!}\left[\lambda^2_1(u^1)^3 + (2B^3_{112} + 3\lambda^1_1)(u^1)^2u^2 + (2B^3_{221} + 3\lambda^2_2)u^1(u^2)^2 + \lambda^1_2(u^2)^3\right] + \dots$$

nei quali interviene, a partire dai termini del 3° ordine, la *curvatura* di A_n [17].

Passando a considerare un generico vettore $\xi^\alpha(u^1,\ u^2)$, possiamo utilizzare per esso un'espressione del tipo seguente:

$$\xi^\alpha = f^k \mu^\alpha_{(k)} \qquad (k = 1,\ 2,\ 3)\,, \tag{37}$$

supponendo, come si è già fatto, che sia ancora $\mu^\alpha_{(3)} = \nu^\alpha_{(12)}$: è allora possibile ottenere la rappresentazione di giaciture con coordinate locali f^k.

Occupiamoci, ad es., della giacitura osculatrice alla curva di equazioni:

$$u^h = u^h(t):$$

posto: $\lambda^h = \dfrac{\mathrm{d}u^h}{\mathrm{d}t}$ e detto ξ^α un vettore generico della giacitura in questione, deve essere:

$$\left(\xi^\alpha,\ \mu^\alpha_{(h)}\lambda^h,\ \nu^\alpha_{(rs)}\lambda^r\lambda^s + \mu^\alpha_{(h)}\frac{\mathrm{d}\lambda^h}{\mathrm{d}t}\right) = 0 \qquad (h,\ r,\ s = 1,\ 2)\,. \tag{38}$$

Tenuto conto della (37) e delle (21), dalla (38) segue l'equazione:

$$g_k f^k = 0 \tag{39}$$

---

(17) Nel caso interessassero termini degli ordini superiori al 3°, si dovrebbe ricorrere ai vettori delle giaciture k-osculatrici con $k > 3$: a tale scopo sarebbero da tener presente la (16') di [8] e le sue conseguenze, nonchè le condizioni di integrabilità (29).

con

$$(39') \qquad \begin{cases} g_1 = 2\lambda^1 (\lambda^2)^2 \\ g_2 = -2(\lambda^1)^2 \lambda^2 \\ g_3 = \lambda^2_1 (\lambda^1)^3 - \lambda^1_1 (\lambda^1)^2 \lambda^2 + \lambda^2_2 \lambda^1 (\lambda^2)^2 - \lambda^1_2 (\lambda^2)^3 + \lambda^1 \dfrac{d\lambda^2}{dt} - \lambda^2 \dfrac{d\lambda^1}{dt} . \end{cases}$$

Le g_k aventi le espressioni precedenti sono interpretabili come coordinate omogenee della giacitura osculatrice individuata da λ^h e $\dfrac{d\lambda^h}{dt}$.

Una prima applicazione delle (39′) si può avere con la ricerca dell'inviluppo delle 2-giaciture osculatrici alle pangeodetiche uscenti da un punto prefissato. Posto

$$(t = u^1), \qquad \lambda^1 = 1, \qquad \lambda^2 = \lambda\ (= v'), \qquad \frac{d\lambda^2}{dt} = v''$$

ed eliminando v', v'' tra le (39′) e la (34′), si ottiene:

$$(40) \qquad 2[\lambda^2_1(g_2)^3 - \lambda^1\, g\text{-})^3]\,[\lambda^2_1(g_2)^3 + \lambda^1_1(g_2)^2 g_1 + \lambda^2_2 g_2 (g_1)^2 + \lambda^1_2 (g_1)^3 - 2 g_1 g_2 g_3] -$$

$$- \partial_1 \lambda^2_1 (g_2)^5 g_1 + 2\partial_2 \lambda^2_1 (g_2)^4 (g_1)^2 - 2\partial_1 \lambda^1_2 (g_2)^2 (g_1)^4 + \partial_2 \lambda^1_2 g_2 (g_1)^5,$$

ossia l'equazione dell'analogo del cono di SEGRE.

Quanto è noto per il caso ordinario, si può ripetere a proposito dell'inviluppo ora trovato.

Con criteri analoghi si può ottenere l'equazione differenziale delle curve con 2-giacitura osculatrice stazionaria: basta supporre ξ^α vettore tangente ($\xi^\alpha = dx^\alpha/dt$) e sviluppare la condizione [18]:

$$\left(\xi^\alpha, \quad \frac{D\xi^\alpha}{dt}, \qquad \frac{D^2\xi^\alpha}{dt^2}\right) = 0;$$

di tali curve non ci occuperemo qui dettagliatamente.

---

[18] Qualche cenno sulla nozione di 2-giacitura osculatrice stazionaria trovasi già in [8].

7. - Direzioni assiali.

Anzichè riferire alle sue asintotiche la superficie V_2 (considerata in A_3), supponiamo che u^1, u^2 siano parametri su linee generiche; la superficie è allora soluzione delle equazioni seguenti [19]:

$$\left\{\begin{aligned} \nu^\alpha_{(11)} &= M_1\nu^\alpha_{(12)} + \lambda^h_1\mu^\alpha_{(h)} \\ \nu^\alpha_{(22)} &= M_2\nu^\alpha_{(12)} + \lambda^h_2\mu^\alpha_{(h)} \end{aligned}\right. \qquad (h = 1,\ 2)\,. \tag{41}$$

Introduciamo un « riferimento locale » utilizzando linee coordinate tangenti ai vettori $\mu^\alpha_{(h)}$ e $\mu^\alpha_{(3)} = \nu^\alpha_{(12)}$.

Sia associato al punto x^α un vettore δx^α (non tangente alla superficie), ossia una congruenza di direzioni (alla V_2 considerata).

Per avere l'equazione delle curve del sistema assiale determinato dalla congruenza assegnata, ossia delle *autoparallele della connessione* subordinata, nella V_2, da quella assegnata in A_3 (tramite i vettori δx^α), occorre utilizzare la relazione:

$$\left(\delta x^\alpha,\ \xi^\alpha,\ \frac{\mathrm{D}\xi^\alpha}{\mathrm{d}t}\right) = 0 \qquad \left(\xi^\alpha = \frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}t}\right). \tag{42}$$

Fatte le posizioni

$$\delta x^\alpha = A^h\mu^\alpha_{(h)} + \nu^\alpha_{(12)}\,,$$

$$P = M_1\left(\frac{\mathrm{d}u^1}{\mathrm{d}t}\right)^2 + 2\,\frac{\mathrm{d}u^1}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathrm{d}u^2}{\mathrm{d}t} + M_2\left(\frac{\mathrm{d}u^2}{\mathrm{d}t}\right)^2,$$

$$Q^h = \lambda^h_r\left(\frac{\mathrm{d}u^r}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \frac{\mathrm{d}^2u^r}{\mathrm{d}t^2}\,,$$

la (42) si scrive:

$$\left(A^h\mu^\alpha_{(h)} + \nu^\alpha_{(12)},\qquad \mu^\alpha_{(h)}\,\frac{\mathrm{d}u^h}{\mathrm{d}t}\,,\qquad Q^h\mu^\alpha_{(h)} + P\nu^\alpha_{(12)}\right) = 0,$$

---

(19) Cfr. [8], n. 7.

ossia

$$(42') \qquad \left[P\left(A^2\frac{du^1}{dt}-A^1\frac{du^2}{dt}\right)+Q^1\frac{du^2}{dt}-Q^2\frac{du^1}{dt}\right](\mu^\alpha_{(1)},\ \mu^\alpha_{(2)},\ \mu^\alpha_{(3)})=0\,.$$

Per le autoparallele cercate segue quindi l'equazione:

$$(43) \qquad P\left(A^2\frac{du^1}{dt}-A^1\frac{du^2}{dt}\right)+Q^1\frac{du^2}{dt}-Q^2\frac{du^1}{dt}=0\,.$$

Consideriamo ora un'altra superficie $\overline{V}_2$ a cui sia associata una congruenza di direzioni $\delta\overline{x}^\alpha$ (non tangenti) e supponiamo che sia data una corrispondenza puntuale T tra le due superfici.

Supponiamo di aver scelto linee coordinate in modo che la T si abbia per valori uguali dei parametri.

Le autoparallele della connessione della $\overline{V}_2$ (subordinata tramite $\delta\overline{x}^\alpha$), avranno un'equazione analoga alla (43):

$$(43') \qquad \overline{P}\left(\overline{A}^2\frac{du^1}{dt}-\overline{A}^1\frac{du^2}{dt}\right)+\overline{Q}^1\frac{du^2}{dt}-\overline{Q}^2\frac{du^1}{dt}=0\,.$$

Dal confronto delle (43), (43') si ricava (eliminando le derivate 2^e):

$$(44) \qquad (PA^2-\overline{P}\,\overline{A}^2)\frac{du^1}{dt}-(PA^1-\overline{P}\,\overline{A}^1)\frac{du^2}{dt}+$$
$$+(\lambda^1_h-\overline{\lambda}^1_h)\left(\frac{du^h}{dt}\right)^2\frac{du^2}{dt}-(\lambda^2_h-\overline{\lambda}^2_h)\left(\frac{du^h}{dt}\right)^2\frac{du^1}{dt}=0\,.$$

Interpretando la (44) si ha quindi, in generale, che: *per ogni punto x^α della superficie V_2 esistono tre direzioni tali che gli E_2 di autoparallele (della connessione subordinata tramite la congruenza data) tangenti a ciascuna di esse, sono trasformati dalla T in altrettanti $\overline{E}_2$ di autoparallele (della connessione subordinata sulla $\overline{V}_2$).*

Le direzioni in questione le chiameremo *direzioni assiali* per analogia con il caso di coppie di superficie di uno spazio S_3 proiettivo [9] ([20]).

Quando le direzioni assiali sono indeterminate, la T, come facilmente si riconosce, è un'applicabilità proiettiva; si giunge così alla formulazione seguente

---

([20]) È così ovvio che i risultati di [9] si possono immediatamente estendere al caso degli spazi A_3.

dell'enunciato di un risultato acquisito sotto forma differente (²¹): *le applicabilità proiettive (tra superficie di A_3) sono quelle corrispondenze (asintotiche) che alle autoparallele della connessione subordinata su una delle due superficie, fanno corrispondere autoparallele di una connessione subordinata sull'altra.*

8. - Giaciture osculatrici stazionarie. Osservazioni conclusive.

Si potrebbe ora procedere all'estensione, alle superficie V_2 degli spazi A_3 (a connessione) e più generalmente a V_2 degli spazi proiettivi curvi, di altre questioni che si presentano nel caso di spazi proiettivi ordinari.

Sempre considerando coppie di superficie in corrispondenza puntuale T (non asintotica), si potrebbe procedere alla ricerca dell'inviluppo $\sum$ della 2-giaciture osculatrici stazionarie (in x^α) a cui corrispondono, per effetto della T, ancora giaciture osculatrici stazionarie.

Con sviluppi analitici un po' laboriosi (fondati sulle (41)), ma per i quali non si hanno particolari difficoltà e che quindi non riteniamo il caso di riportare, si trova che: *$\sum$ è un cono-inviluppo di classe* 8 *con la particolarità di contenere la giacitura tangente con molteplicità* 6 *e di avere con essa quattro direzioni in comune di cui due coincidenti con le direzioni asintotiche* (²²).

Ed inoltre (come conseguenza di ciò che precede): *tangenzialmente ad ogni direzione (della giacitura tangente in x^α), si hanno due E_3 a giacitura osculatrice stazionaria che si conservano tali (cioè con giacitura osculatrice ancora stazionaria) per effetto della T.*

Nel caso in cui T è asintotica, si ha l'estensione di risultati noti in S_3, in quanto *il cono $\sum$ si spezza, dando luogo alle giaciture di due fasci (i cui assi sono le direzioni asintotiche) e ad un cono-inviluppo $\sum^*$ della* 6a. *classe*: *$\sum^*$ è l'analogo del cono considerato da Čech nel caso dello spazio proiettivo S_3 e le* 3 *direzioni di contatto di $\sum^*$ con la giacitura tangente (che ha molteplicità* 5) *sono l'analogo delle direzioni di Čech* (²³).

Tra le altre questioni che facilmente si possono studiare e che si collegano a quelle trattate nel n. precedente, figurano poi le nozioni (con le relative conseguenze) di *direzioni t-assiali* che sono l'analogo, per il caso delle V_m di A_n, delle direzioni assiali relative a coppie di V_2 di A_3: ma su queste e su altre questioni direttamente collegate a quanto precede, non intendiamo qui soffermarci.

(²¹) Si veda la Nota V, n. **5** di [**2**].

(²²) Nel caso di un S_3 proiettivo ha interesse particolare notare che: le quattro direzioni formano un gruppo armonico.

(²³) Si veda [**10**], pag. 201 e segg. .

Bibliografia.

[1] G. Bol: *Projective Differentialgeometrie.* Vol. II, Göttingen 1954.

[2] E. Bompiani: *Topologia differenziale.* Rend. Accad. Lincei (8) **8**, Fascicoli 1, 2, 3, 4 (1950). Note: I, II (pp. 3-15); III (pp. 83-86); IV (pp. 169-175) e V (pp. 271-276).

[3] — —: *Proprietà d'immersione di una varietà in uno spazio di Riemann,* Rend. Sem. Mat. Fis., Milano **22** (1951).

[4] E. Bortolotti: *Sistemi assiali e connessioni nelle* V_m. Rend. Accad. Lincei (6) **5** (1927), 390-395.

[5] E. Cartan: *Théorie des espaces à connexion projective.* Paris 1937.

[6] L. P. Eisenhart: *Riemannian Geometry.* Princeton 1949.

[7] — —: *Non-Riemannian Geometry.* Am. Math. Soc., Coll. Publ., vol. VIII, New York 1927.

[8] F. Fava: *Geometria delle* V_m *in uno spazio proiettivo curvo,* Boll. Un. Mat. Ital. (3) **16** (1961), 124-144.

[9] — —: *Sul comportamento di elementi curvilinei assiali in relazione a trasformazioni puntuali.* Atti Acc. Sc. Torino **91** (1956-57).

[10] G. Fubini et E. Čech: *Géométrie projective différentielle.* Paris 1931.

* * *