Riv. Mat. Univ. Parma (2) 3 (1962), 139-168

GIUSEPPE VACCARO (*)

Sulle superficie d'area minima. (**)

Introduzione.

La proprietà locale che caratterizza le superficie d'area minima è, come ben noto (1), che in ogni punto in cui le tangenti asintotiche sono determinate esse risultano ortogonali: in altri termini ogni calotta del 2° ordine che non sia inflessionale (o piana, cioè a tangenti asintotiche indeterminate) e che abbia direzioni asintotiche ortogonali appartiene ad una superficie d'area minima, o, come diremo per brevità, è d'area minima, e viceversa.

Si pone subito il problema di trovare proprietà geometriche atte a caratterizzare le calotte d'area minima d'ordine >2 e tali da permettere la loro *costruzione effettiva* in termini finiti.

Del resto la proprietà su ricordata riguardante le tangenti asintotiche, caratterizza l'intorno del 2° ordine di un punto P di una superficie d'area minima nella condizione più generale, quella cioè che le tangenti asintotiche in P siano determinate e distinte, ma se esse sono indeterminate, quale proprietà va sostituita a quella per definire l'intorno (del 3° ordine almeno) di P? Più in generale quali proprietà geometriche caratterizzano una calotta σ^s d'ordine s con la calotta $\sigma^{s-k}(s>k)$ inflessionale perchè essa sia d'area minima?

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università, Roma, Italia.

(**) Ricevuto il 14-IV-1962.

Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del Gruppo di ricerca n. 1 del C.N.R., per l'anno 1961-62.

(1) Cfr. per es. L. BIANCHI, *Lezioni di Geometria Differenziale*, Vol. I, Parte II, Zanichelli, Bologna 1927, pag. 531 e segg. — D. STRUIK, *Differential Geometry*, Addison-Wesley Press, Cambridge, 1950, pag. 183. — L. P. EISENHART, *An Introduction to Differential Geometry*, Princeton University Press, Princeton 1947, pag. 288 e segg..

Allo studio delle calotte d'ordine s con $s \leqslant 5$ d'area minima, sia nel caso che la loro σ^2 sia regolare (a tangenti asintotiche distinte), sia nel caso che la loro σ^2 o in generale la loro $\sigma^{s-k}(s \leqslant 5,\ k < s)$ sia inflessionale, è dedicata la prima parte del presente lavoro, dove di ogni calotta determinata, dopo averne data l'equazione canonica, vien data una effettiva costruzione in termini finiti, assegnando in ogni caso il sistema lineare delle superficie algebriche d'ordine minimo che la contengono.

Qui pur non potendo entrare nei particolari di tali costruzioni, mi sembra interessante mettere in evidenza un fatto geometrico che non credo sia stato finora osservato.

Come per la costruzione di una calotta del 2° ordine d'area minima, riveste un ruolo essenziale la considerazione delle tangenti asintotiche che per essere ortogonali possono pensarsi come le diagonali di un quadrato, così per la costruzione delle calotte σ^3 d'area minima rivestono particolare importanza tre tangenti uscenti dal loro centro O che si possono pensare come le diagonali di un esagono regolare di centro O; analogamente per la costruzione di una σ^4 d'area minima si pone in evidenza una quaterna di tangenti che sono le diagonali di un ottagono regolare, ed infine per la costruzione di una σ^5 d'area minima, una quintupla di tangenti che sono le diagonali di un decagono regolare.

Non sembra azzardata la congettura che per la costruzione di una σ^n d'area minima con n qualunque bisognerà considerare le diagonali per il centro di un $2n$-gono regolare.

La considerazione di gruppi di tangenti formanti la totalità delle diagonali di opportuni poligoni regolari si ripresenta nella caratterizzazione delle calotte σ^s d'ordine s $(s \leqslant 5)$ d'area minima con σ^{s-k} inflessionale. In particolare se $k = 1$, cioè per le σ^s con σ^{s-1} piana si dimostra il seguente teorema generale:

Condizione necessaria e sufficiente perchè una calotta d'ordine s, σ^s, con σ^{s-1} piana, di centro O, sia d'area minima è che le s tangenti asintotiche [tangenti $(s+1)$-punte] formino le diagonali di un $2s$-gono regolare di centro O; quindi il loro insieme è mutato in sè da una proiettività ciclica d'ordine $2s$.

* * *

La parte II del presente lavoro, giovandosi di risultati esposti nella parte precedente, è diretta allo studio di calotte infinitamente vicine di una superficie d'area minima ed al trasporto su queste di elementi differenziali d'ordine superiore.

Si parta dal fatto (risultante dalla parte I) che due calotte σ^2, $\overline{\sigma}^2$ d'area minima possono ottenersi l'una dall'altra mediante un movimento del triedro principale (normale e tangenti asintotiche) seguito (o preceduto) da una dilatazione lungo la normale principale.

Se O, $\overline{O}$ sono due punti infinitamente vicini di una superficie d'area minima, determinato il movimento infinitesimo che porta il triedro R (della normale e delle tangenti asintotiche) in O nell'analogo triedro $\overline{R}$ relativo ad $\overline{O}$, mediante esso è possibile, noto lo sviluppo canonico della superficie nell'intorno di O, ottenere lo sviluppo canonico della stessa superficie nell'intorno di $\overline{O}$.

Siano allora σ^3 e $\overline{\sigma}^3$ le due calotte del 3° ordine di una stessa superficie d'area minima, di centri rispettivi O ed $\overline{O}$ e diciamo π e $\overline{\pi}$ i piani ad esse tangenti nei rispettivi centri.

Nella classe di tutte le trasformazioni puntuali che mutano σ^3 in $\overline{\sigma}^3$ e π in $\overline{\pi}$, si consideri la sottoclasse di quelle trasformazioni che operano come l'identità nell'intorno del 1° ordine dei punti O, $\overline{O}$ e che hanno la terna delle direzioni caratteristiche uscenti da O ed $\overline{O}$ ed appartenenti rispettivamente ai piani π, $\overline{\pi}$, apolare alla coppia delle tangenti asintotiche.

Tutte queste trasformazioni risultano definite fino all'intorno del 2° ordine incluso dei punti O, $\overline{O}$.

Detta T una di queste trasformazioni, si considerino le ∞^2 trasformazioni quadratiche fra i piani π, $\overline{\pi}$ e che osculano la T fino all'intorno del 2° ordine incluso dei punti O, $\overline{O}$ di tali piani (²).

Queste trasformazioni quadratiche permettono di definire un *trasporto* di elementi curvilinei del 3° ordine da O ad $\overline{O}$ sulla superficie d'area minima (e quindi per integrazione lungo un arco di curva assegnata congiungente due punti, il trasporto da uno ad altro punto). Infatti detta T_2 una di queste trasformazioni quadratiche (che è possibile determinare intrinsecamente ed in più modi), dato un $\tilde{E}^3 \in \sigma^3$ di centro O, si consideri la sua proiezione ortogonale E^3 sul piano tangente π; quindi si determini l'elemento $\overline{E}^3 = T_2 E^3$ di centro $\overline{O}$ del piano $\overline{\pi}$, ed a partire da esso l'elemento $\overline{\tilde{E}}^3 \in \overline{\sigma}^3$ che si proietta ortogonalmente sul piano tangente $\overline{\pi}$ in $\overline{E}^3$.

La costruzione di $\overline{\tilde{E}}^3$ a partire da $\tilde{E}^3$ è il *trasporto* di $\tilde{E}^3 \in \sigma^3$ in $\overline{\tilde{E}}^3 \in \overline{\sigma}^3$ con la T_2 scelta. Si dimostra che in realtà alla trasformazione quadratica T_2 può sostituirsi una qualsiasi trasformazione algebrica [2,2] appartenente ad un particolare sistema lineare ∞^3 di trasformazioni algebriche [2,2] che approssimano quella fino all'intorno del 2° ordine incluso.

È opportuno osservare che una volta scelta la T che muta la σ^3 in $\overline{\sigma}^3$ *è necessario* passare ad una T_2 per poter definire il trasporto di $\tilde{E}^3$, giacchè la T opera sull'intorno del 2° ordine (non del 3°) di O sul piano ivi tangente a σ^3.

(²) Cfr. E. Bompiani, *Sulle trasformazioni puntuali fra piani proiettivi*, Memorie Acc. d'Italia, (6) **12** (1942).

M. Villa, *Trasformazioni quadratiche osculatrici ad una corrispondenza puntuale fra piani proiettivi*, Rend. Acc. d'Italia, (7) **3** (1942).

PARTE I.

Calotte di superficie d'area minima.

1. - Condizioni differenziali per le superficie d'area minima.

In uno spazio euclideo e con un riferimento ortogonale monometrico che attribuisca ad un punto le coordinate x, y, z, sia

$$z = f(x, y) \tag{1.1}$$

l'equazione di una superficie d'area minima.

Posto

$$z_{h,k} = \frac{\partial^{h+k} f}{\partial x^h \, \partial y^k}, \tag{1.2}$$

come è ben noto la superficie essendo d'area minima soddisfa all' equazione a derivate parziali:

$$H \equiv (1 + z_{0,1}^2)\, z_{2,0} - 2 z_{1,0}\, z_{0,1}\, z_{1,1} + (1 + z_{1,0}^2)\, z_{0,2} = 0 \quad (^3), \tag{1.3}$$

e alle sue conseguenze differenziali che scriveremo brevemente:

$$H_{h,k} \equiv \frac{\partial^{h+k} H}{\partial x^h \, \partial y^k} = 0\,. \tag{1.4}$$

Poichè ci occorreranno nel seguito, procuriamoci l'espressione esplicita delle precedenti $H_{h,k}$ per i primi valori di h, k $(h + k \leqslant 2)$.

---

(3) Cfr. per es. L. BIANCHI, op. cit. in (1), pag. 532.

Si ha:

$$H_{1,0} = 2z_{1,0}\,(z_{2,0}\,z_{0,2} + z^2_{1,1}) + (1 + z^2_{0,1})\,z_{3,0} - 2z_{1,0}\,z_{0,1}\,z_{2,1} + (1 + z^2_{1,0})\,z_{1,2} = 0\,,$$

$$H_{0,1} = 2z_{0,1}\,(z_{2,0}\,z_{0,2} + z^2_{1,1}) + (1 + z^2_{0,1})\,z_{2,1} - 2z_{1,0}\,z_{0,1}\,z_{1,2} + (1 + z^2_{1,0})\,z_{0,3} = 0\,,$$

$$H_{2,0} = 2z_{2,0}\,(z_{2,0}\,z_{0,2} + z^2_{1,1}) + 2(z_{1,0}\,z_{0,2} + z_{0,1}\,z_{1,1})\,z_{3,0} - 2(3z_{1,0}\,z_{1,1} + z_{0,1}\,z_{1,2})\,z_{2,1} +$$
$$+ 4z_{1,0}\,z_{2,0}\,z_{1,2} + (1 + z^2_{0,1})\,z_{4,0} - 2z_{1,0}\,z_{0,1}\,z_{3,1} + (1 + z^2_{1,0})\,z_{2,2} = 0\,,$$

$$H_{1,1} = 2z_{1,1}(z_{2,0}\,z_{0,2} + z^2_{1,1}) + 2(z_{0,1}\,z_{0,2}\,z_{3,0} + z_{1,0}\,z_{2,0}\,z_{0,3}) - 2z_{1,1}(z_{0,1}\,z_{2,1} + z_{1,0}\,z_{1,2}) +$$
$$+ (1 + z^2_{0,1})\,z_{3,1} - 2z_{1,0}\,z_{0,1}\,z_{2,2} + (1 + z^2_{1,0})\,z_{1,3} = 0\,,$$

$$H_{0,2} = 2z_{0,2}(z_{2,0}\,z_{0,2} - z^2_{1,1}) + 4z_{0,1}\,z_{0,2}\,z_{2,1} - 2(3z_{0,1}\,z_{1,1} + z_{1,0}\,z_{0,2})\,z_{1,2} +$$
$$+ 2(z_{0,1}\,z_{2,0} + z_{1,0}\,z_{1,1})\,z_{0,3} + (1 + z^2_{0,1})\,z_{2,2} - 2z_{1,0}\,z_{0,1}\,z_{1,3} + (1 + z^2_{1,0})\,z_{0,4} = 0.$$

2. - Forme canoniche per le σ^s regolari d'area minima ($s \leqslant 5$).

Chiameremo per brevità calotte σ^s, d'ordine s, d'area minima, le calotte σ^s appartenenti ad una superficie d'area minima.

Consideriamo una calotta regolare del 2° ordine σ^2 d'area minima, cioè con tangenti asintotiche determinate e distinte. Assunto il suo centro come punto O (0, 0, 0) ed il piano ivi tangente come $z = 0$, le (1.2) dànno in O: $z_{1,0} = z_{0,1} = 0$.

In questa ipotesi, sempre in O la (1.3) porta:

$$z_{2,0} + z_{0,2} = 0\,, \tag{2.1}$$

e quindi l'equazione delle tangenti asintotiche alla σ^2 in O è:

$$z_{2,0}\,(x^2 - y^2) + 2z_{1,1}\,x\,y = 0\,, \tag{2.2}$$

dove $z_{2,0}$ e $z_{1,1}$ s'intendono calcolate in O.

Se la (2.2) *non* è una identità, cioè se la σ^2 non è piana, prendendo come asse x una delle tangenti asintotiche risulta in O:

$$z_{2,0} = z_{0,2} = 0\,, \tag{2.3}$$

e l'altra tangente asintotica è data dall'asse y, cioè le due tangenti asintotiche sono ortogonali: condizione notissima che soddisfatta in ogni punto d'una superficie caratterizza questa come d'area minima.

Il triedro di riferimento in O formato dalla normale e dalle tangenti asintotiche a σ^2, e che diremo per brevità *triedro principale*, risulta determinato, e poichè $z_{1,1} \neq 0$, si può determinare il punto unità (in modo unico) così che risulti in O:

$$z_{1,1} = 1 , \tag{2.4}$$

cioè in definitiva per la σ^2 d'area minima si ha la rappresentazione:

$$z = x y + [3] , \tag{2.5}$$

dove [3] indica termini d'ordine $\geqslant 3$ in x, y, e quindi:

Una calotta del 2° ordine σ^2 d'area minima, riferita al triedro principale della normale e delle tangenti asintotiche nel suo centro e con scelta opportuna del punto unità, può scriversi sempre nella forma canonica $z = x y + [3]$.

Dalla precedente segue l'osservazione seguente.

Siano date due calotte del 2° ordine d'area minima σ^2 e $\bar{\sigma}^2$ di centri rispettivi O e $\bar{O}$, ciascuna riferita al proprio triedro principale, ed il punto unità in ciascun riferimento sia scelto in modo tale che per le due calotte si abbia la rappresentazione

$$\sigma^2 : \quad z = x y + [3], \qquad \qquad \bar{\sigma}^2 : \quad \bar{z} = \bar{x} \bar{y} + [3].$$

Il movimento che porta il triedro principale in O nell'analogo triedro in $\bar{O}$, trasforma la σ^2 nella $\tilde{\sigma}^2$: $\bar{z} = a \bar{x} \bar{y} + [3]$, e quindi con una dilatazione lungo la normale principale la $\tilde{\sigma}^2$ si muta nella $\bar{\sigma}^2$. Si ha quindi:

Due calotte σ^2 e $\bar{\sigma}^2$ d'area minima possono ottenersi l'una dall'altra con un movimento del triedro principale (normale e tangenti asintotiche) seguito (o preceduto) da una dilatazione lungo la normale principale.

Fissato il riferimento in O, consideriamo ora una calotta d'area minima d'ordine > 2 e centro O.

Vediamo il significato geometrico delle condizioni (1.4).

Le condizioni $H_{1,0} = H_{0,1} = 0$, dànno in O, a causa delle (2.3) e (2.4),

$$z_{3,0} + z_{1,2} = 0, \qquad \qquad z_{2,1} + z_{0,3} = 0 , \tag{2.6}$$

e quindi ponendo:

$$z_{3,0} = 6\,b\,, \qquad z_{0,3} = 6\,c\,, \tag{2.7}$$

si ha che la calotta del 3° ordine d'area minima, σ^3, è rappresentata da

$$z = x\,y + b\,(x^3 - 3\,x\,y^2) + c\,(y^3 - 3\,x^2\,y) + [4]\,, \tag{2.8}$$

ed i coefficienti b, c (essendo il riferimento determinato) sono invarianti della σ^3. Quindi:

Una calotta del 3° ordine, σ^3, d'area minima, riferita al triedro principale nel suo centro, può scriversi sempre nella forma (2.8) *in cui b, c sono invarianti della σ^3.*

Le condizioni $H_{2,0} = H_{1,1} = H_{0,2} = 0$, tenendo sempre presenti le (2.3) e (2.4), dànno in O:

$$z_{4,0} + z_{2,2} = 0, \qquad z_{3,1} + z_{1,3} = 2, \qquad z_{2,2} + z_{0,4} = 0\,. \tag{2.9}$$

Ponendo quindi:

$$z_{3,1} = 1 + 6\,h, \qquad z_{1,3} = 1 - 6\,h\,, \tag{2.10}$$

si ha che *la calotta del 4° ordine σ^4 di centro O d'area minima è rappresentata da*

$$\begin{aligned} z = x\,y + b\,(x^3 - 3\,x\,y^2) + c\,(y^3 - 3\,x^2\,y) + e\,(x^4 - 6\,x^2\,y^2 + y^4) + \\ + \frac{1}{6}\,x\,y\,(x^2 + y^2) + h\,x\,y\,(x^2 - y^2) + [5]\,, \end{aligned} \tag{2.11}$$

avendo omesso nei termini moltiplicati per e ed h il fattore numerico, e dove e, h sono invarianti di σ^4.

Con calcoli evidenti si vede poi che le condizioni $H_{3,0} = H_{2,1} = H_{1,2} = H_{0,3} = 0$ dànno in O, tenendo ancora presenti le (2.3), (2.4),

$$\begin{aligned} z_{5,0} + z_{3,2} &= 0, \qquad & z_{2,3} + z_{0,5} &= 0\,, \\ z_{4,1} + z_{2,3} &= 8\,z_{2,1}, \qquad & z_{1,4} + z_{3,2} &= 8\,z_{1,2}\,. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Da queste, posto:

$$z_{4,1} = 4\, z_{2,1} + 5!\, n\,, \qquad z_{1,4} = 4\, z_{1,2} + 5!\, m\,, \tag{2.13}$$

con m, n arbitrari, si ricava:

$$z_{2,3} = 4\, z_{2,1} - 5!\, n\,, \qquad z_{3,2} = 4\, z_{1,2} - 5!\, m\,,$$

$$z_{0,5} = -4\, z_{2,1} + 5!\, n\,, \qquad z_{5,0} = -4\, z_{1,2} + 5!\, m\,,$$

e, ricordando le (2.7), si ricava per i termini del 5° ordine in σ^5:

$$\frac{1}{5}\left\{ b\,(x^5 - 10\, x^3 y^2 - 5\, x\, y^4) + c\,(y^5 - 10\, x^2 y^3 - 5\, x^4 y)\right\} + \tag{2.14}$$
$$+ m\,(x^5 - 10\, x^3 y^2 + 5\, x\, y^4) + n\,(y^5 - 10\, x^2 y^3 + 5\, x^4 y)\,,$$

dove nei termini moltiplicati per m ed n si è omesso il fattore numerico, come è lecito, data l'arbitrarietà di m, n.

Si osservi che il primo gruppo di termini è determinato da σ^3; nè questi nè i rimanenti dipendono dai termini in e, h della calotta σ^4.

3. - Costruzione effettiva di una σ^3 regolare d'area minima.

Prendiamo in esame la σ^3 (2.8) e cerchiamo il significato geometrico degli invarianti b, c.

La sezione della σ^3 con il piano tangente $z = 0$ è data dalla C^3:

$$x\,y + b\,(x^3 - 3\, x\, y^2) + c\,(y^3 - 3\, x^2 y) = 0\,, \qquad z = 0\,; \tag{3.1}$$

i due cerchi osculatori ad essa in O sono:

$$C_1:\ x^2 + y^2 + \frac{1}{c}\, x = 0\,, \qquad C_2:\ x^2 + y^2 + \frac{1}{b}\, y = 0\,, \qquad (z = 0)\,, \tag{3.2}$$

quindi i loro diametri situati sugli assi sono: $OA = -\dfrac{1}{c}$ sull'asse x, $OB = -\dfrac{1}{b}$ sull'asse y. L'intersezione $\neq O$ della C^3 (3.1) con la tangente di curvatura $y = x$ è il punto

$$x = y = \frac{1}{2(b + c)}\,. \tag{3.3}$$

La stessa tangente di curvatura taglia i cerchi C_1 e C_2 rispettivamente nei punti:

$$x = y = -\frac{1}{2c}, \qquad x = y = -\frac{1}{2b},$$

ed il coniugato armonico di O rispetto ad essi è il punto:

$$O_1: \quad x = y = -\frac{1}{b+c}. \tag{3.4}$$

Il simmetrico rispetto ad O del punto medio del segmento OO_1 è il punto (3.3) di C^3.

Analogamente si proceda per l'altra tangente di curvatura: si hanno così due punti di C^3 che insieme ai due cerchi osculatori (3.2) determinano completamente C^3, quindi σ^3 (data σ^2).

Si osservi che *la costruzione assegnata fornisce effettivamente* (*al variare di b, c*) *tutte le σ^3 d'area minima passanti per una σ^2 assegnata* (*non inflessionale*).

Alla costruzione precedente può darsi un aspetto diverso notando che O_1 è il punto d'intersezione della retta $y = x$ con la retta AB, quindi i due punti trovati di C^3 sono i simmetrici dei punti in cui la congiungente i centri dei cerchi C_1 e C_2 taglia le tangenti di curvatura.

La particolarità relativa alle σ^3 d'area minima può descriversi ancora in altro modo.

Notiamo che la σ^2 definisce la quadrica:

$$z = x\,y, \tag{3.5}$$

(che contiene la σ^2, passa per O_3 $(0, 0, 1, 0)$ ed ha ivi per piano tangente il piano improprio) e che questa sega la σ^3 in una curva con tangenti in O definite da

$$b\,x\,(x^2 - 3\,y^2) + c\,y\,(y^2 - 3\,x^2) = 0, \qquad z = 0. \tag{3.6}$$

Le rette definite in $z = 0$ da $x(x^2 - 3y^2) = 0$ sono l'asse y e quelle che formano con esso angoli di $\pm 60°$; analogamente quelle definite da $y(y^2 - 3x^2) = 0$, scambiando l'asse y con l'asse x. Queste due terne di rette definiscono una involuzione.

Si può quindi dire:

Una σ^3 è d'area minima se e solo se la sua intersezione con la quadrica definita dalla $\sigma^2 \subset \sigma^3$ e tangente al piano improprio nel punto improprio della normale a σ^3 nel suo centro, ha per tangenti rette appartenenti all'involuzione definita dalle terne costituite da ciascuna delle tangenti asintotiche e dalle rette formanti con essa angoli di $\pm 60°$.

In altri termini:

Data una σ^2 d'area minima non inflessionale, si costruisca il paraboloide $\overset{*}{F}{}^2$, che la contiene, tangente al piano improprio nel punto improprio della normale a σ^2 nel suo centro. Le σ^3 d'area minima $\supset \sigma^2$ appartengono alla rete di F^3 determinata da: 1) $\overset{*}{F}{}^2$ insieme al piano improprio; 2) e 3) terna dei piani per la normale aventi per tracce sul piano tangente i diametri di un esagono regolare di cui uno appartenga ad una tangente asintotica.

Ogni σ^3 appartiene ad una F^3 della rete e viceversa.

4. - Costruzione effettiva delle σ^4 regolari d'area minima.

Passiamo ora alla caratterizzazione delle σ^4 (2.11).

Per $e = h = 0$ si ha la σ^4:

$$z = x\,y + b\,(x^3 - 3\,x\,y^2) + c\,(y^3 - 3\,x^2\,y) + \frac{1}{6}\,x\,y\,(x^2 + y^2) + [5]\,. \tag{4.1}$$

Questa appartiene, come è subito visto, alla $\overset{*}{F}{}^3$:

$$z\left\{1 - \frac{1}{6}\,(x^2 + y^2)\right\} = x\,y + b\,(x^3 - 3\,x\,y^2) + c\,(y^3 - 3\,x^2\,y)\,, \tag{4.2}$$

la quale è determinata dall'avere il punto O_3 (0, 0, 1, 0) come punto doppio e come cilindro ivi tangente quello che ha per traccia su $z = 0$ la circonferenza $x^2 + y^2 = 6$, e inoltre dal contenere σ^3.

Per avere tutte le σ^4 d'area minima $\supset \sigma^3$ basta considerare pertanto la rete di F^4:

$$z\left\{1 - \frac{1}{6}\,(x^2 + y^2)\right\} = x\,y + b\,(x^3 - 3\,x\,y^2) + c\,(y^3 - 3\,x^2\,y) + \\ + e\,(x^4 - 6\,x^2\,y^2 + y^4) + h\,x\,y\,(x^2 - y^2)\,, \tag{4.3}$$

al variare di e, h, cioè definita da $\overset{*}{F}{}^3$ insieme al piano improprio e dalle due quaterne di piani normali:

$$x\,y\,(x^2 - y^2) = 0\,, \qquad x^4 - 6\,x^2\,y^2 + y^4 = 0\,. \tag{4.4}$$

Riferendosi alle loro tracce su $z = 0$, la prima quaterna è quella delle tangenti asintotiche e di curvatura. Per interpretare la seconda si consideri la retta $y = \sqrt{3}x$ formante con l'asse x un angolo di 60° e le rette formanti con questa gli angoli di 90°, 45°, — 45°, cioè la quaterna di rette che si ottiene dalla precedente rotandola di 60°.

Tale quaterna di rette è rappresentata, come si vede con facili calcoli, dall'equazione

$$\sqrt{3}\,(x^4 - 6\,x^2\,y^2 + y^4) - 4\,(x^2 - y^2)\,x\,y = 0\,, \tag{4.5}$$

essa appartiene quindi al fascio individuato dalle due quaterne precedenti (4.4); sicchè a quelle si può sostituire la quaterna delle tangenti asintotiche e di curvatura e quella che se ne ottiene con una rotazione di 60° (o di — 60°). Si ha quindi la costruzione seguente:

Per avere tutte le σ^4 d'area minima $\supset \sigma^3$ (pure d'area minima e non inflessionale) assegnata si costruisca la $\overset{*}{F}{}^3 \supset \sigma^3$ avente il punto improprio della normale a σ^3 nel suo centro O come doppio e come cilindro ivi tangente quello rotondo di traccia sul piano tangente a σ^3 in O la circonferenza di centro O e raggio $\sqrt{6}$. Questa $\overset{*}{F}{}^3$ ha una σ^4 d'area minima con gli invarianti $e = h = 0$. Ogni altra σ^4 d'area minima $\supset \sigma^3$ appartiene ad una superficie della rete determinata da: 1) *$\overset{*}{F}{}^3$ insieme al piano improprio;* 2) *quaterna dei piani normali per le tangenti asintotiche e di curvatura;* 3) *quaterna di piani ottenuta dalla precedente con rotazione di 60° (o di — 60°) intorno all'asse z.*

5. - Costruzione effettiva delle σ^5 regolari d'area minima.

Abbiamo osservato alla fine del n. 2 che i termini del 5° ordine di una σ^5 d'area minima non dipendono dalla $\sigma^4 \subset \sigma^5$, mentre una parte di essi dipende dalla $\sigma^3 \subset \sigma^5$: vediamo allora di dare una costruzione in termini finiti di tutte le σ^5 d'area minima per una σ^3 anch'essa d'area minima e non inflessionale.

A tale scopo tenendo presente la (2.14) che dà i termini di 5° ordine di una σ^5 d'area minima, cominciamo coll'osservare che l'equazione

$$y\,(y^4 - 10\,x^2\,y^2 + 5\,x^4) = 0 \tag{5.1}$$

definisce in $z = 0$ la tangente asintotica $y = 0$ e quattro rette che formano con essa rispettivamene gli angoli di 36°, 72°, 108°, 144°; esse sono le rette che da O proiettano i vertici di un decagono regolare di centro O avente due vertici su $y = 0$.

Analogamente l'equazione

$$x\,(x^4 - 10\,x^2\,y^2 + 5\,y^4) = 0 \tag{5.2}$$

definisce su $z = 0$ i diametri di un decagono regolare dei quali uno sia $x = 0$.

Ne segue che non appena si sia costruita una F^5 la cui σ^5 in O sia d'area minima (e contenga la σ^3 data) sarà possibile costruire *ogni* σ^5 d'area minima per quella σ^3.

Cerchiamo quindi di costruire una superficie algebrica contenente la σ^5:

$$\begin{aligned} z = x\,y + b\,x\,(x^2 - 3\,y^2) + c\,y\,(y^2 - 3\,x^2) + \frac{1}{6}\,x\,y\,(x^2 + y^2) + \\ + \frac{1}{5}\left\{ b\,x\,(x^4 - 10\,x^2\,y^2 - 5\,y^4) + c\,y\,(y^4 - 10\,x^2\,y - 5\,x^4) \right\}. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Poniamo, per brevità,

$$\varphi_3(x,\ y) \equiv b\,x\,(x^2 - 3\,y^2) + c\,y\,(y^2 - 3\,x^2)\,, \tag{5.4}$$

ed osserviamo che è

$$\begin{aligned} b\,x\,(x^4 - 10\,x^2\,y^2 - 5\,y^4) + c\,y\,(y^4 - 10\,x^2\,y^2 - 5\,x^4) \equiv (x^2 + y^2)\,\varphi_3(x,\ y) - \\ - 2\,x\,y\,[b\,y\,(4\,x^2 - y^2) + c\,x\,(4y^2 - x^2)]. \end{aligned}$$

Allora è subito visto che la superficie $\overset{*}{F}{}^5$:

$$\begin{aligned} z\left\{1 - \frac{1}{6}\,(x^2 + y^2) + \frac{2}{5}\,[b\,y\,(4\,x^2 - y^2) + c\,x\,(4\,y^2 - x^2)]\right\} = \\ = x\,y + \varphi_3(x,\ y)\left\{1 + \frac{1}{30}\,(x^2 + y^2)\right\} \end{aligned} \tag{5.5}$$

possiede in O la calotta σ^5 (5.3).

La $\overset{*}{F}{}^5$ (5.5) possiede O_3 (0, 0, 1, 0) come punto 4-plo ed il cono ivi tangente si spezza nel piano improprio e nel cilindro ortogonale al piano tangente in O che ha per traccia su questo:

$$1 - \frac{1}{6}\,(x^2 + y^2) + \frac{2}{5}\,[b\,y\,(4\,x^2 + y^2) + c\,x\,(4\,y^2 + x^2)] = 0\,, \tag{5.6}$$

che si sa costruire appena data σ^3.

La $\overset{*}{F^5}$ (5.5) taglia il piano improprio nelle tre rette appartenenti ai piani normali definiti da $\varphi_3(x, y) = 0$ e nelle rette improprie dei piani isotropi per l'asse z.

Sono ∞^1 le F^5 soddisfacenti alle condizioni enumerate (e formano fascio): fra esse la $\overset{*}{F^5}$ è *l'unica* che possegga una σ^5 d'area minima.

Naturalmente si possono trovare altre F^5 per la stessa σ^5 pure determinate da σ^3: se per es. si sostituisce a $\frac{1}{30}(x^2 + y^2)$ il termine $\frac{1}{30}(x^2 + y^2 + z^2)$ e si lasciano invariati gli altri, si ha una $\overset{**}{F^5}$ contenente l'assoluto (invece che le rette improprie dei piani isotropi per l'asse z), rimanendo ferme le altre condizioni; $\overset{**}{F^5}$ è l'unica possedente una σ^5 d'area minima fra quelle di un nuovo fascio di F^5.

In ogni caso una volta costruita *una* F^5 con σ^5 d'area minima passante per la σ^3 assegnata è facile costruire *tutte* le $\sigma^5 \subset \sigma^3$ d'area minima.

Si ha infatti:

Per costruire tutte le σ^5 d'area minima per una σ^3 assegnata (anch'essa d'area minima) si consideri il sistema lineare ∞^4 di F^5 determinato da: 1) *la F^5 già costruita che può essere la $\overset{*}{F^5}$ o la $\overset{**}{F^5}$;* 2) *la quaterna dei piani normali per le tangenti asintotiche e per quelle di curvatura insieme al piano improprio;* 3) *la quaterna di piani ottenuta dalla precedente con rotazione di* 60° *intorno all'asse z insieme al piano improprio;* 4) *i piani per l'asse z che contengono i raggi di un decagono regolare di cui uno appartenga ad una o* 5) *all'altra tangente asintotica.*

Vi è corrispondenza biunivoca fra le σ^5 d'area minima $\supset \sigma^3$ assegnata e le F^5 del sistema ∞^4 così determinato.

6. - Calotte d'area minima σ^2, σ^3, σ^4, con σ^2 piana.

Passiamo ora ad esaminare le calotte d'area minima con calotta σ^2 inflessionale (piana).

Assumendo il piano della σ^2 come $z = 0$ e come asse z la normale ad esso in O $(0, 0, 0)$ (centro della calotta σ^2), poichè in questa ipotesi risultano in O:

$$z_{1,0} = z_{0,1} = z_{2,0} = z_{1,1} = z_{0,2} = 0\,, \tag{6.1}$$

mentre continuano a valere le (2.6), si ha che una calotta σ^3 del 3° ordine di centro O e con σ^2 piana può scriversi nella forma:

$$z = b\,(x^3 - 3\,x\,y^2) + c\,(y^3 - 3\,x^2\,y) + [4]\,, \tag{6.2}$$

qualunque siano gli assi x, y.

Se si sceglie una delle tangenti asintotiche quadripunte come asse x (e se la calotta σ^3 non è iperinflessionale, cioè se non è piana) deve essere $b = 0$, e con scelta opportuna del punto unità può farsi $c = 1$, per cui una calotta σ^3 d'area minima con σ^2 piana può scriversi sempre nella forma canonica:

$$(6.3) \qquad z = y\,(y^2 - 3\,x^2) + [4]\,.$$

Dalla precedente risulta che le tre tangenti asintotiche quadripunte formano a due a due angoli di 60°. Questa proprietà caratterizza le σ^3 d'area minima con σ^2 inflessionale (e sostituisce la proprietà di ortogonalità delle tangenti asintotiche nel caso non inflessionale).

Si ha quindi:

Condizione necessaria e sufficiente perchè una σ^3 con σ^2 piana sia d'area minima, è che le tre tangenti asintotiche quadripunte formino a due a due angoli di 60°.

Sempre nell'ipotesi attuale le condizioni $H_{2,0} = H_{1,1} = H_{0,2} = 0$ dànno in O:

$$z_{4,0} = -z_{2,2} = z_{0,4}\,, \qquad z_{3,1} = -z_{1,3}\,,$$

per cui la σ^4 con σ^2 piana, di centro O e d'area minima è rappresentata da:

$$(6.4) \qquad z = y\,(y^2 - 3\,x^2) + e\,(x^4 - 6\,x^2\,y^2 + y^4) + h\,x\,y\,(x^2 - y^2) + [5]\,.$$

Infine, nel caso attuale, le condizioni $H_{3,0} = H_{2,1} = H_{1,2} = H_{0,3} = 0$ dànno in O:

$$z_{5,0} + z_{3,2} = 0, \quad z_{2,3} + z_{0,5} = 0, \quad z_{4,1} + z_{2,3} = 0, \quad z_{3,2} + z_{1,4} = 0\,,$$

quindi per una σ^5 con σ^2 piana si ha l'equazione

$$(6.5) \qquad y = y\,(y - 3\,x^2) + e\,(x^4 - 6\,x^2\,y^2 + y^4) + h\,x\,y\,(x^2 - y^2) +$$
$$+ m\,x\,(x^4 - 10\,x^2\,y^2 + 5\,y^4) + n\,y\,(y^4 - 10\,x^2\,y^2 + 5\,x^4) + [6]\,.$$

Diamo ora una costruzione delle σ^4 con σ^2 piana d'area minima e passanti per una data σ^3.

Le ∞^5 superficie F^3:

$$(6.6) \qquad z\left\{1 - \psi_1(x,\,y) - \psi_2(x,\,y)\right\} = y\,(y^2 - 3\,x^2)\,,$$

con $\psi_1(x, y)$ e $\psi_2(x, y)$ forme arbitrarie rispettivamente di 1° e 2° grado in x, y, passano tutte per la $\sigma^3 \subset \sigma^4$ (6.4) ed hanno in O_3 (0, 0, 1, 0) un punto doppio: fra esse ne risulta determinata *una*, $\overset{*}{F}{}^3$, per cui O_3 è punto doppio uniplanare con piano tangente il piano improprio:

$$\overset{*}{F}{}^3: \qquad z = y\,(y^2 - 3\,x^2)\,. \tag{6.7}$$

Si osservi poi che *tutte le* ∞^3 F^3 (6.6) *per cui* $\psi_1(x, y) \equiv 0$ *hanno in* O *la stessa calotta del* 4° *ordine che è pure d'area minima* (*per essa* $e = h = 0$).

Data quindi una σ^3 d'area minima con σ^2 inflessionale, basta considerare la rete di F^4 definita da: 1) $\overset{*}{F}{}^3$ insieme al piano improprio; 2) quaterna dei piani normali $x^4 - 6\,x^2\,y^2 + y^4 = 0$ (tutti reali); 3) quaterna dei piani normali per gli assi e per le loro bisettrici $x\,y(x^2 - y^2) = 0$. Ogni F^4 della rete così determinata ha in O una σ^4 d'area minima ($\supset \sigma^3$ data e con σ^2 piana) e viceversa ogni tale σ^4 determina una F^4 della rete.

Si osservi che la quaterna dei piani di cui in 3) è costituita dal piano normale per la tangente asintotica quadripunta $y = z = 0$ e dai tre piani normali che dividono in quattro parti uguali i due semispazi da esso limitati, e che alla quaterna dei piani di cui in 2) se ne può sostituire un'altra di costruzione immediata. Infatti, come si è visto al n. **4**, se si costruisce l'analoga quaterna di piani di cui in 3) a partire da un'altra tangente asintotica quadripunta, per es. $y = \sqrt{3}x$, $z = 0$, il che equivale a rotare di 60° intorno all'asse z la quaterna di cui in 3), si ottiene una quaterna di piani che risulta combinazione lineare delle due quaterne 2) e 3), per cui in definitiva si ha la seguente costruzione:

Per avere tutte le σ^4 *d'area minima per una* σ^3 *assegnata* (*anch'essa d'area minima*) *e con* σ^2 *inflessionale, si consideri la rete di* F^4 *determinata da*: 1) $\overset{*}{F}{}^3$ *insieme al piano improprio*; 2) *e* 3) *quaterna di piani normali costituita da un piano normale asintotico e dai tre piani che dividono in parti uguali* (*di* 45°) *i semispazi individuati da quello.*

Vi è corrispondenza biunivoca fra le σ^4 *d'area minima per la* σ^3 *assegnata e le* F^4 *della rete.*

Per avere tutte le σ^5 (6.5) con σ^2 piana e fissata la σ^3 utilizzando la $\overset{*}{F}{}^3$ (6.7) già trovata e che come si è visto ha la σ^4 d'area minima, si vede che:

Tutte le σ^5 *d'area minima per una* σ^3 *d'area minima assegnata con* σ^2 *piana, appartengono alle* F^5 *del sistema* ∞^4 *individuato da*: 1) $\overset{*}{F}{}^3$ *ed il piano improprio contato due volte*; 2) *la quaterna dei piani normali le cui tracce sul piano tangente sono i diametri di un ottagono regolare costruito su una delle tangenti asintotiche* *insieme al piano improprio; 3) l'analoga quaterna per un'altra tangente asintotica (ottenuta dalla precedente rotando di 60° intorno all'asse z) insieme al piano improprio; 4) i cinque piani normali contenenti i diametri di un decagono regolare di cui uno appartenente ad una tangente asintotica; 5) l'analoga quintupla di piani relativa al decagono regolare di cui un diametro è perpendicolare alla precedente tangente asintotica.*

7. - Calotte σ^4 e σ^5 d' area minima con σ^3 piana.

Per completezza esaminiamo anche il caso di σ^4 e σ^5 d'area minima la cui calotta del 3° ordine σ^3 sia piana (o iperinflessionale).

Nelle ipotesi fatte relative al piano tangente in O ($z_{1,0} = z_{0,1} = 0$) e per essere σ^3 piana ($z_{2,0} = z_{1,1} = z_{0,2} = z_{3,0} = z_{2,1} = z_{1,2} = z_{0,3} = 0$) si ha:

$$z_{4,0} = z_{0,4} = - z_{2,2}, \qquad z_{3,1} = - z_{1,3},$$

e quindi per la σ^4 si ha l'equazione:

$$z = e\,(x^4 - 6\,x^2\,y^2 + y^4) + h\,x\,y\,(x^2 - y^2) + [5], \tag{7.1}$$

in cui è ancora libera la scelta degli assi x, y e del punto unità.

Le quattro tangenti asintotiche (5-punte) non possono essere a coppie complesse coniugate [in tal caso dovrebbero esistere λ^2, $\lambda'^2 > 0$ tali che la forma di 4° grado a secondo membro della (7.1) fosse divisibile per $(y^2 + \lambda^2\,x^2) \cdot (y^2 + \lambda'^2\,x^2)$ il che non è possibile]. Se si prende come asse x una delle tangenti asintotiche reali, è $e = 0$ e quindi la (7.1) con opportuna scelta del punto unità diviene:

$$z = x\,y\,(x^2 - y^2) + [5]. \tag{7.2}$$

Questa forma canonica mostra che le tangenti asintotiche si distribuiscono in due coppie ortogonali, ciascuna costituita dalle bisettrici dell'altra (sono le diagonali di ottagono regolare di centro O). Si ha pertanto:

Condizione necessaria e sufficiente perchè una calotta σ^4 con σ^3 piana sia d'area minima è che le tangenti asintotiche 5-punte si distribuiscano in due coppie ortogonali, ciascuna costruita dalle bisettrici dell'altra.

Dalla (7.2) si ha poi:

Il fascio di F^4 individuata da: 1) $z = 0$ e il piano improprio contato tre volte; 2) i piani normali per le quattro tangenti asintotiche, definisce tutte le σ^4 d'area minima con la calotta piana σ^3 in $z = 0$ e con centro in O.

Come è subito visto le σ^5 per la σ^4 (7.2) sono date da:

$$z = x\,y\,(x^2 - y^2) + m\,x\,(x^4 - 10\,x^2\,y^2 + 5\,y^4) + n\,y\,(y^4 - 10\,x^2\,y^2 + 5\,x^4) + [6]\,, \tag{7.3}$$

e quindi per costruirle basta considerare la F^4: $z = x\,y\,(x^2 - y^2)$ che si sa costruire, insieme al piano improprio, e le due quintuple di piani di cui al n. **6** per avere una rete di F^5 che determina tutte le σ^5 d'area minima nelle condizioni volute.

8. - Caratterizzazione delle σ^s d'area minima con σ^{s-1} piana.

Abbiamo visto nei nn. **6** e **7** che una σ^3 con σ^2 piana e una σ^4 con σ^3 piana sono d'area minima se le loro tangenti asintotiche formano a due a due, prese consecutivamente, angoli uguali e quindi costituiscono le diagonali per il centro rispettivamente di un esagono e di un ottagono regolare. Dimostriamo ora che tale proprietà si estende alle calotte d'area minima σ^s con σ^{s-1} piana, essendo s qualunque. Vale cioè il teorema:

Condizione necessaria e sufficiente perchè una calotta σ^s con σ^{s-1} piana di centro O sia d'area minima è che le s tangenti asintotiche [tangenti $(s+1)$-punte] in O formino le diagonali di un $2s$-gono regolare di centro O: quindi il gruppo di tali tangenti è mutato in sè da una proiettività ciclica d'ordine $2s$.

Infatti assunto al solito il centro della calotta come punto $O(0, 0, 0)$ ed il piano della σ^{s-1} come piano $z=0$ si ha, in O, $z_{h,k}=0$ per tutti i valori di h e k tali che sia $h + k \leqslant s - 1$.

In queste ipotesi risultano identicamente soddisfatte in O la (1.3) e tutte le sue derivate fino a quelle d'ordine $s - 3$ incluso [essendo la (1.3) già del 2° ordine].

Le condizioni

$$H_{p,q} = 0 \qquad \text{con} \qquad p + q = s - 2\,, \tag{8.1}$$

a causa delle ipotesi precedenti, dànno in O, come si ricava immediatamente,

$$z_{s,0} + z_{s-2,2} = 0, \qquad z_{s-1,1} + z_{s-3,3} = 0, \qquad \ldots, \qquad z_{2,s-2} + z_{0,s} = 0\,. \tag{8.2}$$

Una calotta σ^s di centro O del tipo voluto appartenente ad una superficie d'area minima (1.1) ha pertanto l'equazione:

$$z = \sum_0^s{}_h \binom{s}{h} z_{s-h,h}\, x^{s-h}\, y^h + [s+1]\,, \tag{8.3}$$

dove le $z_{s-h,h}$ si intendono calcolate in O e soddisfacenti alle (8.2).

Poichè gli assi x e y del riferimento sono ancora arbitrari, possiamo prendere una delle tangenti asintotiche [tangenti $(s+1)$-punte] della σ^s coincidente con l'asse x $(y=0)$, il che porta che deve essere in O:

$$z_{s,0} = 0\,. \tag{8.4}$$

Distinguiamo ora il caso di s pari dal caso di s dispari.

Se s è pari, le (8.2), a causa della (8.4), dànno che in O sono nulle tutte le $z_{h,k}$ con $h+k=s$ e con h e k entrambi pari, e quindi, fatto come è sempre possibile con opportuna scelta del punto unità, $z_{s-1,1}=1$, per la σ^s in esame si ha la rappresentazione:

$$z = x\,y\left\{s\,x^{s-2} - \binom{s}{3}x^{s-4}\,y^2 + \binom{s}{5}x^{s-6}\,y^4 - \ldots - s\,y^{s-2}\right\} + [s+1]\,. \tag{8.5}$$

Se s è dispari, sempre a causa della (8.4), le (8.2) dànno che sono nulle in O le $z_{h,k}$ con $h+k=s$ e con h dispari ed h pari, per cui con opportuna scelta del punto unità, si ha in questo caso per la σ^s la rappresentazione:

$$z = y\left\{s\,x^{s-1} - \binom{s}{3}x^{s-3}\,y^2 + \binom{s}{5}x^{s-5}\,y^4 - \ldots + s\,y^{s-1}\right\} + [s+1]\,. \tag{8.6}$$

Dalle (8.5) e (8.6) si ricava intanto che:

Una calotta σ^s d'area minima con σ^{s-1} piana non ha invarianti.

Una semplice verifica mostra che le s tangenti asintotiche della (8.5) e della (8.6), date rispettivamente dalle equazioni:

$$x\,y\left\{s\,x^{s-2} - \binom{s}{3}x^{s-4}\,y^2 + \ldots + s\,y^{s-2}\right\} = 0, \tag{8.7}$$

$$y\left\{s\,x^{s-1} - \binom{s}{3}s^{s-3}\,y^2 + \ldots + s\,y^{s-1}\right\} = 0, \tag{8.8}$$

formano a due a due angoli uguali.

Infatti, per una nota formula elementare, dato un angolo α e posto $t = \operatorname{tg}\alpha$, si ha:

$$\operatorname{tg} s\alpha = \frac{s\,t - \binom{s}{3}t^3 + \binom{s}{5}t^5 - \ldots}{1 - \binom{s}{2}t^2 + \binom{s}{4}t^4 - \ldots}\,. \tag{8.9}$$

Se quindi le s tangenti asintotiche della σ^s in esame formano a due a due prese consecutivamente l'angolo α, poichè deve essere $s\alpha = \pi$, la (8.9) per s pari dà:

$$st - \binom{s}{3} t^3 + \binom{s}{5} t^5 - \ldots - s\, t^{s-1} = 0\,, \tag{8.10}$$

e per s dispari:

$$st - \binom{s}{3} t^3 + \binom{s}{5} t^5 - \ldots + t^s = 0, \tag{8.11}$$

che coincidono rispettivamente con le (8.7) e (8.8) ove si ponga $t = y/x$.
Il teorema risulta così dimostrato.

Parte II.

Trasporto di elementi differenziali su una superficie d'area minima.

9. - Relazioni tra due calotte infinitamente vicine di una superficie d'area minima.

Abbiamo osservato nel n. 2 della Parte I che, date due calotte σ^2 e $\bar{\sigma}^2$ d'area minima, è possibile passare dall'una all'altra mediante un movimento del triedro principale (normale e tangenti asintotiche) seguito (o preceduto) da una dilatazione lungo la normale principale.

Supponiamo ora che le due calotte σ^2 e $\bar{\sigma}^2$ d'area minima siano infinitamente vicine ed appartengano alla stessa superficie, e procuriamoci le equazioni del movimento infinitesimo e della dilatazione che fanno passare da σ^2 a $\bar{\sigma}^2$ di centri rispettivi $O(0, 0, 0)$ e $\bar{O}(\varepsilon, \eta, 0)$, essendo ε, η infinitesimi.

È chiaro che se è data la σ^s di centro O di una superficie, è possibile calcolare la $\bar{\sigma}^{s-1}$ di centro $\bar{O}$ (essendo O infinitamente vicino ad $\bar{O}$) della stessa superficie.

Riprendiamo allora la σ^3 d'area minima di centro O (2.8):

$$z = xy + b\,(x^3 - 3\,xy^2) + c\,(y^3 - 3\,x^2 y) + [4]\,. \tag{9.1}$$

Un movimento infinitesimo che porti $O(0, 0, 0)$ in $\bar{O}(\varepsilon, \eta, 0)$ è del tipo:

$$\left\{\begin{aligned} x &= \bar{x} + \omega_1 \bar{y} + \omega_2 \bar{z} + \varepsilon \\ y &= -\omega_1 \bar{x} + \bar{y} + \omega_3 \bar{z} + \eta \\ z &= -\omega_2 \bar{x} - \omega_3 \bar{y} + \bar{z}\,. \end{aligned}\right. \tag{9.2}$$

Calcoliamo la $\bar{\sigma}_2$ di centro $\bar{O}$. A tale scopo basta sostituire le precedenti nella (9.1) e calcolare fino ai termini del 2° ordine incluso in x, y conservando solo i termini di grado 0, 1 in ε, η.

Si ha per la $\bar{\sigma}^2$:

$$z = (\omega_2 + \eta)\,\bar{x} + (\omega_3 + \varepsilon)\,\bar{z} + \bar{x}\,\bar{y}\left\{1 - 6\,(b\,\eta + c\,\varepsilon)\right\} - \tag{9.3}$$
$$- (\omega_1 - 3\,b\,\varepsilon + 3\,c\,\eta)\,(\bar{x} - \bar{y}) + [3]\,.$$

Se si vuole che il triedro di riferimento in $\bar{O}$ sia formato dalla normale e dalle tangenti asintotiche in $\bar{O}$ alla $\bar{\sigma}^2$ (in modo cioè che la σ^2 acquisti la forma $\bar{z} = a\,\bar{x}\,\bar{y}$, come si è visto al n. **2** deve essere:

$$\omega_1 = 3\,(b\,\varepsilon - c\,\eta), \qquad \omega = -\eta, \qquad \omega_3 = -\,\varepsilon\,. \tag{9.4}$$

In queste ipotesi la $\bar{\sigma}^2$ risulta rappresentata da

$$\bar{z} = \bar{x}\,\bar{y}\left\{1 - 6\,(b\,\eta + c\,\varepsilon)\right\} + [3]\,, \tag{9.5}$$

e le equazioni del movimento infinitesimo cercato sono:

$$\begin{cases} x = \bar{x} + \omega_1\,\bar{y} - \eta\,\bar{z} + \varepsilon \\ y = \bar{y} - \omega_1\,\bar{x} - \varepsilon\,\bar{z} + \eta \\ z = \eta\,\bar{x} + \varepsilon\,\bar{y} + \bar{z}\,, \end{cases} \tag{9.6}$$

con

$$\omega_1 = 3\,(b\,\varepsilon - c\,\eta)\,. \tag{9.7}$$

Esse mostrano che:

Se O, $\bar{O}$ sono due punti infinitamente vicini di una superficie d'area minima, il movimento infinitesimo con cui si passa dal triedro formato dalla normale e dalle tangenti asintotiche in O all'analogo triedro relativo ad $\bar{O}$ può considerarsi come prodotto: 1) *di una rotazione infinitesima definita da ω_1 intorno all'asse z (normale in O)*; 2) *di una rotazione infinitesima intorno alla retta passante per O e per i simmetrici di $\bar{O}$ rispetto alle tangenti asintotiche in O ($\eta\,x + \varepsilon\,y = z = 0$) la cui ampiezza è determinata da $O\bar{O}$*; 3) *della traslazione $O\bar{O}$.*

Dalla (9.5) si ha che l'espressione $1 - 6(b\,\eta + c\,\varepsilon)$ dà la dilatazione che deve seguire (o precedere) il movimento (9.6) per passare da σ_2 a $\bar{\sigma}^2$.

L'equazione:

$$b\,\eta + c\,\varepsilon = 0\,, \qquad \text{ossia} \qquad c\,\mathrm{d}x + b\,\mathrm{d}y = 0\,, \tag{9.8}$$

caratterizza la direzione uscente da O per cui la calotta $\bar{\sigma}^2$ si ottiene dalla σ^2 con un semplice movimento del triedro di riferimento. Si ha quindi che:

Su una superficie d'area minima è definito un sistema ∞^1 *di linee tali che due calotte del 2° ordine della superficie, aventi centri in due punti di una di esse, si ottengono l'una dall'altra con il solo movimento del triedro principale (normale e tangenti asintotiche) da* O *all'analogo triedro in* $\bar{O}$.

Si osservi infine che la condizione $\omega_1 = 0$, cioè $b\,\delta x - c\,\delta y = 0$, definisce in O una direzione [ortogonale alla (9.8)] per cui il movimento che fa passare dal triedro principale in O all'analogo triedro in $\bar{O}$ ($\bar{O} = O + \delta O$) risulta prodotto di una rotazione infinitesima intorno alla retta $\eta\, x + \varepsilon\, y = z = 0$ e della traslazione $O\bar{O}$.

Determinato il movimento infinitesimo (9.6) che porta il triedro (della normale e delle tangenti asintotiche) in O nell'analogo triedro relativo ad $\bar{O}$, possiamo procurarci, partendo dalla equazione (2.11) della σ^4 di centro O, l'equazione canonica della $\bar{\sigma}^3$ di centro $\bar{O}$.

Riprendiamo l'equazione (2.11) della σ^4:

$$z = x\,y + b\,(x^3 - 3\,x\,y^2) + c\,(y^3 - 3\,x^2\,y) + \frac{1}{6}\,x\,y\,(x^2 + y^2) + \\ + e\,(x^4 - 6\,x^2\,y^2 + y^4) + h\,x\,y\,(x^2 - y^2) + [5]\,. \tag{9.9}$$

Per avere l'equazione della $\bar{\sigma}^3$ di centro $\bar{O}$, bisogna calcolare gli addendi della precedente tramite le (9.6) fino ai termini del 3° ordine inclusi in x, y e conservando solo i termini di gradi 0 e 1 in ε, η (e quindi in ω_1).

Con queste approssimazioni si ha:

$$x = y\,\bar{x}\,\bar{y} + \eta\,\bar{x} + \varepsilon\,\bar{y} - \omega_1\,(\bar{x}^2 - \bar{y}^2) - \varepsilon\,\bar{x}^2\,\bar{y} - \eta\,\bar{x}\,\bar{y}^2 + [4]\,,$$

$$x^2 = \bar{x}^2 + 2\,\varepsilon\,\bar{x} + 2\,\omega_1\,\bar{x}\,\bar{y} - 2\,\eta\,\bar{x}^2\,\bar{y} + [4]\,,$$

$$y^2 = \bar{y}^2 + 2\,\eta\,\bar{y} - 2\,\omega_1\,\bar{x}\,\bar{y} - 2\,\varepsilon\,\bar{x}\,\bar{y}^2 + [4]\,,$$

$$x^3 = \bar{x}^3 + 3\,\varepsilon\,\bar{x}^2 + 3\,\omega_1\,\bar{x}^2\,y + [4]\,,$$

$$x^2\,y = \bar{x}^2\,\bar{y} + \eta\,\bar{x}^2 + 2\,\varepsilon\,\bar{x}\,\bar{y} + 2\,\omega_1\,\bar{x}\,\bar{y}^2 + [4]\,,$$

$$y^3 = \bar{y}^3 + 3\,\eta\,\bar{y}^2 - 3\,\omega_1\,\bar{x}\,\bar{y}^2 + [4]\,,$$

$$y^2\, x = \bar{y}^2\, \bar{x} + \varepsilon\, \bar{y}^2 + 2\, \eta\, \bar{x}\, \bar{y} - 2\, \omega_1\, \bar{y}\, \bar{x}^2 + [4],$$

$$x^3\, y = \bar{x}^3\, \bar{y} + \eta\, \bar{x}^3 + 3\, \varepsilon\, \bar{x}^2\, \bar{y} + [4],$$

$$x\, y^3 = \bar{x}\, \bar{y}^3 + 3\, \eta\, \bar{x}\, \bar{y}^2 + \varepsilon\, \bar{x}^3 + [4],$$

$$x^4 = 4\, \varepsilon\, \bar{x}^3 + [4],$$

$$y^4 = 4\, \eta\, \bar{y}^3 + [4],$$

$$x^2\, y^2 = 2\, \eta\, \bar{x}^2\, \bar{y} + 2\, \varepsilon\, \bar{x}\, \bar{y}^2 + [4].$$

Sostituendo queste espressioni nella (9.9), fatte le dovute semplificazioni si ha:

$$\bar{z} = \{1 - (b\, \eta + c\, \varepsilon)\}\, \bar{x}\, \bar{y} + \left\{ b + \left[\left(\frac{1}{6} + h\right) \eta + 4\, \varepsilon\, c\right] \right\} (\bar{x}^3 - 3\, \bar{x}\, \bar{y}^2) + \tag{9.10}$$

$$+ \left\{ c + \left[\left(\frac{1}{6} - h\right) \varepsilon + 4\, \eta\, e\right] \right\} (\bar{y}^3 - 3\, \bar{x}^2\, \bar{y}) + [4].$$

Posto:

$$\omega = b\, \eta + c\, \varepsilon, \tag{9.11}$$

$$x' = \bar{x}, \qquad y' = \bar{y}, \qquad z' = (1 + 6\, \omega)\, \bar{z}, \tag{9.12}$$

la rappresentazione della $\bar{\sigma}^3$ di centro $\bar{O}$ diviene:

$$z' = x' y' + \left\{ b\, (1 + 6\, \omega) + \left(\frac{1}{6} + h\right) \eta + 4\, \varepsilon\, e\right) (x'^3 - 3\, x'\, y'^2) + \tag{9.13}$$

$$+ \left\{ c\, (1 + 6\, \omega) + \left(\frac{1}{6} - h\right) \varepsilon + 4\, \eta\, e\right) (y'^3 - 3\, x'^2\, y') + [4],$$

che scriveremo anche, per brevità,

$$z' = x'\, y' + b'\, (x'^3 - 3\, x'\, y'^2) + c'\, (y'^3 - 3\, x'^2\, y') + [4], \tag{9.14}$$

avendo posto:

$$(9.15)\qquad \begin{cases} b' = b\,(1+6\,\omega) + \left(\dfrac{1}{6} + h\right)\eta + 4\,\varepsilon\,e \\[2ex] c' = c\,(1+6\,\omega) + \left(\dfrac{1}{6} - h\right)\varepsilon + 4\,\eta\,e\,. \end{cases}$$

10. - Trasformazioni tra due σ^3 infinitamente vicine di una superficie d'area minima.

Determiniamo ora tutte le trasformazioni puntuali del tipo:

$$(10.1)\qquad x = x' + \varphi_2(x',\, y') + [3]\,, \qquad y = y' + \psi_2(x',\, y') + [3]\,, \qquad z = z',$$

che mutano la σ^3 (9.1) nella σ'^3 (9.14) ed il piano $z = 0$ (tangente in O a σ^3) nel piano $z' = 0$ (tangente in $\overline{O}$ a σ'^3).

Perchè ciò avvenga deve essere:

$$(10.2)\qquad y'\,\varphi_2(x',\, y') + x'\,\psi_2(x',\, y') \equiv (b'-b)\,(x'^3 - 3\,x'y'^2) + (c'-c)(y'^3 - 3\,x'^2\,y');$$

cioè, indicando con α_{20}, $2\alpha_{11}$, α_{02} e β_{20}, $2\beta_{11}$, β_{02} i coefficienti di x'^2, $x'y'$, y'^2 rispettivamente in $\varphi_2(x',\, y)$ e $\psi_2(x',\, y')$,

$$y'\,(\alpha_{20}\,x'^2 + 2\,\alpha_{11}\,x'\,y' + \alpha_{02}\,y'^2) + x'\,(\beta_{20}\,x'^2 + 2\,\beta_{11}\,x'\,y' + \beta_{02}\,y'^2) \equiv$$
$$\equiv (b'-b)\,(x'^3 - 3\,x'\,y'^2) + (c'-c)\,(y'^3 - 3\,x'^2\,y')\,,$$

da cui:

$$(10.3)\qquad \begin{cases} \beta_{20} = b' - b, & 2\,\alpha_{11} + \beta_{02} = -3\,(b'-b) \\[1ex] \alpha_{02} = c' - c, & 2\,\beta_{11} + \alpha_{20} = -3\,(c'-c)\,. \end{cases}$$

Imponiamo adesso che la terna delle direzioni inflessionali uscenti da O e $\overline{O}$, rispettivamente nei piani $z = 0$ e $z' = 0$, costituiscano una terna apolare alla coppia delle tangenti asintotiche rispettivamente a σ^3 e σ'^3 in O e $\overline{O}$.

Poichè la terna delle direzioni inflessionali uscenti da $\overline{O}$ del piano $z' = 0$ è individuata da

$$(10.4)\qquad y'\,\varphi_2(x',\, y') = x'\,\psi_2(x',\, y')\,,$$

per l'apolarità richiesta deve aversi:

$$\alpha_{20} = 2\beta_{11}, \qquad \beta_{02} = 2\alpha_{11}, \tag{10.5}$$

quindi in definitiva:

$$\alpha_{20} = -\frac{3}{2}(c'-c), \qquad 2\alpha_{11} = -\frac{3}{2}(b'-b), \qquad \alpha_{02} = c'-c,$$

$$\beta_{20} = b'-b, \qquad 2\beta_{11} = -\frac{3}{2}(c'-c), \qquad \beta_{02} = -\frac{3}{2}(b'-b).$$

Posto per brevità:

$$\beta = b'-b, \qquad \gamma = c'-c, \tag{10.6}$$

si ha che le trasformazioni cercate sono rappresentate da:

$$T: \begin{cases} x = x' - \dfrac{3}{2}(\gamma x' + \beta y')\, x' + y'^2 + [3] \\ \\ y = y' - \dfrac{3}{2}(\gamma x' + \beta y')\, y' + \beta x'^2 + [3]. \end{cases} \tag{10.7}$$

Si ha quindi:

Le trasformazioni puntuali soddisfacenti alle condizioni: 1) *di agire nell'intorno del* 1° *ordine della coppia* $O\,\overline{O}$ *come l'identità*; 2) *di mutare* σ^3 *in* σ'^3 *ed i rispettivi piani ad esse tangenti l'uno nell'altro*; 3) *di avere la terna delle direzioni inflessionali uscenti da* O *e* $\overline{O}$ *ed appartenenti ai piani tangenti sopradetti apolare alla coppia delle tangenti asintotiche in* O *e* $\overline{O}$ *rispettivamente a* σ^3 *e* $\overline{\sigma}^3$, *coincidono tutte fino ai termini del* 2° *ordine incluso.*

11. - Trasformazioni quadratiche osculatrici a T (10.7).

Proponiamoci ora di trovare le trasformazioni quadratiche osculatrici alle trasformazioni T (10.7).

Una trasformazione voluta è del tipo:

$$x = \frac{x' + \Phi_2(x', y')}{1 - \chi_1(x', y') - \chi_2(x', y')}, \qquad y = \frac{y' + \Psi_2(x', y')}{1 - \chi_1(x', y') - \chi_2(x', y')}, \tag{11.1}$$

con χ_1, Φ_2, Ψ_2, χ_2 forme di grado uguale all'indice in x', y'.

Per essa si ha:

$$\begin{cases} x = x' + \Phi_2(x', y') + x'\chi_1(x', y') + [3] \\ y = y' + \Psi_2(x', y') + y'\chi_1(x', y') + [3] , \end{cases} \tag{11.2}$$

e affinchè osculi le trasformazioni (10.7) (cioè coincida con esse fino ai termini del 2° ordine inclusi) deve essere:

$$\begin{cases} \Phi_2(x', y') + x'\chi_1(x', y') \equiv -\frac{3}{2}(\gamma x' + \beta y')x' + \gamma y'^2 \\ \Psi_2(x', y') + y'\chi_1(x', y') \equiv -\frac{3}{2}(\gamma x' + \beta y')y' + \beta x'^2 . \end{cases} \tag{11.3}$$

Si hanno, come del resto è ben noto, ∞^2 di queste trasformazioni quadratiche; la scelta di una di esse dipende dalla scelta di $\chi_1(x', y')$, mentre $\chi_2(x', y')$ risulta poi determinata dal fatto che la trasformazione deve essere quadratica, cioè dal fatto che le tre coniche:

$$x' + \Phi_2(x', y') = 0, \qquad y' + \Psi_2(x', y') = 0,$$

$$1 - \chi_1(x', y') - \chi_2(x', y') = 0$$

appartengono ad una rete omaloidica.

Naturalmente ha interesse determinare intrinsecamente *una* di queste trasformazioni quadratiche: e ciò può farsi in più modi.

In un primo modo si può esigere che la conica corrispondente ad $x = 0$ sia una parabola tangente a $x' = 0$ ed avente per asse la $y' = 0$; ciò porta:

$$\chi_1(x', y') \equiv -\frac{3}{2}(\gamma x' + \beta y') , \tag{11.4}$$

e in conseguenza le tre coniche che definiscono la rete omaloidica sono:

$$x' + \gamma y'^2 = 0 , \qquad y' + \beta x'^2 = 0 , \qquad 1 + \frac{3}{2}(\gamma x' + \beta y') - \chi_2(x', y') = 0 .$$

Le prime due coniche si tagliano nei punti ($\neq O$):

$$x_i' = -\frac{1}{\gamma l_i^2} , \qquad y' = -\frac{l_i}{\gamma l_i^2} , \qquad (i = 1, 2, 3) ,$$

ove $l_i^3 = \dfrac{\beta}{\gamma}$, e affinchè questi appartengano anche alla terza conica deve essere:

$$\chi_2(x', y') \equiv -\frac{3}{2}\beta^2 x'^2 + \beta\gamma x' y' - \frac{3}{2}\gamma^2 y'^2, \tag{11.5}$$

quindi la trasformazione quadratica è in questo caso:

$$\left\{\begin{aligned} x &= \frac{x' + \gamma y'^2}{1 + \frac{3}{2}(\gamma x' + \beta y') + \frac{3}{2}\beta^2 x'^2 - \beta\gamma x' y' + \frac{3}{2}\gamma^2 y'^2} \\ y &= \frac{y' + \beta x'^2}{1 + \frac{3}{2}(\gamma x' + \beta y') + \frac{3}{2}\beta^2 x'^2 - \beta\gamma x' y' + \frac{3}{2}\gamma^2 y'^2}. \end{aligned}\right. \tag{11.6}$$

Un altro modo di determinare *una* trasformazione quadratica è d'imporre alla conica corrispondente a $z = 0$ di avere il centro in $x' = y' = 0$; in tal caso deve aversi $\chi_1(x', y') \equiv 0$, quindi le prime due coniche (corrispondenti a $x = 0$ e a $y = 0$) sono:

$$x' - \frac{3}{2}(\gamma x' + \beta y')\, x' + \gamma y'^2 = 0, \qquad y' - \frac{3}{2}(\gamma x' + \beta y')\, y' + \beta x'^2 = 0.$$

I loro punti d'intersezione $\neq O$ sono:

$$x'_i = \frac{1}{\frac{3}{2}(\gamma + \beta l_i) - \gamma l_i^2}, \qquad y' = \frac{l_i}{\frac{3}{2}(\gamma - \beta l_i) - \gamma l_i^2},$$

ed appartengono alla terza conica se e solo se:

$$\chi_2(x', y') \equiv -\frac{3}{2}(\gamma^2 - 2\beta^2)\, x'^2 + 4\beta\gamma x' y' + \frac{3}{2}(\beta^2 - 2\gamma^2)\, y'^2; \tag{11.7}$$

quindi la trasformazione quadratica in esame è:

$$x = \frac{x' - \frac{3}{2}(\gamma x' - \beta y')\, x' + \gamma y'^2}{1 - \chi_2(x', y')}, \qquad y = \frac{y' - \frac{3}{2}(\gamma x' + \beta y')\, y' + \beta x'^2}{1 - \chi_2(x', y')}, \tag{11.8}$$

con la precedente espressione di $\chi_2(x', y')$.

Un altro modo ancora di determinare *una* trasformazione quadratica è d'imporre che la conica corrispondente alla retta $x = 0$ sia una iperbole equilatera avente come direzioni degli asintoti quelle delle bisettrici degli assi x', y'. In questa ipotesi deve essere:

$$\chi_1(x', y') \equiv -\frac{1}{2}(\gamma x' + 3\beta y'), \tag{11.9}$$

ed in conseguenza le tre coniche che definiscono la rete omaloidica sono, come si vede con facili calcoli,

$$x' - \gamma (x'^2 - y'^2) = 0, \qquad x' - \gamma x' y' + \beta x'^2 = 0, \tag{11.10}$$
$$1 + \frac{1}{2}(\gamma x' + 3\beta' y') - \left\{ \left(\beta^2 + \frac{3}{2}\gamma^2\right) x'^2 - \frac{5}{2}\beta^2 x' y' + \frac{1}{2} y'^2 \right\} = 0 .$$

Se si vogliono applicare le trasformazioni trovate a due calotte infinitamente vicine di una superficie d'area minima, una di centro $O(0, 0, 0)$ e l'altra di centro $\overline{O}(\varepsilon, \eta, 0)$, bisogna tener conto delle espressioni già ottenute al n. **9** di b', c' e quindi bisogna prendere:

$$\beta = 6\, b\, \omega + \left(\frac{1}{6} + h\right)\eta + 4\, e\, \varepsilon, \qquad \gamma = 6\, c\, \omega + \left(\frac{1}{6} - h\right)\varepsilon + 4\, e\, \eta, \tag{11.11}$$

con

$$\omega = b\eta + c\varepsilon . \tag{11.12}$$

12. - Osservazione.

È da osservare che, qualunque sia la trasformazione quadratica che si vuole adottare, la determinazione di $\chi_2(x', y')$ (che come si è visto, dipende dalla condizione di omaloidicità della rete di coniche) non ha alcuna influenza nella determinazione dell'E'^3 trasformato di un E^3 per O (nel piano $z = 0$). Infatti considerato un E^3 del piano $z = 0$:

$$y = \mu_0 x + \mu_1 x^2 + \mu_2 x^3 + [4], \tag{12.1}$$

ed indicato il suo trasformato mediante una delle trasformazioni quadratiche (11.1) con:

$$y' = \mu_0' x' + \mu_1' x'^2 + \mu_2' x'^3 + [4], \tag{12.2}$$

un semplice calcolo mostra subito che $\mu_0' = \mu_0$ e che i termini dipendenti da $\chi_2(x', y')$ nella determinazione di μ_2' si elidono.

Quindi in realtà *tutte le volte che di una data trasformazione quadratica* (11.1) *con le condizioni* (11.3) *ci si deve servire per determinare il trasformato di un* E^3 *di centro* O *appartenente al piano* $z = 0$, *ad essa si può sostituire una qualsiasi trasformazione algebrica* [2,2] *che approssimi quella fino all'intorno del* 2° *ordine incluso, lasciando arbitraria la* $\chi_2(x', y')$.

Tali trasformazioni algebriche [2, 2] sono tali che alle tangenti asintotiche corrispondono due coniche ben determinate, mentre rimane fissata soltanto la polare dell'origine rispetto alla terza conica, corrispondente alla retta impropria del piano $z = 0$.

13. - Trasporto di elementi differenziali del 3° ordine sulla superficie d'area minima.

L'interesse delle trasformazioni quadratiche introdotte nel n. **11** sta nel fatto ch'esse permettono un *trasporto* intrinsecamente definito di elementi del 3° ordine $\widetilde{E}^3$ da un punto O ad un punto infinitamente vicino $\overline{O}$ sulla superficie d'area minima.

Sia T_2 una delle trasformazioni quadratiche fra i piani tangenti alla superficie d'area minima in due suoi punti infinitamente vicini O, $\overline{O}$. Dato nel primo piano un elemento E^3, esso definisce sulla calotta σ^3 di centro O un $\widetilde{E}^3$ di cui è proiezione ortogonale (e viceversa dato $\widetilde{E}^3 \in \sigma^3$ si ha E^3). Si costruisca in $\overline{O}$ l'elemento $\overline{E}^3 = T_2\, E^3$ e a partire da esso l'elemento $\overline{\widetilde{E}}^3 \in \overline{\sigma}^3$ che si proietta ortogonalmente sul piano tangente in $\overline{O}$ in $\overline{E}^3$. La costruzione di $\overline{\widetilde{E}}^3$ a partire da $\widetilde{E}^3$ è il *trasporto* di $\widetilde{E}^3 \in \sigma^3$ in $\overline{\widetilde{E}}^3 \in \overline{\sigma}^3$ per la T_2 scelta.

Si noti, come è già stato osservato nell'introduzione, che una volta scelta una T che muta σ^3 in $\overline{\sigma}^3$ (come è stato fatto imponendo che le direzioni inflessionali formino una terna apolare alla coppia delle tangenti asintotiche) *è necessario* passare ad una delle trazformazioni quadratiche T_2 per poter definire un trasporto di $\widetilde{E}^3$: infatti la T opera nell'intorno del 2° ordine (non del 3°) di O sul piano tangente a σ^3 e quindi dato E^3 *non* si può costruire $\overline{E}^3 = TE^3$. Invece sostituendo T_2 a T (intrinsecamente definita da questa) esiste $\overline{E}^3 = T_2\, E^3$, quindi si può applicare la definizione precedente di trasporto.

È chiaro inoltre, che se si vuole fare un trasporto lungo un arco finito di curva tracciato sulla superficie d'area minima, bisogna che la T_2 considerata conservi le stesse proprietà lungo i punti dell'arco considerato, il che è possibile.

Vogliamo ora specificare questo trasporto per la T_2 (11.8) con l'espressione di $\chi_2(x', y')$ data dalla (11.7).

A tale scopo esplicitiamo la (11.8) fino ai termini del 3° ordine e teniamo presente che essa deve operare tra i piani $z = 0$ e $\bar{z} = 0$ tangenti rispettivamente in O o $\bar{O}$ della stessa superficie d'area minima, le cui calotte del 3° ordine, σ^3 e $\bar{\sigma}^3$ di centri O e $\bar{O}$, sono date dalle (9.10) e (9.11).

Scriveremo pertanto la T_2 fino ai termini del 3° ordine nella forma [tenendo presenti le (9.12)]:

$$\text{(13.1)} \qquad \begin{cases} x = \bar{x} - \frac{3}{2}(\gamma\,\bar{x} + \beta\,\bar{y})\,\bar{x} + \gamma\,\bar{y}^2 + \bar{x}\,\chi_2(\bar{x},\,\bar{y}) + [4] \\ \\ y = \bar{y} - \frac{3}{2}(\gamma\,\bar{x} + \beta\,\bar{y})\,\bar{y} + \beta\,\bar{x}^2 + \bar{y}\,\chi_2(\bar{x},\,\bar{y}) + [4], \end{cases}$$

essendo β e γ date dalle (11.11).

Consideriamo un $\tilde{E}$ di centro O della σ^3 e sia

$$\text{(13.2)} \qquad y = \mu_0\,x + \mu_1\,x^2 + \mu_2\,x^3 + [4]$$

l'E^3 proiezione ortogonale di $\tilde{E}^3$ sul piano $z = 0$.

Sia:

$$\text{(13.3)} \qquad \bar{y} = \bar{\mu}_0\,\bar{x} + \bar{\mu}_1\,\bar{x}^2 + \bar{\mu}_2\,\bar{x}^3 + [4]$$

l'elemento trasformato $\bar{E}^3 = T_2\,E$ sul piano $\bar{z} = 0$.

Per l'osservazione fatta al n. **12**, si può sostituire alla T_2 considerata la trasformazione algebrica [2, 2]:

$$\text{(13.4)} \quad x = \bar{x} - \frac{3}{2}(\gamma\,\bar{x} + \beta\,\bar{y})\,\bar{x} + \gamma\,\bar{y}^2, \qquad y = \bar{y} - \frac{3}{2}(\gamma\,\bar{x} + \beta\,\bar{y})\,\bar{y} + \beta\,\bar{x}^2,$$

e si trova:

$$\text{(13.5)} \quad \bar{\mu}_0 = \mu_0, \qquad \bar{\mu}_1 = \mu_1 + \gamma\,\mu_0^3 - \beta, \qquad \bar{\mu}_2 = \mu_2 - 3\,\mu_1\left(\gamma - \frac{1}{3}\,\mu_0^2\,\gamma + \mu_0\,\beta\right),$$

con β e γ date dalle (11.11).

Queste definiscono l'$\bar{E}^3 = T_2\,E^3$. Tale $\bar{E}^3$ determina su $\bar{\sigma}^3$ un $\bar{\tilde{E}}^3$ di cui è proiezione ortogonale su $\bar{z} = 0$. L'$\bar{\tilde{E}}^3$ così ottenuto su $\bar{\sigma}^3$ è ottenuto per *trasporto* di $\tilde{E}^3$ da O ad $\bar{O}$ sulla superficie d'area minima e con la T_2 scelta.

Indice.

* * *