Riv. Mat. Univ. Parma (2) 3 (1962), 213-241

GIOVANNI RICCI (*)

Momenti decisivi del pensiero matematico negli ultimi due secoli. (**)

Momenti decisivi del pensiero matematico, e non tutti, soltanto alcuni, e non la storia delle Scienze matematiche degli ultimi due secoli mi propongo di tratteggiare in questo mio discorso: momenti decisivi per il sopraggiungere di nuove idee che si inseriscono, si concretano, si diramano su lineamenti antitetici, si accordano come in felici momenti di sintesi.

Io dovrò richiedere Loro una partecipazione benevola e attenta: infatti, non è possibile svolgere un tema come quello annunciato, nei limiti di tempo a noi concessi, senza procedere schematicamente nel delineare le idee, aiutandosi con immagini, allusioni, similitudini che, pur non facendo parte del consueto linguaggio matematico, sono utili per far affiorare impressioni e ricordi di esperienze della vita comune e specialmente quelle provate quando ci accostammo all'aritmetica nella fanciullezza, alla geometria elementare e all'algebra elementare all'adolescenza.

Una massima di Galileo e la Meccanica analitica di Lagrange.

Nel mondo matematico, due secoli fa, emergevano due figure: EULERO e LAGRANGE: due uomini universali che chiudevano un'epoca. Il LAGRANGE, nella prefazione alla sua *Mécanique analytique* (1787) dice: « Non si troverà alcuna figura in quest'opera. I metodi che io espongo non richiedono né costru-

(*) Indirizzo: Istituto Matematico « F. Enriques », Università, Milano, Italia.

(**) Discorso inaugurale letto nell'Adunanza solenne dell'Istituto Lombardo (Accademia di Scienze e Lettere) il 25 maggio 1961 [Ist. Lombardo Sci. Lett. Rend. Cl. Sci. Mat. Nat. **95** (1961), 33-66].

zioni, né ragionamenti geometrici o meccanici, ma soltanto delle operazioni algebriche assoggettate a un andamento regolare e uniforme. Quelli che amano l'analisi vedranno con piacere la meccanica divenirne un nuovo ramo, e mi saranno grati di averne esteso così il dominio ». Per consentirci di apprezzare l'importanza di questo momento di sintesi del LAGRANGE, conviene rifarci a GALILEO. Apriamo il « Saggiatore »: nel 1623 GALILEO dice:

« ... La filosofia è scritta in questo grandissimo libro che continuamente ci sta aperto innanzi a gli occhi (io dico l'universo), ma non si può intender la lingua, e conoscer i caratteri, ne' quali è scritto. Egli è scritto in lingua matematica, e i caratteri sono triangoli, cerchi ed altre figure geometriche, senza i quali mezi è impossibile a intenderne umanamente parola; senza questi è un aggirarsi vanamente per un oscuro laberinto ... ».

Questa massima di GALILEO è notissima: noi la prenderemo come una piattaforma sulla quale verremo depositando via via le concezioni matematiche che l'hanno seguita, cercando di illustrare la perfetta coerenza di queste su quella.

A prima vista apparisce un contrasto fra questa massima e l'opera conclusiva di LAGRANGE: si chiude un'epoca nella storia della Matematica e i caratteri dichiarati da GALILEO appariscono totalmente cambiati. Da una parte le figure geometriche, dall'altra nessuna figura, solo il procedere con un susseguirsi di formule.

Perchè, nella massima di GALILEO, fra i caratteri necessari, non sono citate le formule algebriche e la loro architettura? GALILEO procede per discorso e non fa uso dell'algebra; egli si attacca sostanzialmente ad ARCHIMEDE e alla geometria greca. L'Algebra, la nuova grande Arte (secondo GEROLAMO CARDANO (1545)) si era sviluppata da poco. Non è possibile qui tratteggiare i momenti essenziali che, partendo dall'aritmetica pratica, condussero alla sua formazione: basti in questo momento fare affiorare in noi il senso delle formule algebriche e la loro validità malgrado l'arbitrarietà dei valori che si possono attribuire alle lettere in esse contenute.

Imparammo a risolvere le equazioni di primo e di secondo grado; gli algebristi italiani del Rinascimento (DAL FERRO, TARTAGLIA, CARDANO, FERRARI) pervennero alle soluzioni delle equazioni di terzo e quarto grado mediante radicali (cioè mediante estrazioni di radice). Queste risoluzioni che, attraverso BOMBELLI e VIETA, presero più tardi l'aspetto esteriore compatto di formule algebriche come oggi si concepiscono, costituivano, al loro primo apparire, qualcosa di raffinato e il movente principale per l'introduzione dei numeri immaginari, cioè di quei numeri che, in linguaggio moderno, si pensano come costituenti il « campo numerico complesso ». Tali formule risolutive hanno l'aspetto più complicato ma analogo a quello delle formule risolutive delle equazioni di secondo grado che imparammo a conoscere.

FERMAT e principalmente CARTESIO, nella prima metà del '600, proprio all'epoca di GALILEO, pervennero a una intima fusione dell'Algebra con la Geometria, istituendo il « metodo della Geometria analitica » (1637) che si vale, come oggi si dice, del riferimento cartesiano (coppia di assi cartesiani sul piano, terna di assi cartesiani nello spazio, assi che possiamo supporre a due a due ortogonali). In questa concezione, una figura geometrica viene ad essere individuata mediante una o più equazioni che legano le coordinate del punto che si muove sulla figura stessa. Si noti quanto essenziale sia stato il formalismo algebrico per dare sostanza a questo metodo col quale le figure geometriche e i corrispondenti legami fra numeri (le coordinate) diventano la stessa cosa, quando sia fissato il riferimento cartesiano. Da questo momento i caratteri forniti dalla geometria per il libro della natura possono prendere l'aspetto, non soltanto di cerchi, cilindri, coni ecc., ma anche delle formule algebriche che definiscono queste figure.

Ma ancora una cosa essenziale mancava per leggere il libro della natura: intendo dire l'Analisi infinitesimale. La nozione di infinitesimo, presentatasi in una forma speciale e statica nei ragionamenti « per esaustione » della geometria greca, doveva rendersi più sciolta e vitale; avrebbe dovuto soprattutto adattarsi a un calcolo somigliante a quello dell'algebra usuale nello spirito di BOMBELLI e VIETA. Quali erano le ragioni che chiedevano questo nuovo ampliamento?

Nello studio dei fenomeni naturali accade spesso di dover considerare sistemi e cause che agiscono su di essi producendo degli effetti. È ben noto il concetto di « funzione » per il quale, accanto a una quantità variabile, chiamiamola x, se ne considera un'altra y, costruita in dipendenza della precedente con una legge determinata (per esempio assegnata mediante una formula algebrica quale $y = 5x^2$). In questo momento noi possiamo pensare una variazione della x come una variazione della causa, e la corrispondente variazione della y come variazione dell'effetto da essa prodotto. L'utilità dell'Analisi infinitesimale risulta dal fatto che l'osservazione dei fenomeni naturali consente di stabilire in generale la validità del seguente principio: a piccole variazioni delle cause corrispondono piccole variazioni degli effetti; di più, le piccole variazioni degli effetti risultano approssimativamente proporzionali a quelle delle cause, nel senso che se si raddoppiano, triplicano ecc. le piccole variazioni delle cause, risultano raddoppiate, triplicate ecc. le piccole variazioni degli effetti. Sorgono a questo punto le nozioni di differenziale e di derivata di una funzione e quelle analoghe dei differenziali e delle derivate degli ordini superiori che risultano dall'analisi, per dir così, sempre più microscopica del comportamento della funzione y rispetto alla variabile indipendente x. La derivata di y rispetto a x è il coefficiente di proporzionalità fra le piccole variazioni di y e le piccole variazioni di x che le provocano; come si può brevemente dire, detta derivata è il rapporto fra l'incremento infinitesimo di y e l'incremento infinitesimo di x che lo produce; le derivate successive risultano dall'analisi dell'approssimazione nella suddetta proporzionalità.

Il problema fondamentale fu quello di istituire un calcolo degli ifinitesimi, nel quale le quantità finite e gli infinitesimi (questi eventualmente con regole speciali) potessero inquadrarsi in formule del tipo di quelle dell'Algebra di cui abbiamo prima parlato. Ebbene: l'opera di NEWTON e della scuola inglese, e quella di LEIBNIZ, della dinastia dei BERNOULLI e della scuola continentale europea, per un periodo che si prolunga per più di un secolo, hanno costruito l'Analisi infinitesimale aderente ai problemi posti dalla Geometria e dalla Meccanica. È da segnalare, come uno dei momenti decisivi di questo periodo, la invenzione della serie di GIOVANNI BERNOULLI (1694) e di TAYLOR (1715) detta « serie di Taylor », la quale risponde sostanzialmente al seguente quesito: l'analisi, sempre più microscopica, che conduce alle derivate e ai differenziali di ordine superiore, consente di risalire dalla variazione finita (cioè non infinitesima) delle cause a quella finita degli effetti? Ebbene, sì: variazione finita, purchè tenuta entro certi limiti.

Possiamo dire che la formula algebrica delle quantità finite, di concezione angusta, si adatta, si amplia, si anima innestando lo spirito di NEWTON e di LEIBNIZ su quello di BOMBELLI e VIETA .

Dopo GALILEO, muniti degli strumenti della Geometria analitica e dell'Analisi infinitesimale e seguendo l'opera immortale di NEWTON, i grandi matematici del '600 e del '700 sono giunti alla fine, con EULERO e LAGRANGE, a completare in maniera mirabile quella che si può pensare una aspirazione di ARCHIMEDE, per i germi e i moventi che si trovano nella sua opera, cioè ad inquadrare costruttivamente la Meccanica alla pari di quello che era stato fatto per la Geometria. In particolare, come abbiamo già osservato, il LAGRANGE ha ritenuto di porre a coronamento della costruzione la sua « Meccanica analitica » che, sfruttando in pieno le concezioni di FERMAT e di CARTESIO, e quelle del calcolo infinitesimale, traduce in forma puramente analitica i concetti della Geometria e della Meccanica.

È stata ampliata la conoscenza dei caratteri con i quali è scritto il libro della natura e quest'opera si inserisce, con perfetta coerenza, nella massima di GALILEO.

Immaginiamo dunque di chiudere con EULERO e LAGRANGE un periodo, e volgiamoci al periodo successivo.

Due aforismi sulla Matematica.

La rivoluzione francese e gli eventi sociali che l'accompagnarono, anche a distanza di tempo, ebbero notevole influenza sul progresso scientifico. Si manifestarono cambiamenti radicali, specialmente in Francia e, con qualche ritardo, altrove, sull'organizzazione degli studi e della ricerca: tale organizzazione affidata prima alle Accademie, passò anche nelle scuole e la diffusione dei risultati, affidata prima agli atti accademici, prese come strumento le riviste scientifiche e i periodici sempre più pronti a seguire i progressi via via conseguiti dalle scuole stesse.

Ci viene incontro la Matematica dell'800 che meriterebbe uno splendido affresco. Se il 600 e il 700, preceduti da un « largo con pause », hanno avuto un « andante maestoso », l'800 si inizia con un « andante mosso » che, nella seconda metà, si fa sempre più « concitato » e si prolunga fino alla prima guerra mondiale; dopo di questa, la Matematica procede con andatura tumultuosa.

Ai primi del 900, lo HILBERT, caposcuola di una concezione riguardante i Fondamenti della Matematica, per sintetizzare il suo atteggiamento dice: « *In principio è il segno* » e il filosofo-matematico inglese RUSSELL dice: « La matematica è una scienza nella quale non si ha mai bisogno di sapere di che cosa si parla e neppure di sapere se quello che si dice sia vero ».

È forse temerario da parte mia iniziare quello che dovrebbe essere un affresco della Matematica dell'800 con questi due aforismi del 900, il primo di sapore biblico, l'altro di sapore scettico e polemico, ambedue avulsi dal testo e dall'opera degli autori; e sono trepidante, perchè il mio assunto vorrebbe essere quello di mostrarveli, per dir così, controluce per scorgerne la vera incisiva filigrana. Essi costituiscono una meta che terremo presente e raggiungeremo a tappe; alla fine li deporremo, in perfetta coerenza, su quella massima di GALILEO.

Sono trepidante perchè potrò fallire, ma il mio assunto è di mostrare che quella massima verrà ad arricchirsi via via di nuovi significati: per ora vi abbiamo già inserito la concezione della Meccanica secondo LAGRANGE. Constateremo che con l'ampliarsi della matrice che fornisce i caratteri con i quali è scritto il libro della natura, i legami fra quei caratteri e la natura saranno sempre conservati e si manterranno saldi: saldi ma sempre più flessibili, saldi ma non indissolubili, saldi ma pronti a sciogliersi per ricomporsi poi in atteggiamenti più raffinati e per consentire alla mente umana di penetrare più a fondo nella lettura, attraverso processi che realizzano una sempre più intensa economia di pensiero; saldi per la certezza che le posizioni raggiunte si riveleranno pronte alla descrizione degli aspetti più inattesi.

Laplace e il Calcolo delle probabilità.

Il LAPLACE, continuatore di EULERO e LAGRANGE, si dedicò allo studio della Meccanica celeste: in particolare egli studiò a fondo il movimento del sistema solare in base ai principi della Meccanica analitica lasciando un'opera celebrata. Il cosiddetto « determinismo meccanico », secondo il quale rapporti necessari di causalità regolano tutti i fenomeni meccanici, è posto in rilievo da questa sua immagine che si trova nella *Théorie analytique des probabilités* (1812). « Noi dunque dobbiamo immaginare lo stato presente dell'universo come l'effetto del suo stato anteriore e come la causa di quello che lo seguirà. Una intelligenza che, per un istante dato, conoscesse tutte le forze di cui la natura è animata e la situazione rispettiva degli enti che la compongono, se d'altronde ella fosse abbastanza vasta da sottomettere questi dati all'Analisi, abbraccerebbe nella stessa formula i movimenti dei più grandi corpi dell'universo e quelli del più leggero atomo; nulla sarebbe incerto per essa, e l'avvenire sarebbe presente ai suoi occhi ». Così dice il LAPLACE.

Pur basandosi sopra la Meccanica analitica, egli introdusse nuove idee che, a nostro avviso, costituiscono un momento decisivo. Si tratta della introduzione dei concetti aleatori nello studio dei fenomeni meccanici.

Lanciamo un dado: frulla nell'aria, cade, batte, rimbalza, rotola, sta: leggiamo il punto: è 2. Questa è un'esperienza concettualmente notevole: bastano lievissime insensibili variazioni nelle modalità dell'atto del lancio, perchè nel susseguirsi delle fasi successive, sopra accennate, l'effetto finale cambi in maniera imprevedibile. Il presentarsi del punto 2 è dovuto al *caso*. L'esperienza insegna che ripetendo mille volte il lancio, il punto 2 si presenta un numero di volte all'incirca uguale alla sesta parte di mille.

Questa e simili esperienze, come quelle delle estrazioni da urne e dei giochi d'azzardo, sono ben diverse da quelle alle quali fummo invitati a pensare quando, all'inizio dello studio della geometria, dovemmo apprestarci le idee intuitive di punto, di retta e di piano con granellini di sabbia, fili tesi e acqua stagnante; pur tuttavia anch'esse sono da interpretarsi come didascalie e precisamente per quel ramo della matematica che si chiama « Calcolo delle probabilità ». Al seguito di PASCAL, FERMAT, HUYGENS, GIACOMO BERNOULLI, DEMOIVRE, EULERO, intorno al 1770, prima il LAGRANGE e poi il LAPLACE iniziarono i loro studi sul calcolo delle probabilità. Specialmente importanti furono quelli del LAPLACE, che vennero coordinati nella sua « *Théorie analytiques des probabilités* ». Già nel 1773 egli dice: « Io mi propongo di determinare la probabilità delle cause attraverso gli avvenimenti, materia nuova sotto molti riguardi e che merita di essere molto coltivata tanto più che è principalmente da questo punto di vista che la scienza del *caso* può essere utile alla vita civile ». Così dice il LAPLACE. In questo ordine di idee si tratta di sottoporre a inchiesta quello che si suol chiamare il « caso », al fine di ricavarne risultati che nel loro insieme, alla lunga, conducono verso regolarità sorprendenti.

Il CASTELNUOVO dice: « È merito sommo di LAPLACE di aver posto e, in parte, risolto una questione che spiega i successi del calcolo delle probabilità nella maggior parte delle teorie a cui fu applicato. Il LAPLACE non diede il risultato definitivo se non quando GAUSS, con maggior fortuna, ma partendo da basi meno larghe e meno solide, giunse alla nota legge esponenziale degli errori. È giusto però attribuire al grande matematico francese il vanto di aver scoperto la vera sorgente delle singolari regolarità che il caso presenta. Sotto ipotesi semplificatrici, ma però molto larghe — è questo in sostanza il teorema di LAPLACE — il *caso*, cioè l'effetto risultante di un gran numero di piccole cause indipendenti, ubbidisce approssimativamente alla legge esponenziale degli errori. Questa permette adunque di prevedere come si distribuiscono i valori forniti dal *caso* in un gran numero di prove. Il teorema di LAPLACE ha un'immensa portata ». Così il CASTELNUOVO (1918).

Insieme a LAPLACE, e immediatamente dopo, GAUSS e POISSON pervennero a risultati fondamentali su questa teoria che, più tardi, nella seconda metà dell'800 si consolidò principalmente per opera di ČEBIČEV e della sua scuola.

Le leggi che regolano la distribuzione degli errori di osservazione, il cosiddetto metodo dei minimi quadrati, la statistica, la teoria cinetica dei gas e la termodinamica sono tutte basate sui principi del Calcolo delle probabilità che consente di spiegare molti fenomeni come, per esempio, i processi irreversibili (cioè il passaggio dall'eterogeneo all'omogeneo) che escono dal quadro della dinamica classica.

La moderna Meccanica statistica e le concezioni della Fisica teorica si valgono di questo strumento nel quale la certezza di un evento assume l'aspetto di una grande probabilità, di una estrema probabilità. Ma qui non parlerò della Fisica matematica sulla quale, qualche anno fa (1953), ascoltammo, proprio in questa sede, il magistrale discorso inaugurale del collega BRUNO FINZI; qui voglio soltanto segnalare due fatti che pongono in rilievo quanto quella concezione del LAPLACE costituisca un momento cruciale: in primo luogo, il Calcolo delle probabilità venne definitivamente e meglio inserito nel processo analitico proprio dell'Analisi infinitesimale; in secondo luogo, con LAPLACE e GAUSS, venne totalmente cambiata la concezione metrologica: infatti, la più che bimillenaria concezione della misura delle grandezze contenuta nel libro V di EUCLIDE — Rapporti e proporzioni — che serve anche alla costruzione del campo numerico, veniva superata dalla nuova concezione, sulla quale sono venute ad appoggiarsi anche le moderne teorie fisiche.

Voglio sottolineare ancora quanto sia grande il genio di LAPLACE, che, pur essendo investito della concezione del determinismo meccanico, secondo la frase che di lui abbiamo ricordato, riesce ad evaderne con il nuovo strumento adatto alla intelligenza di modulo umano: egli sopraggiunge nel momento in cui con EULERO e LAGRANGE si perfeziona una sintesi, e ne esce con idee nuove indelebili.

Galois e la nozione di gruppo.

Veniamo a un secondo momento decisivo del quale è protagonista il GALOIS.

Gli algebristi del Rinascimento avevano risolto con formule contenenti radicali, le equazioni di terzo e quarto grado. Si presentava il problema generale di risolvere in modo analogo le equazioni algebriche di grado superiore al quarto. Nel 1771 comparvero simultaneamente le memorie di LAGRANGE, MALFATTI e VANDERMONDE i quali indipendentemente l'uno dall'altro, studiavano le equazioni algebriche: particolarmente importante è la memoria di LAGRANGE che introduce una nozione di « risolvente » di forma speciale, che va sotto il suo nome. Nel 1799 il RUFFINI, in una memoria rimasta a lungo ignorata, dimostrò che è impossibile risolvere per radicali l'equazione generale di quinto grado: risultato ritrovato poi anche da ABEL che classificò le particolari equazioni di grado superiore al quarto risolubili per radicali.

Ma l'opera che emerge in questo campo è quella del GALOIS. Non è qui possibile illustrare il procedimento concettuale che conduce alla ricerca di certi numeri da introdurre nel campo numerico dei coefficienti, al fine di rompere la solidarietà dell'insieme delle soluzioni della equazione algebrica. La teoria generale in questo senso veniva sostanzialmente formulata dal giovane GALOIS (1829). In quella notte, presago della fine violenta imminente, con lena affannata egli scriveva; cercava di dar forma alla teoria in lui già maturata e lasciava un testamento matematico che costituisce un prodigio: la sua interpretazione è stata difficile e lenta durante i decenni successivi, ma ha aperto al mondo matematico nuovi orizzonti.

La distinzione essenziale fra invarianza formale e invarianza numerica delle espressioni, di fronte al permutarsi delle loro variabili, distinzione nella quale sembrano giungere, come filtrati, lo spirito di DIOFANTO e quello del FERMAT, e la concezione di *gruppo* costituito dalle permutazioni sulle n soluzioni della equazione di grado n utile alla ricerca dei numeri adatti per risolvere l'equazione (cioè adatti per rompere la solidarietà dell'insieme delle n soluzioni definite in blocco dall'equazione stessa), sono i moventi essenziali di quella teoria. In quel momento e nel primordiale esempio delle permutazioni, prendeva consistenza la nozione di gruppo che in seguito ha riempito di sè l'Algebra, la Geometria, la Meccanica, l'Analisi, la Fisica matematica, la Fisica teorica.

Poncelet: le proprietà proiettive. Gli isperspazi. Le matrici.

Un altro momento importante è costituito dalla comparsa dell'opera del PONCELET, *Traité des propriétés projectives des figures* (1822). In esso si consolidano e si fondono in modo organico due concezioni che si erano venute maturando nel campo della Geometria: da una parte, la considerazione delle proprietà delle figure che rimangono invarianti, come suol dirsi, « per proiezione e sezione »; dall'altra, la considerazione dello spazio i cui punti hanno come coordinate numeri complessi. Per mettere a fuoco la prima di queste concezioni, si rifletta che la Geometria euclidea elementare prende in esame le proprietà delle figure che rimangono invarianti per spostamenti rigidi di esse o, come oggi si suol dire — poichè gli spostamenti rigidi costituiscono un gruppo — « invarianti per il gruppo degli spostamenti rigidi ». Un gruppo più ampio del precedente di trasformazioni dello spazio in sé è quello delle cosiddette omografie, che conservano l'allineamento dei punti e non necessariamente le loro mutue distanze. Di fronte a questo gruppo più ampio, le proprietà delle figure risultano più essenziali: il loro studio costituisce la Geometria proiettiva alla quale viene subordinata la Geometria euclidea: nella Geometria proiettiva si prendono in considerazione anche i cosiddetti « punti all'infinito » dello spazio.

Ma ciò non basta: il metodo della Geometria analitica aveva insegnato a riferire lo spazio a una terna di assi cartesiani in guisa che ad ogni punto corrispondesse una terna ordinata (x, y, z) di numeri reali e viceversa, anzi, lo spirito di tale metodo consiste nel seguire la Geometria come Geometria di quelle terne di numeri reali, resa visibile dall'intuizione geometrica consueta. Dopo che il campo dei numeri reali si è ampliato nel campo dei numeri complessi, la Geometria analitica si può svolgere sulle terne ordinate (x, y, z) di questi numeri, nel senso che ogni punto si pensa individuato da una terna di numeri complessi. Viene a mancare l'appoggio intuitivo dello spazio euclideo, ma le stesse operazioni algebriche che guidavano la geometria sulle terne reali la guideranno anche sulle terne complesse. Lo studio di questa nuova geometria illumina e chiarisce anche i problemi classici nel campo reale.

Dobbiamo sorvolare sulle modalità che si devono seguire (introduzione delle coordinate omogenee) per considerare anche i punti all'infinito; diremo soltanto che gli enti algebrici (curve, superficie) trovano nello spazio a coordinate complesse il loro ambiente naturale: per esempio, prende consistenza geometrica il teorema di BÉZOUT (1779) secondo il quale due curve algebriche piane dei rispettivi ordini m ed n, prive di parti in comune, presentano sempre $m \cdot n$ intersezioni (quando ciascuna di esse venga computata secondo un appropriato ordine di molteplicità e si tenga conto anche di quelle che si trovano all'infinito). Ma l'accento poteva essere posto sulle proprietà proiettive delle figure nello spazio a coordinate complesse: anche la nozione squisitamente metrica di angolo si riconduceva col LAGUERRE (1853) a nozione proiettiva.

Siamo condotti spontaneamente alla nozione di iperspazio: se un punto viene definito (anzichè da una terna di numeri reali o complessi) da un allineamento di n numeri o, come si suol dire, da una n-upla ordinata di numeri (reali o complessi), l'insieme di tali punti costituisce quello che i matematici chiamano iperspazio o spazio ad n dimensioni: in esso si possono definire, secondo lo spirito di CARTESIO, le figure geometriche mediante relazioni fra numeri e si può sviluppare una Geometria degli iperspazi. Non è possibile, neppure sommariamente, delineare questo sviluppo che, durante l'800, ha presentato molteplici aspetti: per quanto riguarda l'aderenza alla realtà ci limitiamo ad osservare che l'insieme degli eventi fisici, ciascuno dei quali è individuato dalla posizione (x, y, z) e dal tempo t, risulta uno spazio a quattro dimensioni (x, y, z, t); analogamente le configurazioni di un sistema meccanico con n gradi di libertà sono punti di uno spazio ad n dimensioni e il movimento del sistema stesso ha per immagine, in questo spazio, il movimento di un punto lungo una linea.

L'opera di CAYLEY, CLIFFORD, GRASSMANN e SCHLAEFLI si rivolse agli aspetti metrici della Geometria degli iperspazi, mentre gli aspetti proiettivi ne vennero mirabilmente studiati dalla scuola geometrica italiana: ricordiamo CREMONA, CORRADO SEGRE, BERTINI.

Lo studio della Geometria metrica e di quella proiettiva degli iperspazi e lo studio delle cosiddette forme algebriche condusse alla considerazione di quadri di numeri, detti « matrici » che la Matematica concepisce oggi come enti sui quali è istituito un calcolo — il calcolo delle matrici — come se fossero dei numeri: questo calcolo è una generalizzazione elevata e raffinata dell'algebra a noi nota dall'adolescenza. È veramente singolare come le matrici, cioè questi quadri di numeri, presentino aspetti reconditi della loro anatomia; aspetti che si manifestano attraverso algoritmi di calcolo e che segnalano fatti geometrici connessi alle trasformazioni degli iperspazi. La teoria delle matrici costituisce uno strumento di indagine compatto, utile in molte circostanze nelle quali la complessità del fenomeno non consentirebbe alla nostra mente di seguirlo con una intuizione diretta. Il CAYLEY, il SILVESTER, il FROBENIUS, nella seconda metà dell'800, sono i tipici rappresentanti del gusto matematico in questo settore.

La teoria delle matrici, che ha dato origine anche a quella delle cosiddette « algebre », trova applicazione, oltre che nella Geometria, anche nella Meccanica, nella Fisica-matematica, nella Fisica teorica, nell'Economia matematica (matrice di LEONTIEV) ecc..

Le serie di Fourier. L'esigenza di rigore e il concetto di funzione.

Accenniamo alla serie di FOURIER la cui comparsa all'inizio dell'800 costituisce un altro momento decisivo per l'Analisi. Lo studio sistematico dei problemi riguardanti la temperatura stazionaria nei conduttori di calore, portò il FOURIER a soluzioni espresse mediante un tipo di serie che porta il suo nome, e che si incontrano anche nello studio dei movimenti vibratori. Si tratta di una rappresentazione per serie del tutto nuova rispetto alle concezioni classiche: essa procede per seni e coseni e si adatta anche a funzioni molto discontinue. I vari termini rappresentano le cosiddette « vibrazioni elementari » del sistema, mediante le quali si costruisce la soluzione.

La possibilità di rappresentare funzioni assegnate arbitrariamente, comunque discontinue, venne affermata dal FOURIER nel 1807 e da lui dimostrata senza completo rigore. A causa di ciò sorsero polemiche che investirono il concetto di funzione, fondamentale per l'Analisi: da una parte la concezione euleriana, dall'altra la concezione di FOURIER.

Mentre nella concezione classica, e che appunto diciamo euleriana, la funzione era pensata come espressa mediante formule esplicite oppure, al più, rappresentata mediante la serie di TAYLOR e in ogni caso continua e fornita di derivate continue di qualunque ordine, il FOURIER aveva dato il modo di rappresentare mediante una serie — cioè di rappresentare analiticamente con un passaggio a limite — una funzione assegnata con legge arbitraria e quindi anche non continua o non derivabile (per esempio anche quando la sua rappresentazione grafica si presenta come una spezzata e anche con salti). L'affermazione di FOURIER venne dimostrata più tardi, rigorosamente e sotto ampie ipotesi, dal DIRICHLET (1829) che pose il concetto di funzione definita con legge arbitraria, punto per punto o, come si suol dire, « definita puntualmente ». Le polemiche alle quali abbiamo accennato rivelano che, nella Matematica, si andava formando un nuovo atteggiamento che caratterizza l'inizio dell'800, vogliamo dire l'*esigenza di rigore*.

L'operazione di passaggio a limite, necessaria per l'Analisi infinitesimale e presente in ogni algoritmo infinito (serie, prodotti infiniti ecc.) venne sottoposta a studio critico dal CAUCHY e dal BOLZANO.

D'altronde il CAUCHY iniziò sistematicamente anche lo studio delle funzioni della variabile complessa con le quali si trasporta nel campo dei numeri complessi la concezione euleriana delle funzioni fornite di derivate continue di qualunque ordine e per le quali vale lo sviluppo in serie di TAYLOR: anzi la considerazione del campo complesso veniva ad illuminare circostanze inspiegabili nel campo reale. Con l'opera di CAUCHY il concetto di funzione prende due aspetti che guidano, su due diverse vie, lo studio dell'Analisi dell'800:

da una parte, le funzioni nel campo complesso sviluppabili in serie di TAYLOR e dall'altra le funzioni di variabili reali, assegnate con legge arbitraria. Mentre la teoria delle funzioni di variabile complessa si andava costruendo con aderenza agli enti di tipo classico (sopra gli integrali ellittici, curati con fervore da LEGENDRE, viene il colpo d'ala di ABEL: questi ne studia l'inversione e crea le funzioni ellittiche, esempio insigne di trascendenti per la doppia periodicità e per i teoremi di addizione; e viene ancora l'opera di ABEL e JACOBI sugli integrali delle funzioni algebriche, la loro polidromia, il problema dell'inversione, le funzioni *theta*, ecc.), l'orientamento verso le funzioni di variabile reale si presentava con carattere di novità strana: in questo orientamento tutto era da rifare, tutto da ricostruire con rigore concedendo alla funzione arbitrariamente assegnata il minimo delle ipotesi per giungere alle conseguenti proprietà; per ogni questione, per esempio integrabilità, continuità, derivabilità, concetto di linea, equazioni differenziali, lo spirito informatore nuovo conduceva a risultati spesso inattesi e apparentemente in contrasto con quelli istintivi delle posizioni classiche.

RIEMANN e WEIERSTRASS, i due più grandi che seguirono, a distanza di tempo, il CAUCHY, portarono con le loro opere contributi fondamentali sia all'uno che all'altro dei due orientamenti. Non ci è consentito qui di delineare il meraviglioso sviluppo delle teorie stesse: diremo soltanto che con il WEIERSTRASS il concetto di funzione di variabile complessa si perfeziona in quello di funzione analitica, definita per prolungamento in tutto il campo di regolarità (detto campo d'esistenza) partendo dallo sviluppo di TAYLOR nell'intorno di un punto, fino alla frontiera del campo stesso: su questa frontiera sono localizzate le singolarità della funzione analitica che, alla loro volta, caratterizzano la funzione anche all'interno del campo ove essa è regolare. Adesso osserviamo che la descrizione delle singolarità delle funzioni analitiche richiede, nei casi meno semplici, i concetti e il linguaggio della teoria delle funzioni di variabile reale e pertanto le vedute del WEIERSTRASS conducono a una confluenza, come a una sintesi dialettica fra i due opposti orientamenti diramatisi con l'opera del CAUCHY.

Le funzioni di variabili reali. Gli insiemi di punti.

Il TONELLI scriveva nel 1928: « Nel decennio fra il 1870 e il 1880, mentre in Germania la critica penetrante di DEDEKIND, CANTOR, DU BOIS-REYMOND, HEINE, SCHWARZ, WEIERSTRASS ed altri, metteva in discussione i fondamenti dell'Analisi matematica, sollevando contro di essi dubbi ed obbiezioni e cercando di porli in forma logicamente inattacabile, e mentre, in Francia, DARBOUX, con la sua celebre memoria sulle funzioni discontinue, mostrava la necessità del moderno rigore matematico, in Italia, ULISSE DINI, allora giovanissimo professore dell'Università di Pisa, procedeva, nelle sue lezioni universitarie, ad una sistematica revisione di tutti i principi dell'Analisi infinitesimale, e raccoglieva i risultati dei suoi studi in un volume, pubblicato nel 1878, col titolo *Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali*. La cosiddetta « Teoria delle funzioni di variabili reali » ebbe precisamente origine da questo libro del DINI ». Così dice il TONELLI.

L'esigenza di rigore sorta, come abbiamo già detto, con CAUCHY e BOLZANO, nei primi decenni dell'800, si fece sempre più stringente con il DIRICHLET e poi con il RIEMANN verso la metà dello stesso secolo.

Noi che riguardiamo a distanza di ottanta anni l'epoca ricordata dal TONELLI, sentiamo relizzata dalle vedute del WEIERSTRASS la sintesi concettuale fra due tendenze della quale abbiamo detto or ora: orientativa per questo apprezzamento è la scoperta del WEIERSTRASS di funzioni continue in tutto un intervallo e che in nessun punto di questo ammettono derivata (val quanto dire curve continue che non ammettono tangente in alcun loro punto): tali funzioni sono da lui costruite mediante serie convergenti che rappresentano il valore assunto sul cerchio di convergenza da una funzione analitica sviluppata in serie di TAYLOR. Una tale sintesi era troppo precorritrice per essere sentita e vissuta da coloro che si trovavano immersi in quella evoluzione: l'opera dei matematici, allora come sempre, era impostata su atteggiamenti che potevano ancorarsi più o meno alla tradizione oppure staccarsene del tutto, ed era guidata da moventi di gusto che inducevano talvolta l'una a non apprezzare nella giusta misura l'altra tendenza. Ricordiamo che l'insigne HERMITE confessava, scrivendo a STIELTJES (1893) « Io mi discosto con spavento e orrore dalla lamentevole piaga delle funzioni continue che non hanno derivate ». Giungeva a proposito l'opera sistematica del DINI che costituiva il coordinamento di quella che potremmo dire l'« età di mezzo » della Teoria delle funzioni di variabili reali e la base ampia per gli sviluppi futuri: all'inizio del 900, per opera principalmente della Scuola francese, si presenterà un afflusso di idee nuove sul quale ritornerò più avanti nel mio discorso.

Ma già in quella « età di mezzo » l'opera degli analisti è ricca di moventi e di risultati: ci limiteremo a ricordare quelli di PEANO che, nello spirito di CAUCHY e LIPSCHITZ e con semplicità estrema, perviene a stabilire alcuni risultati nel campo delle equazioni differenziali ponendo in rilievo quella che potremmo dire la « smussatezza critica » dei dati, utile per la validità di certi teoremi classici.

Lo studio delle funzioni definite punto per punto e con legge arbitraria (secondo DIRICHLET), condotto con intento critico, portò alla teoria degli insiemi di punti che alla fine dell'800 prese consistenza per opera di CANTOR: questa teoria preparò alle « antinomie » o « paradossi » che ebbero tanta influenza sui fondamenti della Matematica. Qui vogliamo richiamare l'attenzione sull'inatteso aspetto di alcuni risultati in questo ordine di idee e ricorderemo che il PEANO è riuscito a dare l'esempio di una curva continua che riempie un quadrato: questo esempio, che lo HAUSDORFF definisce « uno dei fatti più mirabili della teoria degli insiemi », fa sentire la novità delle concezioni alle quali diede origine il momento decisivo dovuto al pensiero del FOURIER.

Le Geometrie non-euclidee.

Veniamo alle *Geometrie non-euclidee.*

La Geometria greca, pervenutaci attraverso gli elementi di Euclide, costituisce un modello di sistemazione ipotetico-deduttiva che ha conservato col passare dei secoli la sua freschezza. L'attenzione dei matematici si rivolse a indagare la struttura di quella sistemazione. In particolare attrasse l'attenzione, anche per il carattere speciale che sembra averle voluto attribuire EUCLIDE, la parte riguardante le rette parallele. Mentre con le prime 28 proposizioni del I libro degli Elementi si perviene a stabilire l'esistenza di rette parallele, anzi, si dimostra di più: « assegnata una retta e un punto fuori di essa esiste sempre *almeno una retta* passante per quel punto e parallela alla retta data », EUCLIDE si trova nella necessità di enunciare il cosiddetto « quinto postulato » che afferma l'*unicità* di tale parallela. Poniamo la questione: è possibile dimostrare oltre che l'esistenza anche l'unicità della parallela con le 28 proposizioni fissate precedentemente? In ciò consiste la « questione delle rette parallele ». Gli studi e i tentativi di padre SACCHERI, della prima metà del 700, rimasero dimenticati sino alla fine dell'800. Il GAUSS, nella sua prima giovinezza, ma soprattutto il matematico russo LOBAČEVSKIJ e i due matematici ungheresi BOLIAY, padre e figlio, intorno al 1830, tentarono, e con successo, la costruzione di una geometria associando la *negazione del postulato* V alle proposizioni precedenti di EUCLIDE. Nello sviluppo logico della loro costruzione non pervennero all'assurdo, ma ad un insieme coordinato di proposizioni, alcune delle quali molto strane: per esempio, da un punto fuori di una retta passano infinite rette che non hanno punti in comune con quella e che riempiono un angolo. Costruirono così un corpo di dottrina che venne chiamato *geometria non-euclidea* Ma, proseguendo, si sarebbe incontrato l'assurdo? Si verificò allora una situazione singolare nella storia della matematica: un corpo di dottrina di forma ipotetico-deduttiva di cui non si poteva né assegnare una specificazione geometrica concreta né asserire la coerenza interna. Questa situazione costituì un momento decisivo per il pensiero matematico poichè proiettò la sua influenza sugli sviluppi futuri e sugli orientamenti di tale pensiero. Lo spirito di LOBAČEVSKIJ e quello dei BOLIAY vennero placati quando, alcuni decenni più tardi, la coerenza logica della geometria non-euclidea venne dimostrata dal BELTRAMI e dal CAYLEY. Il BELTRAMI, fisso a questo scopo, costruì (1868) una superficie dello spazio euclideo che realizza il piano non-euclideo di LOBAČEVSKIJ: egli seguì le concezioni della Geometria di RIEMANN di cui diremo fra poco: mentre il CAYLEY, seguendo lo spirito di PONCELET, si imbattè incidentalmente in un piano non-euclideo costruito con proprietà globali.

La Geometria non-euclidea è come una gemma della matematica dell'800: ... un grande arco da EUCLIDE a LOBAČEVSKIJ e BOLIAY e ancora, come nel limbo della matematica, per alcuni decenni, fino a quando la confluenza dello spirito del RIEMANN con quello del PONCELET, interpreti BELTRAMI e CAYLEY, riconduce quella geometria a modelli contenuti nello spazio euclideo.

Accanto alla geometria non-euclidea di LOBAČEVSKIJ e BOLIAY, detta iperbolica, sussiste anche la geometria non-euclidea ellittica; queste due geometrie sono separate dalla geometria euclidea classica che costituisce come il taglio di separazione fra le due sopraggiunte.

Siamo in grado adesso di guardare controluce quel singolare aforisma di RUSSELL sulla matematica: lungo quei decenni che separarono LOBAČEVSKIJ da BELTRAMI, la Geometria non-euclidea si trova come testimone vitale a dare senso preciso a quell'aforisma. Infatti gli enti di cui parlava LOBAČEVSKIJ non avevano ricevuto specificazione concreta e non si sapeva di che cosa si parlasse; la coerenza logica non era stata dimostrata e pertanto non si sapeva se quello di cui si parlava fosse vero. Con il BELTRAMI giunse la specificazione concreta e la responsabilità di tale coerenza venne ricondotta su quella della familiare Geometria euclidea.

Gauss e la Geometria differenziale. Riemann di fronte a Gauss.

Nel 1828 comparvero le *Disquisitiones generales circa superficies curvas* del GAUSS: egli poneva le basi e sviluppava uno studio sistematico della Geometria differenziale delle superficie nel quale, fra l'altro, si inquadravano in modo elegante tutte le precedenti conoscenze dovute principalmente a EULERO e a MONGE: l'elemento lineare della superficie (riferita a parametri generali), cioè la distanza di un punto da quelli che gli sono infinitamente vicini, è una forma quadratica differenziale che regola la geometria sulla superficie stessa e ne pone in evidenza tutte le proprietà metriche che non dipendono dalla sua configurazione effettiva, ma che permangono quando essa venga deformata come una lamina perfettamente flessibile ma inestensibile (lunghezze di linee, angoli, linee geodetiche ecc.). Il GAUSS pervenne fra l'altro all'« egregio teorema » secondo il quale la curvatura totale (che è anche prodotto delle curvature principali) non si altera per pure flessioni della lamina. La configurazione effettiva di questa si manifesta con l'ausilio dell'immagine sferica delle normali e con altre quantità che furono interpretate successivamente come coefficienti di una seconda forma quadratica differenziale.

Nel 1851 il RIEMANN si laureva a Gottinga presentando la celebre dissertazione sulle funzioni di variabile complessa nella quale, tra l'altro, le superficie (oggi dette superficie di RIEMANN), spogliate di ogni proprietà metrica, ma ancora munite delle proprietà di « Analysis situs » (cioè topologiche) venivano, quasi magicamente, a illuminare quella teoria.

RIEMANN venticinquenne di fronte a GAUSS settantaquattrenne.

Due anni dopo, il RIEMANN conseguiva l'abilitazione alla libera docenza con due altre, anch'esse celebri, dissertazioni: l'una sulle serie trigonometriche, secondo lo spirito del DIRICHLET, e l'altra sui fondamenti della Geometria (1853). Tre opere singolari per originalità e profondità di concezione, al seguito delle quali il pensiero matematico ha trovato alimento nella seconda metà dell'800.

In questo momento ci interessa l'ultima delle tre dissertazioni: il RIEMANN prendeva in esame la nozione di spazio, sollecitato dal desiderio di porre in chiaro, anche da un punto di vista filosofico, i fondamenti della Geometria: i moventi e gli strumenti venivano suggeriti dagli studi sulla Geometria differenziale delle superficie col metodo inaugurato dal GAUSS.

Il RIEMANN è il primo geometra che si stacca totalmente da EUCLIDE anche nel movente iniziale. Nella sua concezione lo spazio a n dimensioni o, meglio, varietà a n dimensioni è un insieme di punti (n-uple di numeri, coordinate del punto) nel quale è fissata una legge che regola le distanze; questa legge assegna la distanza di un punto da quelli che gli sono infinitamente vicini mediante una forma quadratica differenziale. Tale forma è come qualcosa di assoluto, diffuso in tutto lo spazio, che consente di esprimere concettualmente la lunghezza delle linee, l'ampiezza degli angoli, l'area delle superficie, ecc. . Siamo in presenza di quello che oggi i matematici chiamano « spazio curvo ». Per dare l'idea di che cosa significhi ciò, consideriamo la rappresentazione topografica di un terreno molto accidentato sulla quale siano tracciate le linee di livello. La presenza di tali linee consente di ricavare dalla carta la distanza effettiva di due punti sul terreno anche se si trovano a livelli notevolmente diversi: le linee di livello forniscono la legge con la quale calcolare le distanze, e dalla carta si risale alla superficie curva effettiva e a tutte le sue proprietà (curvatura, geodetiche, ecc.). Tale carta, anche se piana, con quella legge su di essa distribuita, è una superficie curva: ebbene, il matematico, di fronte a un campo spaziale nel quale sia distribuita una legge secondo RIEMANN per il calcolo delle distanze, investito come da una semantica istintiva e riflessa ancorata alle emozioni in lui provocate dalle proprietà inerenti a casi più semplici, guarda e considera quel campo spaziale come uno spazio curvo che, per essere veramente tale, dovrebbe essere immerso in uno spazio di dimensione superiore, proprio come la superficie, anzichè essere contenuta nel piano, è immersa nello spazio ordinario. Ben si comprende come la sostanza sensibile di queste concezioni sia puramente analitica.

Il modello di Beltrami di piano non-euclideo è costruito sulla base di questi principi.

Gauss e Riemann: quanto e come diversi nei loro temperamenti! Da una parte il giovane Riemann, genio erompente e sfavillante, dall'altra il vecchio Gauss, genio universale, la cui ricchezza affiorante era soltanto una piccola parte di quella, grandissima, interiore — *Pauca sed matura* era il suo motto — quella piccola parte che, distillata e levigata in amore di perfezione, veniva da lui resa nota con la stampa.

Il vecchio Gauss sentiva avvicinarsi l'ora per lui suprema: aveva scelto questo tema per il Riemann, il terzo fra i tre proposti dal giovane candidato, sicuro che questi avrebbe detto una parola nuova. I fondamenti della Geometria: un tema affrontato e meditato nella prima giovinezza e che l'aveva accompagnato per tutta la vita. E adesso ascoltava: a lui solo era concesso di gustare con pienezza quello che il Riemann veniva dicendo. Forse, nella mente del vecchio, si affollavano tanti pensieri: il ricordo nitido della sua prima giovinezza, quando lo studio sulla negazione del postulato di Euclide l'aveva condotto alla geometria non-euclidea ed egli nulla aveva reso noto per non suscitare «le strida dei beoti», dei caudatari della filosofia dominante; le sensazioni indistinte sorgenti dalle sue *Disquisitiones arithmeticae* (1804), dall'Aritmetica, per lui «regina delle matematiche», che aveva meditato nella giovinezza e che l'aveva condotto al gusto delle forme quadratiche algebriche e più ancora aritmetiche; il ricordo, ben presente, dei suoi studi sulle superficie imperniati sulla forma quadratica differenziale che ne assegna l'elemento lineare e, da sola, ne caratterizza le proprietà essenziali invarianti per flessione, e che, accompagnata da altri elementi, in un abile giuoco di relazioni, in gran parte di sapore algebrico, caratterizza la superficie effettiva e tutte le sue proprietà metriche; l'emozione viva provata con la scoperta delle proprietà dei triangoli geodetici, proprietà di fondo precepite come collegamento alla geometria non-euclidea; ...

Egli, nell'ascoltare il Riemann, sentiva le concezioni di questo giovane innestarsi, come un vitale prolungamento, sull'opera sua: ancora la forma quadratica differenziale per definire le proprietà metriche sopra quelle di posizione; la nozione di curvatura in un punto secondo una data giacitura, come curvatura gaussiana di una superficie geodetica passante per quel punto; e, di più, il distacco dalla Geometria euclidea realizzato astrattamente, con un movente iniziale indipendente dalla considerazione dello spazio nel quale la varietà n-dimensionale è immersa, movente libero dal vincolo, sempre invece presente nelle concezioni precedenti, di proprietà globali che impegnino a priori tutta la varietà. In questa concezione, infatti, nessuna proprietà globale vincola lo spazio, come invece accade nella Geometria euclidea e nelle Geometrie non-euclidee di BOLIAY e LOBAČEVSKIJ: gli spazi di queste risultano aspetti particolari di quello di RIEMANN quando si richieda la possibilità di muovere le figure, entro lo spazio stesso, senza alterarne gli elementi metrici e tale richiesta conduce agli spazi di curvatura costante.

RIEMANN di fronte a GAUSS: ecco un altro momento decisivo del pensiero matematico.

Ricci-Curbastro: il Calcolo differenziale assoluto.

I concetti e le leggi della Geometria, della Meccanica e della Fisica-matematica debbono essere indipendenti dal riferimento scelto nello spazio nel quale tali enti sono immersi o, come si suol dire, debbono essere « invarianti ». L'uso del calcolo differenziale classico si rivelava strumento disagevole per rispondere ai requisiti in questo senso.

Il BELTRAMI e il CHRISTOFFEL considerarono le forme differenziali quadratiche (proprio quelle che dànno la legge della distanza negli spazi del RIEMANN) e studiarono il problema della loro equivalenza e certe formazioni dette « invarianti » e « covarianti » connesse con tali forme.

Ma chi affrontò con piena consapevolezza e con sistematicità il problema di modificare gli algoritmi del calcolo differenziale classico affinchè le formule e i risultati sussistano qualunque sia il sistema di variabili di cui si fa uso, fu il RICCI-CURBASTRO. Egli pervenne a un nuovo algoritmo detto « calcolo differenziale assoluto », perchè strutturato di fronte alla forma differenziale quadratica che dà la legge delle distanze e costituisce l'assoluto dello spazio. Uno dei momenti più importanti fu quello in cui egli pose la nozione delle derivate seconde covarianti. Il calcolo differenziale assoluto di RICCI-CURBASTRO, sviluppatosi poi nel cosiddetto Calcolo tensoriale, venne applicato come strumento analitico essenziale dall'EINSTEIN per la formulazione della sua Relatività generale.

Non è possibile qui illustrare i principi di tale calcolo; ci limiteremo a dire che in esso il complesso delle coordinate, in ogni momento, assume l'atteggiamento di un coro; un coro diretto dalla forma differenziale che è l'assoluto e sempre rivolto a indicare, con gesti schematici e misurati, gli invarianti e i covarianti che sono i protagonisti dell'azione. Stupenda invenzione a fondo sostanzialmente algebrico, nella quale sembrano confluire gli spiriti di VIETA, CARTESIO, LEIBNIZ, PONCELET, RIEMANN.

La concezione dello spazio secondo RIEMANN consente di adattarlo utilmente alla presenza di enti fisici e, secondo questo naturale criterio di adattabilità, lo spazio cartesiano si rivela disagevole quando non sia vuoto di certi enti fisici. Ben si comprende l'importanza del Calcolo tensoriale quando si rifletta che questo sta allo spazio di RIEMANN come il calcolo differenziale di NEWTON e LEIBNIZ sta allo spazio vuoto di CARTESIO.

La concezione dello spazio di RIEMANN, ancora ampliata in una forma più generale, e ancora accompagnata dall'algoritmo tensoriale, ha servito all'EINSTEIN per la sua ultima teoria della relatività detta «unitaria». Ma un altro aspetto finale del pensiero di EINSTEIN voglio qui segnalare: cioè quello che riconduce la rappresentazione del mondo fisico al movimento relativistico delle singolarità degli enti analitici. Vorrei, in questo momento, essere nel cuore degli insigni colleghi relativisti qui presenti, per capire fino a qual punto loro concordino con me nel sottolineare la potenza di questo gigante nella sintesi della rappresentazione del mondo fisico: egli raggiunge sul piano elevato di tutta la Fisica, la sintesi dialettica che investe tutta la Matematica, dagli aspetti squisitamente algebrici e algoritmici a quelli analitici e a quelli connessi con gli enti arbitrariamente assegnati; egli ripete a poco meno di un secolo di distanza una sintesi analoga a quella incontrata dal WEIERSTRASS nel campo delle funzioni analitiche, sulla quale poco fa, ho richiamato la Loro attenzione.

Per il pensiero matematico: due millenni da EUCLIDE e ARCHIMEDE fino a LAGRANGE; un secolo da RIEMANN e WEIERSTRASS all'EINSTEIN. Quello che abbiamo esposto fin qui vorrebbe presentare la trama di tanti lineamenti, molti dei quali confluiscono verso questa sintesi, formando una rete sulla quale è tessuta la Matematica. Basta un lievo tocco del pensiero a uno dei nodi di questa rete per vedere vibrare in risonanza gli altri nodi e tutti i fili che a quello convergono.

Lo splendore della Geometria. Il Programma di Erlangen. La Topologia.

È necessario fermarci per qualche istante a considerare lo splendore della Geometria dell'800. Abbiamo già ricordato la concezione di PONCELET che fu seguita da LAGUERRE, CHASLES e JONQUIÈRE, le Geometrie non-euclidee e l'indirizzo differenziale di MONGE, GAUSS e RIEMANN. Per una visione d'insieme volgiamoci al «Programma di Erlangen» di KLEIN la cui comparsa (1868) costituisce un altro momento decisivo. Questo «programma» poneva in evidenza un fondamento comune a tutte le Geometrie da ricercarsi nella nozione di *gruppo* di trasformazioni dello spazio in sé: proprio la nozione di gruppo venuta in luce con GALOIS.

In sostanza, ogni geometria veniva a caratterizzarsi come lo studio delle proprietà delle figure che rimangono invarianti rispetto alle trasformazioni di un gruppo; proprio come la classica Geometria euclidea è lo studio delle proprietà invarianti di fronte agli spostamenti rigidi.

La grande varietà di gruppi conduce a molti tipi di geometrie: e, d'altronde, due geometrie, anche se operano su enti diversi, possono riguardarsi come identiche quando i loro gruppi hanno la stessa struttura. Per esempio, l'insieme delle coniche del piano, quando venga riguardato come uno spazio, ha un sua geometria come spazio a 5 dimensioni nel quale ogni conica è *un punto*: come dice il POINCARÉ « La Matematica è l'arte di dare lo stesso nome a cose diverse ».

Secondo questa veduta: geometrie diverse possono essere una contenuta nell'altra; più ampio è il gruppo e meno numerose, ma più essenziali, diventano le proprietà invarianti di fronte ad esso. Per esempio, la Geometria euclidea è contenuta nella Geometria proiettiva e le proprietà proiettive sono più essenziali di quelle metriche.

La teoria delle forme algebriche (polinomi omogenei) e dei relativi invarianti e covarianti, accompagnava quella dei gruppi nella Geometria e costituiva una interpretazione analitica, nello spirito di CARTESIO, ma molto raffinata, dei fatti geometrici salienti: ancora una singolare fusione fra l'Algebra e la Geometria.

La nozione di gruppo si era andata ampliando: SOPHUS LIE considerava anche gruppi continui di trasformazioni, definiti mediante relazioni differenziali (dipendenti da un numero finito o anche da infiniti parametri), e ne indirizzava la teoria in modo utile per l'integrazione delle equazioni differenziali, sia ordinarie che a derivate parziali: e questo ancora si inquadrava, sebbene nella parte più « fluida », nel « Programma di Erlangen ».

Quando si considerino le proprietà geometriche delle figure che sono invarianti di fronte alle cosiddette « trasformazioni birazionali » sorge la Geometria algebrica: da questo punto di vista assumevano grande rilievo proprietà fondamentali scoperte da ABEL, RIEMANN, JACOBI e WEIERSTRASS (per non citare che i più grandi) riguardanti le curve algebriche, gli integrali delle funzioni razionali su di esse e l'inversione di tali integrali. La Geometria algebrica divenne splendida per opera specialmente della scuola italiana: ci vengono incontro i nomi di CORRADO SEGRE, BERTINI, CASTELNUOVO, ENRIQUES e SEVERI. Dalla geometria sulla curva si passò a quella sulle superficie e a quella sulle varietà algebriche: un modello insigne che scuole contemporanee, specialmente in America, tengono presente e seguono per una ricostruzione alla quale accennerò sul finire del mio discorso.

Nell'indirizzo differenziale la Geometria si sviluppò per opera principalmente di RIBAUCOUR, DARBOUX ed ELIE CARTAN, di BIANCHI e WEINGARTEN e delle loro scuole. Mentre il DARBOUX usò il metodo legato alle proprietà cinematiche del triedro mobile sulla superficie, non trascurando le occasioni che, nello spirito del POMCELET, l'immaginario all'infinito gli veniva talvolta presentando, il BIANCHI, guidato dal gusto algebrico, ampliò le basi dell'impianto di GAUSS con l'introduzione sistematica di forme differenziali quadratiche. Il BIANCHI studiò tra l'altro anche la Geometria entro gli spazi del RIEMANN a curvatura costante. Il LEVI-CIVITA, nell'indirizzo di RICCI CURBASTRO, istituì la nozione fondamentale del trasporto per parallelismo nelle varietà di RIEMANN. Il FUBINI inaugurò la Geometria proiettivo-differenziale come corpo di dottrina.

Ma della aspirazione all'unità e alla visione dall'alto, conviene qui ricordare un altro singolare documento del KLEIN: la sua opera « Das Ikosaeder » (1884). L'icosaedro: un poliedro regolare dell'antichità classica: esso appariva come il simbolo di una sintesi maturatasi nella seconda metà dell'800 quando stavano facendo presa le idee di GALOIS e quelle di RIEMANN. In essa trovano un raccordo i gruppi dei poliedri regolari, le forme algebriche e i loro invarianti, le equazioni algebriche secondo GALOIS, le funzioni analitiche di variabile complessa dette « automorfe », le equazioni differenziali nel campo analitico; non è possibile qui fermarci: ricordiamo soltanto che, nel 1858, HERMITE, KRONECKER e BRIOSCHII giungevano simultaneamente alla risoluzione della equazione generale di quinto grado per mezzo di funzioni modulari ellittiche, segnando un passo decisivo in avanti, oltre la soglia degli algebristi italiani del Rinascimento. Si tenga conto che il gruppo delle sessanta permutazioni di classe pari, sopra cinque lettere, è isomorfo con quello delle rotazioni che riportano in sé l'icosaedro, e che questo gruppo, interpretato come gruppo di sostituzioni lineari sulla variabile complessa, ha una rappresentazione su un reticolato piano che dà origine a funzioni automorfe: allora si intravedono i legami che abbiamo segnalato sopra.

Ricordiamo, fra i gruppi di trasformazioni a base della Geometria, come particolarmente importante, quello delle cosiddette trasformazioni topologiche, per le quali è conservata soltanto la continuità: è come se una figura fosse concepita illimitatamente elastica e si deformasse senza né rotture né sovrapposizioni. Le proprietà che ne risultano sono le cosiddette proprietà topologiche: come già abbiamo accennato esse furono poste in rilievo la prima volta dal RIEMANN nei suoi studi sulle funzioni analitiche; MOBIUS, BETTI, POINCARÉ mostrarono con le applicazioni alla Fisica matematica la loro importanza che divenne ognora crescente. La Topologia è divenuta uno dei campi fondamentali, una delle cosiddette « strutture » della Matematica e durante il 900 ha preso uno sviluppo grandioso.

La Teoria dei numeri: sua simbiosi con l'Algebra e l'Analisi.

Purtroppo ci manca il tempo per poter illustrare convenientemente i momenti decisivi di quella parte della Matematica che va sotto il nome di Teoria dei Numeri. FERMAT ed EULERO sono i due grandi che precedettero il periodo che ci interessa: nella loro tradizione continuarono LAGRANGE e LEGENDRE

(1798); ma più decisiva fu l'opera giovanile di GAUSS (1801) nella quale l'analisi indeterminata, presentata sotto l'aspetto di congruenza rispetto a moduli, prende più ampio respiro e si lega più strettamente all'Algebra, anche intesa in senso moderno.

Un nuovo indirizzo veniva inaugurato da DIRICHLET: nello studio dei numeri primi contenuti in una progressione aritmetica, egli introduce delle serie, oggi dette « serie di Dirichlet »; questo nuovo strumento, che ebbe nel seguito largo impiego, consente di dare aspetto asintotico a proprietà altrimenti non afferrabili: nasceva così l'Aritmetica asintotica.

Il RIEMANN, nella sua dissertazione sulla rappresentabilità delle funzioni per serie trigonometriche (1853), dice: « Effettivamense per tutti i casi della natura, i soli dei quali qui si tratta, la questione era completamente risolta [dal DIRICHLET], poichè, per quanto poco si sappia come le forze e gli stati della materia varino col luogo e col tempo negli infinitamente piccoli, noi possiamo tuttavia ammettere con piena sicurezza che le funzioni alle quali non si applicheranno le ricerche del DIRICHLET non si incontreranno in natura. Tuttavia ... l'applicazione delle serie di FOURIER non è ristretta alle sole ricerche fisiche; adesso queste serie si usano con successo in un ramo delle Matematiche pure, la Teoria dei Numeri, e qui sono precisamente le funzioni di cui DIRICHLET non ha studiato la rappresentazione in serie trigonometrica che sembrano essere le più importanti ».

Vediamo così che l'Aritmetica era il movente per la posizione generale del RIEMANN; la sostanziale discontinuità, tipica della Teoria dei Numeri, poteva presentare dei modelli che andavano oltre le concezioni fisiche di quel tempo. Quanto sia stato precorritore quel suggerimento dell'Aritmetica lo hanno dimostrato le concezioni fisiche succedutesi di poi fino a quelle moderne.

In una memoria del 1859 il RIEMANN studiava la distribuzione dei numeri primi (sulla quale avevano formulato congetture LEGENDRE, GAUSS e DIRICHLET), collegandone il problema con il computo degli zeri di una funzione analitica trascendente (la zeta di RIEMANN) sulla quale egli fece una ipotesi (l'ipotesi di RIEMANN) ancor oggi non dimostrata. In questo momento voglio richiamare l'attenzione su questa nuova veduta che trasporta nel campo analitico complesso uno strumento già considerato dal DIRICHLET nel campo reale.

Queste considerazioni mostrano come fino dai primi dell'800 si sia venuta sviluppando una simbiosi fra la Teoria dei Numeri e le altre parti della Matematica: simbiosi felice, perchè, mentre da una parte questa teoria, coi suoi difficili problemi (problema di Fermat, problema di Waring, problema di Goldbach ecc.), deposti come su un banco di prova, forniva motivi di affinamento dei mezzi algebrici, analitici e geometrici per affrontarli, dall'altra l'Algebra, l'Analisi e la Geometria suggerivano temi per lo sviluppo della Teoria dei Numeri. Momenti decisivi, nei diversi aspetti, sono stati quelli in cui sono apparse le opere che abbiamo ricordato e inoltre quelle di KUMMER, DIRICHLET, DEDEKIND, KRONECKER sui corpi algebrici, di HERMITE sulle forme, di ČEBIČEV, HADAMARD, LA VALLÉE POUSSIN, LANDAU sui numeri primi, di HARDY e LITTLEWOOD sull'Aritmetica additiva, di MINKOWSKI e WEYL sulla Geometria dei Numeri e le Approssimazioni diofantèe; fino alla moderna scuola di VINOGRADOV che ha raggiunto risultati raffinati mediante nuovi metodi che usano sistematicamente le cosiddette « somme di esponenziali ».

I Fondamenti della Matematica.

Veniamo agli studi riguardanti i Fondamenti della Matematica che si proiettano su atteggiamenti singolari della Matematica contemporanea.

La esigenza di rigore presentatasi all'inizio dell'800 si fece sempre più accentuata, come abbiamo già detto, nella seconda metà del secolo con RIEMANN e WEIERSTRASS: questa esigenza fa rivolgere la Matematica in se stessa, alla ricerca dei propri fondamenti a partire dai quali, con processo logico stretto, deve poi ricostruirsi.

Gli Elementi di EUCLIDE, anche in questa fase, ebbero una influenza decisamente storica; essi fornirono un primo modello di tale concezione e provocarono le geometrie non-euclidee che sono un tipo di studii sui fondamenti della Geometria. La Geometria proiettiva, il passaggio agli iperspazi e la considerazione dell'immaginario condussero ad ampliare l'orizzonte per questi fondamenti, sul quale lasciarono notevoli contributi lo STAUDT e il GRASSMANN il VERONESE e lo HILBERT, l'ENRIQUES e il VEBLEN. Particolarmente importanti sono i *Grundlagen der Geometrie* dello HILBERT.

Il programma di Erlangen di KLEIN, che abbiamo già ricordato, può apparire come una sintesi di vedute che conduce dai fondamenti fino alle posizioni più avanzate della geometria sotto l'aspetto costruttivo: la sintesi del KLEIN rendeva la Geometria, potremmo dire, più « adulta » dell'Analisi. D'altronde sull'Analisi, dopo CARTESIO, PONCELET e RIEMANN e dopo le geometrie non-euclidee, gravava la responsabilità della corenza logica interna della Geometria; e lo studio dei fondamenti dell'Analisi, iniziatosi con CAUCHY e BOLZANO, si prolungò per tutto l'800 con GRASSMANN, WEIERSTRASS, KRONECKER, DEDEKIND, CANTOR e PEANO, per non citare che qualcuno dei maggiori. Questo movimento di pensiero doveva sfociare nella cosiddetta « aritmetizzazione » della Matematica: la Geometria si era fatta analitica e l'Analisi doveva ricondursi all'Aritmetica per poi ricostruirsi partendo dai numeri interi. KRONECKER dice: « Il buon Dio ha coniato i numeri interi; tutto il resto è opera dell'uomo ».

Un momento decisivo fu quello in cui il PEANO riuscì a dare un assetto assiomatico singolarmente perspicuo all'Aritmetica dei numeri interi: tre concetti primitivi e cinque postulati che sono come cinque lucidi steli che connettono l'intero edificio matematico alla realtà che ci circonda facendo presa su fatti primordiali, oggetto di esperienza nella nostra più tenera infanzia. Il PEANO e la sua scuola hanno attivamente contribuito alla ricostruzione della Matematica partendo da quelle basi: il *Formulario* di PEANO (1895) è un documento, singolare per la sua compattezza e organicità, che testimonia tale ricostruzione.

A metà dell'800 il BOOLE (1854), studiando le connessioni logiche che regolano le leggi del pensiero, si accorse che per tali leggi sussiste un calcolo che presenta certe analogie con quello classico algebrico fra quantità: questi suoi studi rimasero senza seguito. Più tardi ci si accorse che entro la Teoria degli insiemi vale un calcolo perfettamente analogo a quello trovato dal BOOLE, e, sul modello della Teoria degli insiemi, venne « algebrizzata » la logica che opera sulle classi di enti: la logica che procede per simboli veniva ad avere una sua algebra interna. Ma, come di rimbalzo, si presentò l'esigenza, d'altronde certamente coltivata nel cuore di ogni studioso in questi indirizzi, l'esigenza, diciamo, di « logicizzare » la Matematica; cioè, come ideale ultimo, di ricondurre tutta la Matematica a concetti puramente logici.

In base a quanto abbiamo già esposto, per ridurre alla logica tutta la Matematica, bastava ridurre alla logica l'Aritmetica. Gli studi profondi dello HILBERT, del FREGE e del RUSSELL sono fondamentali in questo indirizzo.

Lo HILBERT ha fatto anche indagini su quella che egli chiama la « Metamatematica » cioè su quella scienza logico-matematica che non ha per oggetto lo stabilire la verità o meno di proposizioni contenute in un sistema ipotetico-deduttivo, ma, da un piano superiore, studia la mutua dipendenza fra proposizioni contenute in uno stesso sistema e, ancora più dall'alto, le mutue connessioni fra sistemi diversi. Il complesso delle geometrie non euclidee, a chi le riguardi oggi, costituisce un tipico e semplice esempio dell'oggetto di questi problemi.

Da queste basi partono gli studi moderni di Logica simbolica nei quali apparisce l'opera di GÖDEL (1931). Nell'impianto delle logiche moderne trovano posto, come concetti nettamente distinti, la validità, la decidibilità, la dimostrabilità delle proposizioni.

In PLATONE si legge: « I geometri ... si servono di figure visibili e ad esse applicano i loro ragionamenti, sebbene non sia ad esse che loro pensano, ma a quelle di cui queste sono l'immagine ».

Ebbene, dopo millenni, all'inizio del secolo XX, il coronamento delle vedute sui fondamenti della Matematica è sintetizzato dallo HILBERT nella sentenza: « In principio è il segno ».

Ho enunciato Loro questa massima all'inizio del mio discorso, e adesso guardiamola controluce: essa vuole esprimere in forma densa, incisiva, un atteggiamento mentale; essa sottolinea lo sforzo compiuto prima nella conversione verso i fondamenti, poi nell'aritmetizzazione, poi ancora nella riduzione alla logica di tutto il pensiero matematico.

Il segno: segno della logica simbolica, segno di ogni ente matematico, segno di operazione o relazione matematica: esso è inserito in una trama i cui legami vengono fissati dalla mente umana in una parte iniziale di essa; e questa trama procede poi per deduzioni, come spogliata di ogni specificazione concreta; tuttavia il segno, ha significato univoco, lucido, di fronte alla trama stessa che è concepita astrattamente.

Ripensiamo alla sentenza di RUSSELL che abbiamo ricordata in principio: « La Matematica è una scienza nella quale non si ha mai bisogno di sapere di che cosa si parla e neppure di sapere se quello che si dice sia vero ». La mancanza di specificazione concreta della trama rende ragione delle affermazioni contenute in questa sentenza.

Da una parte il segno, dall'altra parte la figura geometrica, per esempio quella della Geometria euclidea elementare. La figura apparisce, a chi la consideri con spirito matematico, una fra le tante figure analoghe possibili, una come rappresentante di una vasta categoria di figure delle quali la mente vuol cogliere le proprietà comuni in un proposito istintivo di astrazione, ignorando le proprietà accidentali che essa porta con sé, e che non appartengono a ciascuna delle figure della categoria rappresentata.

La figura e il segno: ambedue richiedono la mente attenta dell'uomo. Ma il segno si adatta anche all'automa: è con successioni di segni che il matematico concepisce e appresta i programmi destinati ai moderni calcolatori veloci.

L'Analisi funzionale: sua evoluzione, sua sintesi.

HILBERT e POINCARÉ erano le due personalità più celebri nel campo della Matematica al principio del 900. L'opera di POINCARÉ si svolse inizialmente (1881) nel campo delle funzioni analitiche secondo un indirizzo seguito simultaneamente anche dal KLEIN. Nel quadro che io sto tracciando quest'opera deve essere ricordata poichè a distanza di mezzo secolo ripeteva una evoluzione analoga a quella che ABEL e JACOBI provocarono, partendo dall'opera di LEGENDRE, con l'inversione degli integrali ellittici e degli integrali delle funzioni algebriche. Gli integrali delle equazioni differenziali nel campo analitico complesso, studiati principalmente da FUCHS, presentavano, su un piano più elevato, analoghi problemi; ebbene, POINCARÉ e KLEIN riuscirono a introdurre le trascendenti che invertono tali integrali, le cosiddette funzioni automorfe: alla doppia periodicità veniva a sostituirsi l'automorfismo che è connesso ai gruppi di sostituzioni lineari sulla variabile complessa e l'analogia con le funzioni di

JACOBI si spinge anche oltre per quanto riguarda i teoremi di addizione e la rappresentazione per serie. Ma l'opera più notevole del POINCARÉ si svolse nella meccanica celeste con i suoi nuovi metodi e nella Fisica matematica: gli sviluppi asintotici mediante serie divergenti (di cui era noto l'esempio classico della formula di STIRLING), gli invarianti integrali (espressioni integrali sulle variabili delle equazioni differenziali che rimangono invariabili nel tempo) e la topologia sono strumenti da lui studiati, introdotti e mirabilmente impiegati, specialmente nella trattazione dei problemi nei quali interessa il comportamento « alla lunga » delle soluzioni; a un celebre problema, da lui lasciato insoluto, diede risposta G. D. BIRKHOFF.

Di fronte al POINCARÉ lo HILBERT, che sembrava voler riunire in sé, in bella sintesi, la tendenza del KRONECKER e quella del CANTOR; la sua potenza si rivelava per questo duplice aspetto: egli coronava l'indirizzo rivolto a condurre la Matematica a una successione di segni e al tempo stesso si volgeva in altra direzione. Mentre diceva: « In principio è il segno » egli sembrava voler anche dare l'ammonimento « Geometrizzare per progredire ».

Geometrizzare che cosa? L'Analisi funzionale.

Nel parlare dell'Analisi dell'800 non abbiamo ancora segnalato questo momento decisivo: nel decennio fra il 1880 e il 1890, con gli studi di PINCHERLE, GIULIO ASCOLI ed ARZELÀ nasceva l'Analisi funzionale.

Si tratta di un nuovo orientamento, secondo il quale si passa dal concetto della funzione di punto a quello, su un piano superiore, di funzione che dipende da un'altra funzione anzichè da un punto. Già in precedenza, considerazioni di questo tipo si trovano nella Matematica, ma il fatto essenziale è che tale concetto viene studiato in se stesso, organicamente e sistematicamente.

L'Analisi funzionale nasceva seguendo tre orientamenti diversi: PINCHERLE considerava il passaggio da funzione a funzione nel campo analitico complesso, seguendo lo spirito di WEIERSTRASS. Il VOLTERRA considerava il passaggio da funzione a numero nel campo reale, animato da spirito classico come se volesse continuare nell'indirizzo di BERNOULLI, EULERO e LAGRANGE; egli studiava anche le equazioni integrali che portano il suo nome (più tardi FREDHOLM considerava le equazioni integrali a limiti fissi (1900)). L'ASCOLI e l'ARZELÀ, investiti dalla corrente rivolta alle funzioni di variabili reali assegnate arbitrariamente, studiavano proprietà degli insiemi di tali funzioni con idee che risultarono, a distanza di decenni, molto feconde; vi si trovano i germi adatti per la topologia dello spazio funzionale. L'intrecciarsi, nel susseguente sviluppo delle idee, di questi tre atteggiamenti costituisce un fenomeno singolare della Matematica di fine 800.

Sembrava tuttavia che l'Analisi non fosse ancora matura per accogliere convenientemente quei germi. Si dovettero attendere gli studi della scuola francese (BAIRE, BOREL, LEBESGUE) sulla misura degli insiemi di punti e sulla nozione di integrale — l'opera del LEBESGUE costituisce un altro momento decisivo — perchè l'Analisi funzionale riprendesse nuovo vigore.

A questi studi portarono contributi, nel seguito, VITALI, CARATHÉODORY e anche TONELLI coi suoi metodi diretti sul Calcolo delle variazioni.

L'Analisi funzionale si trovava di fronte agli insiemi di funzioni (nel campo reale o nel campo complesso) che dovevano acquistare dignità di spazî; essi la acquistano quando vi si introduca una topologia (la nozione di « vicinanza ») o, meglio ancora, una metrica (la nozione di « distanza »). Ebbene, ci basti qui accennare al fatto che la misura e l'integrale secondo LEBESGUE e l'opera di VOLTERRA, di HILBERT, FRÉCHET, WEYL, FISCHER e RIESZ e tanti altri hanno condotto naturalmente allo spazio Hilbertiano e ad altri spazî, per esempio a quello di VOLTERRA-FANTAPPIÈ e, in attegiamento più generale, agli spazì di BANACH ecc. che trovano applicazioni nella Fisica teorica.

Trascorse un secolo e più dal momento decisivo in cui comparvero le serie di FOURIER fino al delinearsi con chiarezza di questi spazî: a chi lo riguardi si presenta un panorama di penetrante lavoro nel quale si sono venuti inquadrando concetti che sembravano non disciplinabili, attraverso tendenze e gusti contrapposti.

Gli studî sulle funzioni di variabile reale furono essenziali per giungere all'inquadramento attuale, ma durante l'800 e i primi del 900 essi vennero talvolta considerati, anche da eminenti matematici, come rivolti a fenomeni singolari e mostruosi, localizzati e circoscritti, rispetto alle grandi correnti della Matematica. Ho già Loro ricordato l'impressione che HERMITE confessava allo STIELTJES: ebbene, quando la Fisica teorica chiese perentoriamente lo spazio funzionale nel campo numerico complesso, esso era già pronto con la nozione più utile e spontanea di « distanza »; questa distanza era venuta a concludere il lavoro di un secolo sugli enti arbitrariamente assegnati: essa è costituita da una forma Hermitiana, che è una generalizzazione delle forme già considerate da HERMITE nei suoi studî algebrico-aritmetici.

L'ombra di HERMITE, allora e in questo momento e fuori del tempo, ammicca e sorride per segnalarci che il pensiero matematico possiede una coesione e una unità, anche se queste sfuggono a coloro che, in esso immersi, si adoprano per farlo progredire.

Il movimento dei « Bourbaki ».

Il diffondersi e l'intensificarsi degli interessi per la Matematica in tutto il mondo ha fatto aumentare in gran numero le scuole e i cultori di questa scienza, in modo speciale dopo la prima guerra mondiale e ancora più dopo la seconda. Per il moltiplicarsi dei periodici e delle riviste scientifiche, per la facilità delle comunicazioni e degli scambi fra i vari centri di studio, lo sviluppo della Matematica nell'ultimo quarantennio si è reso sempre più vivace, nervoso e tumultuoso. Anche se disponessimo di maggior tempo potremmo presentare al più qualche fotogramma e qualche breve carrellata in questo tumulto.

Ci limiteremo a ricordare una corrente che ha preso consistenza in Francia e negli Stati Uniti d'America dopo l'ultima grande guerra: si tratta del gruppo dei « BOURBAKI ». Riprendendo con decisione i principî della esigenza di rigore, dell'indagine sui fondamenti, della ricostruzione scarna e sorvegliata della Matematica, che orientarono certe correnti dell'800 e del primo 900, e che si concretarono nelle scuole di PEANO, di HILBERT, di RUSSELL e nella scuola della Polonia, adesso, questo gruppo, nel pieno possesso di tutti i temi, le esperienze, le idee, i risultati della matematica precedente, come in una seconda potente ondata, sta lavorando intorno ad un grandioso programma: la ricostruzione di tutta la Scienza matematica come movente della sua evoluzione e del suo sviluppo.

La ricerca di idee fondamentali comuni ai diversi settori di questa scienza, la loro analisi preliminare per ricavarne le idee primordiali anche più semplici di quelle classiche, la messa a punto di queste idee con l'avveduto impegno di costituirle a base comune di più ampi e più numerosi settori della Matematica mediante un assetto assiomatico ridotto al minimo, la sorvegliata aggiunta successiva di assiomi per caratterizzare via via i diversi settori come subordinati a un settore più ampio, tutti questi sono i principî ai quali si ispira questa nuova ondata che tiene conto delle posizioni fino a ieri raggiunte.

L'Algebra e la Topologia, intese in senso astratto, sono le strutture fondamentali dell'Analisi: esse rappresentano, in uno stadio raffinato di trasfigurazione, i due atteggiamenti mentali verso il segno e verso la figura; esse costituiscono come un fondale davanti al quale vengono a muoversi, sempre meglio inquadrati e sistemati, insieme a nuovi concetti, anche quelli della Matematica precedente che guidano la costruzione.

Nello sviluppo di questo intenso lavorìo, problemi classici ritenuti fra loro lontani appariscono sotto nuova luce che li accomuna, problemi classici risolti ancorano la soluzione ineccepibilmente su quel fondale, problemi classici insoluti ricevono la soluzione o si trasformano, seguendo una massima di ABEL, in guisa da essere risolti; e ancora una folla di nuovi problemi si presenta alla ribalta.

In questo quadro contemporaneo, la Scienza matematica dell'800 e del primo 900 si presenta viva, come se i grandi che ci precedettero, in un singolare stato di grazia, avessero scelto la via più fiorita e, lungo di essa, avessero colto i fiori più belli.

Il movimento che ho illustrato mostra come il pensiero matematico vada cercando una unità; a questo grande obbiettivo esso si sta avvicinando.

* * *

Non sono trascorsi ancora quattro secoli da quando, in Europa, si formò un orientamento nuovo per lo studio dei fenomeni naturali: da allora tutte le scienze naturali ed esatte, ad una ad una, via via differenziandosi, iniziarono una prodigiosa evoluzione, imponendo la loro presenza nelle nuove forme; dai primi dell'800, questa presenza si è fatta sempre più viva e sentita, come volta a cambiare radicalmente certi aspetti della vita umana.

A questa Europa, patria dei giganti di questo nuovo pensiero, si volsero attoniti, ad uno ad uno, popoli di antiche civiltà, popoli di continenti vicini e lontani, per studiare e cercare di comprendere le ragioni di questa sorta di prodigio che non aveva riscontro alcuno nelle tradizioni e nelle civiltà loro e che faceva di questa Europa la depositaria di un insegnamento insostituibile e la rendeva capace di dominio. Il metodo della scienza moderna, qui nato, si è andato propagando per il mondo intero: i popoli, dapprima attoniti e curiosi, ne andarono e ne vanno prendendo conoscenza e coscienza.

Ebbene, sul progresso della Scienza della natura aleggia il pensiero matematico che lo accompagna, lo precede, talvolta lo segue per poi sopravanzarlo: aleggia su quel progresso come soccorritore corroborante per consolidare posizioni ancora instabilmente raggiunte, catalizzatore e guida instancabile a suscitare nuovi orientamenti, conciliatore volto a raggiungere momenti di sintesi nelle dialettiche interne, richiamo fedele all'onestà degli intenti e alla serietà dei propositi, moderatore sensibile ai limiti fra la scienza e la metafisica. Esso penetra in ogni settore delle scienze; della sua evoluzione abbiamo tentato, nel breve tempo che ci è stato concesso, di tratteggiare alcuni momenti decisivi.

Questo pensiero matematico, nella forma in cui oggi è presente nel mondo, venne atteggiandosi in questa vecchia Europa, oggi più che mai carica di gravi responsabilità.

* * *