Riv. Mat. Univ. Parma (2) 3 (1962), 259-270

PIERANITA RIZZONELLI (*)

Valutazioni del tipo di H. Bohr per le maggioranti delle serie di potenze. (**)

1. – Sia $\mathfrak{F}$ la classe delle funzioni

$$f(z) = \sum_0^\infty {}_n\, a_n z^n, \qquad z = re^{i\theta},$$

che possiedono le due proprietà:

$$(1.1) \qquad f(z) \text{ è regolare (almeno) per } |z| < 1,$$

$$(1.2) \qquad |f(z)| \leqslant 1 \quad \text{per} \quad |z| < 1.$$

Poniamo $\mathfrak{M}(f;\, r) = \sum_0^\infty {}_n\, |a_n|\, r^n$ (funzione maggiorante di f).

È classico il seguente teorema (H. BOHR, F. WIENER) (1): « Per ogni $f(z) \in \mathfrak{F}$ è $\mathfrak{M}(f;\, 1/3) \leqslant 1$; inoltre $1/3$ è la miglior costante, cioè per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una $f(z) \in \mathfrak{F}$ tale che $\mathfrak{M}(f;\, 1/3 + \varepsilon) > 1$. » Denotiamo con $\mathfrak{F}(\alpha)$ la sottoclasse di $\mathfrak{F}$ costituita da tutte le funzioni $f(z) = \alpha + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots \in \mathfrak{F}$ (aventi come termine costante α, reale non negativo). Sia $B(\alpha)$ il numero positivo ($\geqslant 1/3$) che è estremo superiore dei numeri (non negativi) γ tali che per ogni $f(z) \in \mathfrak{F}(\alpha)$

(*) Indirizzo: Istituto Matematico del Politecnico, Piazza Leonardo da Vinci 32, Milano, Italia.

(**) Ricevuto il 17-II-1962.

(1) H. BOHR, *A theorem concerning power series*, Proc. London Math. Soc. (2) 13 (1914), 1-5. E. LANDAU, *Ergebnisse der Funktionentheorie*, 2 Aufl., Berlin 1929 (cfr. pagg. 32-34).

risulti $\mathfrak{M}\mathfrak{S}(f;\ \gamma) \leqslant 1$. È evidente che $B(\alpha)$ è comune a tutte le famiglie $e^{i\varphi}\ \mathfrak{F}(\alpha)$ di funzioni $\alpha e^{i\varphi} + a_1 z + \ldots = e^{i\varphi} f(z)$ con $f(z) \in \mathfrak{F}(\alpha)$. Inoltre

$$\overline{\mathfrak{F}} = \bigcup_{\alpha, \varphi} \{ e^{i\varphi}\ \mathfrak{F}(\alpha) \} .$$

Sussiste il seguente teorema (G. RICCI) (²): «Per ogni $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ è

$$\frac{1}{2+\alpha} \leqslant B(\alpha) \leqslant \frac{1}{1+2\alpha},$$

cioè per ogni $f(z) \in \overline{\mathfrak{F}}(\alpha)$ è $\mathfrak{M}\mathfrak{S}(f;\ 1/(2+\alpha)) \leqslant 1$ e per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una funzione $f(z) \in \mathfrak{F}(\alpha)$ tale che $\mathfrak{M}\mathfrak{S}\ (f;\ 1/(1+2\alpha) + \varepsilon) > 1$. »

È evidente che $\operatorname{Inf}_{\alpha} B(\alpha) = 1/3$.

Sia $\mathfrak{F}(\alpha,\ \beta)$ la famiglia delle funzioni $f(z) = \alpha + \beta e^{i\theta} z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots$ con $f(z) \in \overline{\mathfrak{F}}$

$$\mathfrak{F}(\alpha) = \bigcup_{\beta} \mathfrak{F}(\alpha,\ \beta) .$$

2. – Nella presente Nota si migliorano, per ciò che riguarda le limitazioni al di sotto, i risultati del teorema di G. RICCI e ci si occupa della valutazione della costante $B_1(\alpha)$ analoga a $B(\alpha)$ per particolari classi di funzioni $f(z)$ contenute in $\mathfrak{F}(\alpha)$.

Teorema I. «Per ogni $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ è

$$\gamma\ (\alpha) \leqslant B\ (\alpha) \leqslant \frac{1}{1+2\alpha},$$

essendo $\gamma(\alpha)$ la radice positiva del seguente polinomio:

$$\Phi(r;\ \alpha) = \begin{cases} r^2(1 + (1-\alpha)\ (1+\alpha)^2) + r(1+\alpha) - 1 & \left(0 \leqslant \alpha \leqslant \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) \\[2ex] r^2(1 + \alpha + \alpha^2) + r(1+\alpha) - 1 & \left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} < \alpha \leqslant 1\right), \end{cases}$$

(²) G. RICCI, *Complementi ad un teorema di H. Bohr riguardante le serie di potenze*, Rev. Un. Mat. Argentina y Asoc. Fis. Argentina **17** (1955), 185-195.

cioè per ogni $f(z) = \alpha + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots \in \mathfrak{F}(\alpha)$ è $\mathfrak{M}(f;\ \gamma(\alpha)) \leqslant 1$ e per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una funzione $f(z) \in \mathfrak{F}(\alpha)$ tale che $\mathfrak{M}(f;\ 1/(1+2\alpha)+\varepsilon) > 1$. »

Teorema II. « Denotiamo con $B_1(\alpha)$ la costante, analoga a $B(\alpha)$, relativa a classi di funzioni $f(z)$ contenute in $\mathfrak{F}(\alpha)$ come verranno in seguito definite. Per ogni $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ è

$$\gamma(\alpha) \leqslant B_1(\alpha) \leqslant \delta(\alpha)\,,$$

dove $\gamma(\alpha)$ e $\delta(\alpha)$ sono le radici comprese nell'intervallo $0 \leqslant r \leqslant 1$ rispettivamente dei polinomi $\Phi(r;\ \alpha)$ e $\Psi(r;\ \alpha)$ sotto definiti.

Cioè per ogni $f(z)$ appartenente ad una delle classi di funzioni contenute in $\mathfrak{F}(\alpha)$ che più sotto indicheremo è $\mathfrak{M}(f;\ \gamma(\alpha)) \leqslant 1$ e per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una funzione della famiglia tale che $\mathfrak{M}(f;\ \delta(\alpha)+\varepsilon) > 1$.

a) *Funzioni pari*: $f(z) = \alpha + a_2 z^2 + a_4 z^4 + \ldots \qquad (\alpha \geqslant 0)$

$$\gamma(\alpha) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{1+(1-\alpha)(1+\alpha)^2}} & \left(0 \leqslant \alpha \leqslant \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) \\[2ex] \dfrac{1}{\sqrt{\alpha^2+\alpha+1}} & \left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} < \alpha \leqslant 1\right), \end{cases}$$

$$\delta(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{1+2\alpha}}\,.$$

b) *Funzioni dispari*: $f(z) = \alpha z + a_3 z^3 + a_5 z^5 + \ldots = z g(z)$ con $g(z)$ appartenente alla classe a) $(\alpha \geqslant 0)$,

$$\Phi(r;\ \alpha) = \begin{cases} r^3((1-\alpha^2)^2-\alpha) + r^2 + r\alpha - 1 & \left(0 \leqslant \alpha \leqslant \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) \\[2ex] -r^3\alpha^3 + r^2 + r\alpha - 1 & \left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} < \alpha \leqslant 1\right), \end{cases}$$

$$\Psi(r;\ \alpha) = r^3(1-2\alpha^2) + r^2\alpha + r\alpha - 1\,.$$

c) *Funzioni pari più termine lineare*: $f(z) = \alpha + a_1 z + a_2 z^2 + a_4 z^4 + \ldots\ (\alpha \geqslant 0)$,

$$\Phi(r;\ \alpha) = \begin{cases} -r^3(1+\alpha) + r^2(1+(1+a)(1-\alpha^2)) + r(1+\alpha) - 1 & \left(0 \leqslant \alpha \leqslant \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) \\[2ex] -r^3(1+\alpha) + r^2(1+\alpha+\alpha^2) + r(1+\alpha) - 1 & \left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} < \alpha \leqslant 1\right), \end{cases}$$

$$\Psi(r;\ \alpha) = -r^3\alpha(1+\alpha) + r^2(1+3\alpha) + r(1+\alpha) - 2\,.$$

d) *Funzioni dispari più termine costante*: $f(z) = \alpha + a_1 z + a_3 z^3 + \ldots + \ldots$ $(\alpha \geqslant 0)$

$$\gamma(\alpha) = \frac{-(1+\alpha) + \sqrt{(1+\alpha)^2 + 4}}{2},$$

$$\delta(\alpha) = 0{,}789 \ldots .»$$

Osservazione I. Per le classi di funzioni considerate in a) e b), i risultati enunciati nel Teorema II si possono parzialmente migliorare quando sia $(-1 + \sqrt{5})/2 \leqslant \alpha \leqslant 1$ sostituendo a $\gamma(\alpha)$ la radice compresa in $0 \leqslant r \leqslant 1$ dei seguenti polinomi:

a) *Funzioni pari*:

$$\Phi(r;\ \alpha) = r^4(1 + \alpha + \alpha^2) + r^2(1 + \alpha)^2(1 - \alpha) - 1 .$$

b) *Funzioni dispari*:

$$\Phi(r;\ \alpha) = -\alpha^3 r^5 + r^4 + r^3(1 - \alpha^2)^2 + r\alpha - 1 .$$

3. – Alla dimostrazione dei teoremi enunciati premettiamo il seguente

Lemma. «Sia $f(z) = \alpha + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots \in \mathfrak{F}(\alpha)$, allora valgono le disuguaglianze:

$$|a_k| \leqslant 1 - \alpha^2 \tag{3.1}$$

$$|a_{2k}| \leqslant \varrho(\alpha,\ |a_k|)\,, \tag{3.2}$$

ove

$$\varrho(\alpha,\ v) = (1 - \alpha^2)^2 - \frac{1 - \alpha - \alpha^2}{1 - \alpha^2} v^2 .»$$

Dimostrazione. La (3.1) è classica, vedi L. Bieberbach ([3]). Dimostriamo la (3.2). Sia $f(z) = \alpha + \beta e^{i\theta} + a_2 z^2 + \ldots \in \mathfrak{F}(\alpha)$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, $0 \leqslant \beta$

([3]) L. Bieberbach, *Funktionentheorie II*, 2 Aufl. Berlin 1931 (New York 1945) (cfr. pagg. 139-146).

(reale). Allora è noto che, posto $a_1 = \beta e^{i\theta}$, il coefficiente a_2 verifica la disuguaglianza [4]

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \alpha & a_1 & a_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \alpha & a_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \alpha \\ \alpha & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \bar{a}_1 & \alpha & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \bar{a}_2 & \bar{a}_1 & \alpha & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \geqslant 0$$

che si può scrivere

$$-\Delta = A a_2 \bar{a}_2 + \bar{B} a_2 + B \bar{a}_2 - C \leqslant 0 ,$$

dove un semplice calcolo ci dà

$$A = 1 - \alpha^2, \qquad B = \alpha a_1^2 ,$$

$$C = (1 - \alpha^2 - a_1 \bar{a}_1)^2 - \alpha^2 (1 - \alpha^2)^2 .$$

Pertanto, fissati α e $a_1 = \beta e^{i\theta}$ il punto a_2 appartiene al cerchio

$$|z - z_0| \leqslant R \qquad \left[z_0 = -\frac{\alpha \beta^2 e^{i2\theta}}{1 - \alpha^2} , \quad R = (1 - \alpha^2)^2 - \beta^2 \right] .$$

Si conclude che, in ogni caso, è

$$|a_2| \leqslant \varrho(\alpha, \beta) = \varrho(\alpha, |a_1|) ,$$

dove $\varrho(\alpha, v)$ ha l'espressione (3.2).

Seguendo un noto ragionamento osserviamo che, per ogni k, introducendo la variabile $\eta = \exp(2\pi i/k)$ e tenendo conto che la funzione simmetrica $1 + \eta^n +$

---

(4) Cfr. loc. cit. in (3).

$+\eta^{2n}+\ldots+\eta^{(k-1)n}=k$ oppure $=0$ secondochè n è multiplo di k oppure no, la funzione, dell'argomento $\zeta=z^k$,

$$\begin{aligned} G(\zeta) &= (1/k)(g(z)+g(\eta z)+\ldots+g(\eta^{k-1}z)) \\ &= \alpha+a_k z^k+a_{2k}z^{2k}+\ldots+a_{nk}z^{nk}+\ldots \\ &= \alpha+a_k\zeta+a_{2k}\zeta^2+\ldots+a_{nk}\zeta^n+\ldots \end{aligned}$$

appartiene a $\mathfrak{F}(\alpha)$ e quindi $|a_k|\leqslant 1-\alpha^2$. Inoltre appartiene a $\mathfrak{F}(\alpha,\ |a_k|)$ e, per il ragionamento precedente, risulta $|a_{2k}|\leqslant\varrho(\alpha,\ |a_k|)$.

Osservazione II. Sappiamo che è $0\leqslant\alpha\leqslant 1$, $0\leqslant\beta\leqslant 1-\alpha^2$. È facile verificare che $\varrho(\alpha,\beta)$ è decrescente al crescere di β, indipendente da β o crescente con β a seconda che risulti

$$0\leqslant\alpha<\frac{-1+\sqrt{5}}{2},\qquad \alpha=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\quad\text{oppure}\quad\frac{-1+\sqrt{5}}{2}<\alpha\leqslant 1.$$

Valgono pertanto le seguenti disuguaglianze:

$$\varrho(\alpha,1-\alpha^2)=\alpha(1-\alpha^2)\leqslant\varrho(\alpha,\beta)\leqslant(1-\alpha^2)^2=\varrho(\alpha,0)\qquad\left(0\leqslant\alpha<\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right),\tag{3.3}$$

$$\varrho\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2},\ \beta\right)=(1-\alpha^2)^2=\frac{3-\sqrt{5}}{2}\qquad\left(\alpha=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right),\tag{3.4}$$

$$\varrho(\alpha,0)=(1-\alpha^2)^2\leqslant\varrho(\alpha,\beta)\leqslant\alpha(1-\alpha^2)=\varrho(\alpha,1-\alpha^2)\qquad\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}<\alpha\leqslant 1\right).\tag{3.5}$$

Osserviamo infine che, in ogni caso, è $\varrho(\alpha,\ \beta)\leqslant 1-\alpha^2$ quando $0\leqslant\beta\leqslant 1-\alpha^2$.

4. - Dimostrazione del Teorema I.

Per ogni $0\leqslant\alpha\leqslant 1$ si ha, in virtù delle (3.1) e (3.2),

$$|a_{2k+1}|\leqslant 1-\alpha^2,\qquad |a_{2k}|\leqslant\varrho(\alpha,\ |a_k|).$$

Tenuto conto dell'Osservazione II si ha poi:

$$|a_{2k}|\leqslant\varrho(\alpha,\ |a_k|)=\begin{cases}(1-\alpha^2)^2 & \left(0\leqslant\alpha\leqslant\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)\\[2ex] \alpha(1-\alpha^2) & \left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}<\alpha\leqslant 1\right).\end{cases}$$

Per ogni $0 \leqslant r \leqslant 1$ è

$$\mathfrak{M}(f;\ r) \leqslant \begin{cases} \alpha + \sum_1^\infty{}_k (1-\alpha^2)^2 r^{2k} + \sum_0^\infty{}_k (1-\alpha^2) r^{2k+1} & \left(0 \leqslant \alpha \leqslant \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) \\ \alpha + \sum_1^\infty{}_k \alpha(1-\alpha^2) r^{2k} + \sum_1^\infty{}_k (1-\alpha^2) r^{2k+1} & \left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} < \alpha \leqslant 1\right). \end{cases}$$

Si soddisfa alla condizione $\mathfrak{M}(f;\ r) \leqslant 1$ ponendo

$$r^2(1+(1-\alpha)(1+\alpha)^2) + r(1+\alpha) \leqslant 1 \qquad \left(0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right),$$

$$r^2(1+\alpha+\alpha^2) + r(1+\alpha) \leqslant 1 \qquad \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2} < \alpha \leqslant 1\right),$$

cioè $\Phi(r;\ \alpha) \leqslant 0$. Per il significato di $B(\alpha)$ segue immediatamente

$$B(\alpha) \geqslant \gamma(\alpha).$$

Si osservi che per ogni $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ esiste ed è unica la radice $\gamma(\alpha)$ nell'intervallo $0 \leqslant r \leqslant 1$. Infatti $\Phi(r;\ \alpha)$ assume valori di segno opposto per $r = 0$ ed $r = 1$ ed è $\Phi_r(r;\ \alpha) > 0$ in tutto l'intervallo $0 \leqslant r \leqslant 1$.

5. - Dimostrazione del Teorema II.

a) *Funzioni pari*. In virtù del Lemma già dimostrato e dell'Osservazione II si ha

$$(5.1)\qquad |a_{4k}| \leqslant \begin{cases} \varrho(\alpha,\ |a_{2k}|) \leqslant (1-\alpha^2)^2 & \left(0 \leqslant \alpha \leqslant \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) \\ \varrho(\alpha,\ |a_{2k}|) \leqslant \alpha(1-\alpha^2) & \left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} < \alpha \leqslant 1\right) \end{cases} \qquad (k \geqslant 1),$$

$$(5.2)\qquad |a_{4k+2}| \leqslant \varrho(\alpha,\ |a_{2k+1}|) = \varrho(\alpha,\ 0) = (1-\alpha^2)^2 \quad (0 \leqslant \alpha \leqslant 1),\ (k \geqslant 0).$$

Per ogni $0 \leqslant r < 1$ è

$$\mathfrak{M}(f;\ r) \leqslant \begin{cases} \alpha + \sum_1^\infty{}_k (1-\alpha^2)^2 r^{2k} & \left(0 \leqslant \alpha \leqslant \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) \\ \alpha + \sum_1^\infty{}_k \alpha(1-\alpha^2) r^{2k} & \left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} < \alpha \leqslant 1\right). \end{cases}$$

La condizione $\mathfrak{M}(f;\, r) \leqslant 1$ è soddisfatta quando

$$\begin{cases} r^2(1 + (1-\alpha)(1+\alpha)^2) \leqslant 1 & \left(0 \leqslant \alpha \leqslant \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) \\[2ex] r^2(1+\alpha+\alpha^2) \leqslant 1 & \left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} < \alpha \leqslant 1\right). \end{cases}$$

Risulterà pertanto $B_1(\alpha) \geqslant \gamma(\alpha)$ essendo $\gamma(\alpha)$ la radice compresa nell'intervallo $0 \leqslant r \leqslant 1$ del polinomio

$$\Phi(r;\, \alpha) = \begin{cases} r^2(1 + (1-\alpha)(1+\alpha)^2) - 1 & \left(0 \leqslant \alpha \leqslant \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) \\[2ex] r^2(1+\alpha+\alpha^2) - 1 & \left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} < \alpha \leqslant 1\right). \end{cases}$$

Nella dimostrazione fatta si è posto, per $(-1+\sqrt{5})/2 < \alpha \leqslant 1$, $|a_{2k}| \leqslant \alpha(1-\alpha^2)$ tenendo conto del fatto che in questo intervallo risulta $\alpha(1-\alpha^2) > (1-\alpha^2)^2$. I risultati enunciati nell'Osservazione I si ottengono invece considerando, per i coefficienti della serie, entrambe le limitazioni (5.1) e (5.2).

Si consideri ora la funzione pari (analoga a quella considerata da E. LANDAU (5)),

$$f(z) = \frac{\alpha - z^2}{1-\alpha z^2} = \alpha - (1-\alpha^2)z^2 - \alpha(1-\alpha^2)z^4 - \alpha^2(1-\alpha^2)z^6 - \ldots$$

ed appartenente a $\mathfrak{F}(\alpha)$ poichè regolare in $|z| < 1$ e tale che $|f(z)| \leqslant 1$ per $|z| < 1$. È poi per $0 \leqslant r < 1$

$$\mathfrak{M}(f;\, r) = \alpha + (1-\alpha^2) r^2 \sum_{0}^{\infty}{}_k\, \alpha^k r^{2k}.$$

La condizione $\mathfrak{M}(f;\, r) > 1$ è soddisfatta quando

$$r^2(1+\alpha-2\alpha^2) + \alpha - 1 > 0\,.$$

Ne segue $B_1(\alpha) \leqslant \delta(\alpha) = 1/\sqrt{1+2\alpha}\,.$

---

(5) Vedi E. LANDAU, loc. cit., in (1), pag. 34.

b) *Funzioni dispari.* Si osservi innanzi tutto che le radici $\gamma(\alpha)$ e $\delta(\alpha)$ citate nell'enunciato del teorema esistono e sono uniche; infatti i polinomi $\Phi(r;\ \alpha)$ e $\Psi(r;\ \alpha)$ assumono per $r=0$ ed $r=1$ valori di segno opposto ed inoltre le derivate $\Phi_r(r;\ \alpha)$ e $\Psi_r(r;\ \alpha)$ sono positive nell'intervallo $0 \leqslant r \leqslant 1$ per ogni $0 \leqslant \alpha < 1$.

Poichè è $f(z) = zg(z)$, con $g(z) = \alpha + a_3 z^2 + a_5 z^4 + \dots$ appartenente alla classe delle funzioni pari, valgono per i coefficienti $a_{4k+1} (k \geqslant 1)$ ed $a_{4k+3} (k \geqslant 0)$ le stesse maggiorazioni (5.1) e (5.2) stabilite rispettivamente per i coefficienti a_{4k} ed a_{4k+2}.

Si ha quindi per $0 \leqslant r < 1$

$$\mathfrak{M}(f;\ r) \leqslant \begin{cases} r\alpha + r \sum_{1}^{\infty} {}_k\, (1-\alpha^2)^2 r^{2k} & \left(0 \leqslant \alpha \leqslant \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) \\ r\alpha + r \sum_{1}^{\infty} {}_k\, \alpha(1-\alpha^2) r^{2k} & \left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} < \alpha \leqslant 1\right). \end{cases}$$

Si soddisfa alla condizione $\mathfrak{M}(f;\ r) \leqslant 1$ ponendo

$$r^3((1-\alpha^2)^2 - \alpha) + r^2 + r\alpha \leqslant 1 \qquad \left(0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$$

$$-r^3\alpha^3 + r^2 + r\alpha \leqslant 1 \qquad \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2} < \alpha \leqslant 1\right),$$

cioè $\Phi(r;\ \alpha) \leqslant 0$.

Si è quindi dimostrato che vale per $B_1(\alpha)$ la limitazione

$$B_1(\alpha) \geqslant \gamma(\alpha).$$

I risultati ottenuti valgono nell'ipotesi che, per $(-1+\sqrt{5})/2 < \alpha \leqslant 1$ sia $|a_{2k+1}| \leqslant \alpha(1-\alpha^2)$. Anche in questo caso si perviene ai risultati enunciati nell'Osservazione I tenendo conto, per $(-1+\sqrt{5})/2 < \alpha \leqslant 1$, di entrambe le maggiorazioni (5.1) e (5.2) valide rispettivamente, come si è già osservato, per i coefficienti a_{4k+1} ed a_{4k+3}.

La funzione dispari

$$f(z) = z\,\frac{\alpha - z^2}{1-\alpha z^2} = \alpha z - (1-\alpha^2)z^3 - \alpha(1-\alpha^2)z^5 - \dots$$

è regolare per $|z| < 1/\sqrt{\alpha}$, inoltre $|f(z)| < 1$ per $|z| < 1$ e quindi appartiene a $\mathfrak{F}(\alpha)$. La condizione $\mathfrak{M}(f;\ r) > 1$ cioè $r\alpha + r^3 \dfrac{1-\alpha^2}{1-\alpha r^2} > 1$ equivale a $\Psi(r;\ \alpha) > 0$.

Una limitazione al di sopra per $B_1(\alpha)$ è data pertanto da $\delta(\alpha)$.

c) *Funzioni pari più termine lineare.* L'indagine sui valori delle funzioni $\Phi(r;\ \alpha)$ e $\Psi(r;\ \alpha)$ per $r=0$ ed $r=1$ e sull'andamento delle derivate $\Phi_r(r;\ \alpha)$ e $\Psi_r(r;\ \alpha)$ per $0 \leqslant r \leqslant 1$ e $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ assicura l'esistenza e l'unicità delle radici $\gamma(\alpha)$ e $\delta(\alpha)$. Si trova, applicando il Lemma già dimostrato, che valgono, per i coefficienti della serie, le maggiorazioni (5.1) e (5.2). Per $(-1+\sqrt{5})/2 < \alpha \leqslant 1$ usufruiremo, nel seguito della dimostrazione, della maggiorazione $|a_{2k}| \leqslant \alpha(1-\alpha^2)$ che, per $k \geqslant 1$, è valida per tutti i coefficienti della serie.

In virtù delle (5.1) e (5.2) e tenendo presente che $|a_1| \leqslant 1-\alpha^2$ si ha (per $0 \leqslant r < 1$):

$$\mathfrak{M}(f;\ r) \leqslant \begin{cases} \alpha + r(1-\alpha^2) + \sum_1^\infty{}_k\, (1-\alpha^2)^2 r^{2k} & \left(0 \leqslant \alpha \leqslant \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) \\[2ex] \alpha + r(1-\alpha^2) + \sum_1^\infty{}_k\, \alpha(1-\alpha^2) r^{2k} & \left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} < \alpha \leqslant 1\right). \end{cases}$$

La condizione $\mathfrak{M}(f;\ r) \leqslant 1$ è certamente soddisfatta quando risulta

$$\begin{cases} -r^3(1+\alpha) + r^2(1+(1+\alpha)(1-\alpha^2)) + r(1+\alpha) \leqslant 1 & \left(0 \leqslant \alpha \leqslant \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) \\[2ex] -r^3(1+\alpha) + r^2(1+\alpha+\alpha^2) + r(1+\alpha) \leqslant 1 & \left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} < \alpha \leqslant 1\right), \end{cases}$$

cioè quando $\Phi(r;\ \alpha) \leqslant 0$. Per la definizione di $B_1(\alpha)$ si ha:

$$B_1(\alpha) \geqslant \gamma(\alpha)\ .$$

La funzione lineare $\varphi_1(z) = \alpha + a_1 z$ appartiene a $\mathfrak{F}(\alpha)$ (cioè è in modulo $\leqslant 1$ per $|z| < 1$) quando è $|a_1| \leqslant 1-\alpha^2$ e quindi potremo porre, in particolare, $a_1 = -(1-\alpha^2)e^{i\theta}$.

La funzione $\varphi_2(z) = \dfrac{\alpha - z^2}{1-\alpha z^2}$ appartiene pure, come si è già visto, a $\mathfrak{F}(\alpha)$. La funzione pari più termine lineare

$$f(z) = \frac{1}{2}(\varphi_1(z) + \varphi_2(z)) = \alpha - e^{i\theta}\frac{1-\alpha^2}{2}z - \frac{1-\alpha^2}{2}z^2 - \frac{\alpha(1-\alpha^2)}{2}z^4 - \ldots$$

evidentemente appartiene anch'essa a $\mathfrak{F}(\alpha)$. Affinchè risulti

$$\mathfrak{M}(f;\ r) = \alpha + \frac{1-\alpha^2}{2} r + \frac{1-\alpha^2}{2(1-\alpha r^2)} r^2 > 1$$

è sufficiente che sia, per $0 \leqslant r \leqslant 1$, $\Psi(r;\ \alpha) > 0$. Ne segue

$$B_1(\alpha) \leqslant \delta(\alpha)\ .$$

d) *Funzioni dispari più termine costante.* Per ogni $0 \leqslant r < 1$ si ha, in virtù della (3.1),

$$\mathfrak{M}(f;\ r) \leqslant \alpha + r \sum_{0}^{\infty}{}_k\, (1-\alpha^2) r^{2k}.$$

La condizione $\mathfrak{M}(f;\ r) \leqslant 1$ è certamente soddisfatta qualora risulti

$$\Phi(r;\ \alpha) = r^2 + r(1+\alpha) - 1 \leqslant 0\ .$$

Come si può facilmente calcolare $\gamma(\alpha)$ è la radice compresa nell'intervallo $0 \leqslant r \leqslant 1$ del polinomio $\Phi(r;\ \alpha)$ e quindi vale per $B_1(\alpha)$ la limitazione

$$B_1(\alpha) \geqslant \gamma(\alpha)\ .$$

Si consideri la funzione dispari più termine costante $f(z) = \alpha + \lambda g(z)$ con $g(z) = \dfrac{\tau - z^2}{1 - \tau z^2}$ (τ reale, positivo e $\leqslant 1$) funzione pari che, come si è già visto, appartiene a $\overline{\mathfrak{F}}$. λ è una costante reale da determinarsi in modo che risulti soddisfatta la condizione $|f(z)| \leqslant 1$ per $|z| < 1$. Si ha

$$|f(z)| = \alpha + \lambda\, |z|\, |g(z)| \leqslant \alpha + \lambda \qquad \text{per} \quad |z| < 1$$

e quindi $\lambda = 1 - \alpha$ è un valore accettabile. Risulta allora

$$\mathfrak{M}(f;\ r) = \alpha + (1-\alpha)\tau r + \frac{(1-\alpha)(1-\tau^2)r^3}{1-\tau r^2}\ .$$

La condizione $\mathfrak{M}(f;\ r) > 1$ si traduce nella disuguaglianza, indipendente da α,

$$r^3(1 - 2\tau^2) + r^2\tau + r\tau > 1$$

cioè $\Psi(r;\,\tau) > 0$, essendo $\Psi(r;\,\tau)$ il polinomio che figura al comma b) dell'enunciato del Teorema II. τ è vincolato dalla sola condizione di essere $\leqslant 1$ e quindi una limitazione al di sopra per $B_1(\alpha)$ è data dal valore minimo che la funzione $\delta(\tau)$, definita dall'equazione $\Psi(r;\,\tau) = 0$ per $0 \leqslant r \leqslant 1$, assume nell'intervallo $0 \leqslant \tau \leqslant 1$. Si trova che tale minimo ϱ è la maggiore delle due radici comprese nell'intervallo $0 \leqslant r \leqslant 1$ del polinomio

$$\psi(r) = 8r^4 + r^2 - 6r + 1$$

ed è $\varrho = 0{,}789\ldots$.

Si ha quindi

$$B_1(\alpha) \leqslant 0{,}789\ldots$$

ed il Teorema è completamente dimostrato.