Riv. Mat. Univ. Parma (2) 3 (1962), 271-281

MARCELLO BRUNI (*)

Sulla curvatura delle linee di una superficie quasi caratteristica immersa in una varietà quasi hermitiana. (**)

1. – Per una superficie caratteristica $\sum$ immersa in una $\mathcal{V}_{2n}$ *kähleriana* (1) è stato introdotto, da E. MARTINELLI, uno speciale tipo di curvatura, detta *curvatura caratteristica* (2).

Successivamente, G. B. RIZZA ha definito più tipi di curvature per una linea immersa in una $\mathcal{V}_{2n}$ quasi hermitiana (3). Considerata poi, nel caso di una $\mathcal{V}_{2n}$ *hermitiana*, una superficie caratteristica $\sum \subset \mathcal{V}_{2n}$, egli ha esaminato le curvature, dei tipi suddetti, relative alle linee di $\sum$ per O.

Precisamente, nell'ipotesi che $\mathcal{V}_{2n}$ sia non solo hermitiana, ma *kähleriana*, il RIZZA ha dimostrato che tre delle curvature introdotte coincidono tra loro, sono indipendenti dalla linea considerata, ed eguali alla curvatura caratteristica di $\sum$ in O. Se $\mathcal{V}_{2n}$ è solamente *hermitiana*, le varie curvature sono invece distinte e dipendono dalla linea in esame, salvo una — che il RIZZA chiama *curvatura hermitiana associata* — la quale è ancora costante, e quindi tale da potersi riguardare come curvatura della superficie caratteristica in O.

Nel presente lavoro prendo in esame, più in generale, il caso di una $\mathcal{V}_{2n}$ *quasi hermitiana*.

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università, Roma, Italia.

(**) Ricevuto il 31-III-1962.

Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del Gruppo di Ricerca n. 1 del Comitato per la Matematica del C.N.R. per l'anno 1961-62.

(1) Per le nozioni generali, cfr. ad es. B. ECKMANN [3]; A. LICHNEROWICZ [5]; E. MARTINELLI [6], [8], [10]; B. SEGRE [15], II, 8; K. YANO and S. BOCHNER [18].

(2) E. MARTINELLI [7].

(3) G. B. RIZZA [14].

Dopo alcuni richiami (nn. **2**-**5**) si considerano, (nn. **6**-**9**), in un punto O, le curvature hermitiane associate K_a delle linee uscenti da O ed appartenenti ad una superficie quasi caratteristica $\sum$ di $\mathcal{V}_{2n}$.

Si dà (n. **8**) una formula esplicita per K_a, mostrando poi che tale curvatura dipende, in generale, dalla direzione della tangente in O alla linea considerata, e ciò in relazione all'esistenza di un *tensore di Nijenhuis* non nullo per la struttura quasi complessa di $\mathcal{V}_{2n}$. Quando il tensore si annulla, la struttura quasi complessa diviene complessa, e si ricade nel risultato del RIZZA.

La distribuzione dei valori di K_a è illustrata (n. **9**) da un'indicatrice polare del raggio di curvatura $R_a = \dfrac{1}{K_a}$, che ha forma di tipo asteroidale, e risulta una semplice trasformata di un'indicatrice ellittica.

I. - Richiami.

2. - Sia $\mathcal{V}_{2n}\,(n > 1)$ una *varietà a struttura quasi complessa* di classe C^∞, O un suo punto, ed x^r $(r = 1, \ldots, 2n)$ coordinate locali reali in un intorno $\mathcal{U}$ di O.

Il *tensore* $h_q^{\cdot p}$ della struttura quasi complessa, soddisfacente alla

$$h_q^{\cdot p}\, h_r^{\cdot q} = -\,\delta_r^p \qquad (p,\ q,\ r = 1, \ldots, 2n), \tag{1}$$

induce, nello spazio vettoriale tangente in O a $\mathcal{V}_{2n}$, l'*automorfismo*

$$J: \qquad v^p \to \tilde{v}^p = h_q^{\cdot p}\, v^q, \tag{2}$$

che risulta antiinvolutorio:

$$\tilde{\tilde{v}} = -\,v. \tag{3}$$

Assegnata ora, entro $\mathcal{V}_{2n}$, un'arbitraria connessione affine simmetrica, ed indicata con ∇_j la derivazione covariante eseguita rispetto alla connessione, si consideri il tensore di torsione della struttura quasi complessa, o tensore di NIJENHUIS,

$$N_{pq\cdot}^{\cdot\cdot r} = (\nabla_p\, h_s^{\cdot r} - \nabla_s\, h_p^{\cdot r})h_q^{\cdot s} - (\nabla_q\, h_s^{\cdot r} - \nabla_s\, h_q^{\cdot r})h_p^{\cdot s}. \tag{5}$$

Risulta $N_{pq\cdot}^{\cdot\cdot r} = 0$ se e solo se la struttura quasi complessa di $\mathcal{V}_{2n}$ è integrabile, cioè si tratta di struttura *complessa* (4).

(4) Cfr. A. WEIL [**16**], p. 35; A. NEWLANDER and L. NIREMBERG [**11**], p. 393.

Si supponga ora $\mathfrak{V}_{2n}$ *quasi hermitiana*, ossia dotata di una metrica riemanniana in accordo con la struttura quasi complessa, il che si esprime dicendo che la metrica è hermitiana.

La metrica di $\mathfrak{V}_{2n}$, in quanto si pensi come metrica riemanniana, dà luogo ad un prodotto scalare che indicheremo con $\times$; ed in quanto si pensi come hermitiana, dà luogo ad un prodotto hermitiano, che indicheremo invece con $\cdot$ (5). Si hanno allora le relazioni:

$$(5)\qquad \begin{gathered} a\times a = a\cdot a = \operatorname{mis}^2 a = \operatorname{mis}^2 \tilde{a}, \qquad a \times \tilde{a} = 0\,, \\ \tilde{a}\cdot\tilde{b} = a\cdot b, \qquad b\cdot a = \overline{a\cdot b}, \qquad a\cdot\tilde{b} = -\tilde{a}\cdot b = ia\cdot b\,. \end{gathered}$$

Ricordiamo infine che si dice, con RIZZA, *angolo hermitiano* φ di due vettori a, b l'angolo, compreso tra 0 e π, definito da

$$\cos\varphi = \frac{|\,a\cdot b\,|^2}{\operatorname{mis}^2 a \quad \operatorname{mis}^2 b} \qquad (6)\,.$$

3. – Interviene nel seguito il tensore di KÄHLER:

$$(6)\qquad K_{pqr} = \nabla_p h_{qr} + \nabla_q h_{rp} + \nabla_r h_{pq}\,,$$

ove ∇_j indica ora la derivazione covariante nella connessione di LEVI-CIVITA definita dalla metrica hermitiana.

Tale tensore, il cui annullarsi esprime la condizione necessaria e sufficiente affinchè $\mathfrak{V}_{2n}$ sia *quasi kähleriana*, è legato ai tensori $h_q^{\cdot p}$, N_{pqr} dalla relazione:

$$(7)\qquad N_{pqr} = h_p^{\cdot s} K_{qrs} - h_q^{\cdot s} K_{prs} + 2\, h_q^{\cdot s} \nabla_r h_{sp} \qquad (7)\,.$$

4. – Sia ora $\mathfrak{L}$ una linea di $\mathfrak{V}_{2n}$ passante per O, e rappresentata, nell'intorno $\mathfrak{U}$, dalle equazioni di classe C^2:

$$x^p = x^p(\lambda), \qquad (p = 1, \ldots, 2n;\ \lambda \text{ reale})\,.$$

Indicato con $\mathfrak{T}$ il campo — tangente ad $\mathfrak{L}$ — costituito dai vettori di componenti $\dfrac{dx^p}{d\lambda}$, siano u, u' i vettori di $\mathfrak{T}$ nei punti O, O' di $\mathfrak{L}$ ed $\tilde{u}$, $\tilde{u}'$ i vettori *associati* dall'automorfismo J (considerato rispettivamente in O, O').

---

(5) Per la definizione e le proprietà formali del prodotto hermitiano, cfr. ad es. E. MARTINELLI [9], p. 136; G. B. RIZZA [14], p. 95. Ved. anche M. BRUNI [2] e G. B. RIZZA [12], [13], sebbene ivi la definizione di prodotto hermitiano sia leggermente diversa.

(6) G. B. RIZZA [14], p. 97.

(7) Cfr. ad es. K. YANO [18], (3, 4), p. 231.

Si denoti inoltre con $L_{O',O}$ l'operazione di trasporto di un vettore, da O' ad O lungo $\mathfrak{L}$, secondo la connessione di LEVI-CIVITA.

Ciò posto, sia φ l'angolo hermitiano dei vettori $\widetilde{u}$, $L_{O',O}\widetilde{u}'$ (n. 2) e ∇s la lunghezza dell'arco OO' su $\mathfrak{L}$. Si definisce, con RIZZA, *curvatura hermitiana associata* di $\mathfrak{L}$ in O, il numero reale assoluto

$$K_a = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\varphi}{\Delta s}.$$

La curvatura K_a è suscettibile di una rappresentazione analitica particolarmente semplice, se si fa uso di opportuna notazione.

Siano A e B campi di vettori. Indicheremo con $(\delta_b\, a)\mathrm{d}\varrho$ il differenziale assoluto del vettore a $(a \in A)$ per lo spostamento infinitesimo $b\, \mathrm{d}\varrho$ $(b \in B,\ \varrho$ reale), rispetto alla metrica riemanniana di $\mathfrak{V}_{2n}$ (8).

Con riferimento ora alla linea $\mathfrak{L}$ si riconosce subito che ha senso considerare $\delta_u \widetilde{u}$. Ciò premesso, la curvatura K_a di $\mathfrak{L}$ in O risulta espressa da

$$K_a^2 = \frac{2}{(u\cdot u)^3} \begin{vmatrix} u\cdot u & u\cdot \delta_u\widetilde{u} \\ \delta_u\widetilde{u}\cdot u & \delta_u\widetilde{u}\cdot\delta_u\widetilde{u} \end{vmatrix} \quad (9). \tag{8}$$

5. – D'ora in avanti, ci limiteremo a considerare linee $\mathfrak{L}$ di un'assegnata *superficie quasi caratteristica*.

Sia dunque $\sum \subset \mathfrak{V}_{2n}$ una superficie di questo tipo (cioè tale che le sue faccette tangenti risultino unite nella trasformazione J del n. 2), passante per O e rappresentata, in $\mathfrak{A}$, dalle equazioni

$$x^p = x^p(\sigma, \tau) \qquad (p = 1, \ldots, 2n; \quad \sigma, \tau \text{ reali})$$

di classe C^2.

I parametri σ, τ siano anzi *isotermi* (o isometrici) (10), ossia tali che l'elemento d'arco di $\sum$ sia espresso da $\mathrm{d}s^2 = E(\mathrm{d}\sigma^2 + \mathrm{d}\tau^2)$; in ogni punto di $\mathfrak{A}$ i vettori, tangenti a $\sum$, di componenti $v^p = \dfrac{\partial x^p}{\partial \sigma}$, $v'^p = \dfrac{\partial x^p}{\partial \tau}$ risultano ortogonali

(8) Più in generale A può essere un campo di tensori.

(9) G. B. RIZZA [14], (33), p. 102.

(10) Ved. ad es. L. BIANCHI [1], p. 94, dove è dimostrato che tali parametri si possono introdurre — in infiniti modi — su ogni superficie. Ved. anche L. P. EISENHART [4], p. 161.

e di ugual misura. D'altra parte, per le (5), anche v, $\tilde{v}$ sono ortogonali ed hanno la stessa misura; dunque, previo eventuale cambiamento di segno del parametro τ, risulta $v' = \tilde{v}$.

Ciò premesso, sia $\mathfrak{L}$ una linea di $\sum$ per O rappresentata, in $\mathfrak{A}$, dalle equazioni di classe C^2: $\sigma = \sigma(\lambda)$, $\tau = \tau(\lambda)$. Introdotto l'angolo θ tra le tangenti alla linea $\mathfrak{L}$ e alla linea σ (τ = cost.) in O, e posto

(9) $$e_\theta = \delta_v \tilde{v} \cos^2\theta - \delta_{\tilde{v}} v \operatorname{sen}^2\theta + (\delta_{\tilde{v}} \tilde{v} - \delta_v v) \operatorname{sen}\theta \cos\theta,$$

la (8) diviene:

(10) $$K_a^2 = \frac{2}{(u \cdot u)^3} \begin{vmatrix} v \cdot v & v \cdot e_\theta \\ e_\theta \cdot v & e_\theta \cdot e_\theta \end{vmatrix} \quad (^{11}),$$

ove v, $\tilde{v}$ sono i vettori sopra definiti.

Se, ora, $\mathfrak{V}_{2n}$ è non soltanto quasi hermitiana, ma *hermitiana* (cioè $\mathfrak{V}_{2n}$ ha struttura complessa), valgono le relazioni [12]

(11) $$\delta_v \tilde{v} = \delta_{\tilde{v}} v, \qquad \delta_v v - \delta_{\tilde{v}} \tilde{v} + 2\tilde{\delta}_v \tilde{v} = 0,$$

in virtù delle quali la (9) diviene

(12) $$e_\theta = \delta_v \tilde{v} \cos 2\theta + \tilde{\delta}_v \tilde{v} \operatorname{sen} 2\theta .$$

Dalla (12), tenute presenti le (5), si deduce, con elementare calcolo, che le quantità $e_\theta \cdot e_\theta$, $(v \cdot e_\theta)(e_\theta \cdot v)$ sono indipendenti da θ; dunque *la curvatura* K_a, espressa dalla (10), *è indipendente dalla linea* $\mathfrak{L}$ *considerata* [13].

II. – Studio della curvatura hermitiana associata.

6. – Ci proponiamo di studiare, nel punto O, la curvatura hermitiana associata K_a delle linee, passanti per O, ed appartenenti ad una data superficie quasi caratteristica, di una $\mathfrak{V}_{2n}$ *quasi hermitiana*.

A tale scopo occorre in primo luogo vedere come si modifichino, nell'attuale ipotesi su $\mathfrak{V}_{2n}$, le (11).

---

(11) G. B. Rizza [14], (59), p. 111. Tale formula è, in verità, stabilita da Rizza per una $\mathfrak{V}_{2n}$ a struttura complessa, in relazione ad una $\sum$ rappresentata, in coordinate isotrope, da equazioni del tipo $z^p = z^p(t)$, $z^{\bar{p}} = z^{\bar{p}}(\bar{t})$ ($p = 1, \ldots, n$; $t = \sigma + i\tau$; σ, τ reali; σ, τ sono in tal caso, com'è ben noto, una coppia di parametri isotermi). Ma si riconosce subito che, anche nel caso generale di una $\mathfrak{V}_{2n}$ quasi complessa è lecito il passaggio dalla (8) alla (10) purchè σ, τ siano parametri isotermi su $\sum$.

(12) G. B. Rizza [14], (53), (56), p. 109.

(13) G. B. Rizza [14], T_7, p. 110.

Le componenti p-me di $\delta_{\tilde{v}}\, v$, $\delta_v\, \tilde{v}$ risultano:

$$(\delta v_{\tilde{v}})^p = \frac{\partial v^p}{\partial \tau} + \gamma^p_{lm}\, v^l\, \tilde{v}^m = \frac{\partial^2 x^p}{\partial \tau\, \partial \sigma} + \gamma^p_{lm}\, v^l\, \tilde{v}^m \,,$$

$$(\delta_v\, \tilde{v})^p = \frac{\partial \tilde{v}^p}{\partial \sigma} + \gamma^p_{lm}\, \tilde{v}^l\, v^m = \frac{\partial^2 x^p}{\partial \sigma\, \partial \tau} + \gamma^p_{lm}\, \tilde{v}^l\, v^m \,,$$

essendo γ^p_{lm} i simboli di CHRISTOFFEL. Per la simmetria delle γ rispetto agli indici bassi, si ha che *anche nelle attuali condizioni sussiste la* $(11)_1$.

7. – Esaminiamo ora come vada, invece, modificata la $(11)_2$ nel caso quasi hermitiano.

A questo scopo, introdotto il « crochet » di LIE:

$$[J,\ \delta] = J\delta - \delta J \,,$$

relativo all'operatore J (n. 2) ed all'operatore δ di differenziazione assoluta, e considerati gli operatori $\delta_b = b^r \nabla_r$ definiti al n. 4 ([14]), può scriversi:

$$(13) \qquad [J,\ \delta_v]\tilde{v} = \tilde{\delta}_v\, \tilde{v} + \tilde{\delta}_v\, v, \qquad\qquad [J,\ \delta_{\tilde{v}}]v = \tilde{\delta}_{\tilde{v}}\, v - \delta_{\tilde{v}}\, \tilde{v} \,.$$

In definitiva, il primo membro della $(11)_2$, tenuto conto anche della $(11)_1$, diviene:

$$(14) \qquad 2\, \mathrm{d}^* v = \delta_v\, v - \delta_{\tilde{v}}\, \tilde{v} + 2\tilde{\delta}_v\, \tilde{v} = [J,\ \delta_v]\tilde{v} + [J,\ \delta_{\tilde{v}}]v \,.$$

D'altro canto, si prova immediatamente che, per ogni campo vettoriale W, la componente p-ma di $[J,\ \delta]w$ $(w \in W)$ è data da

$$(15) \qquad ([J,\ \delta]w)^p = -\, w^q\, \delta\, h_q^{\cdot p} \,.$$

In conclusione, dalle (14), (15) discende l'uguaglianza

$$(16) \qquad 2(\mathrm{d}^* v)^p = -\,(v^r\, \tilde{v}^q + \tilde{v}^r\, v^q)\nabla_r\, h_q^{\cdot p} \,.$$

([14]) Perchè abbia senso la derivazione covariante ∇_r in un punto, occorre che il campo su cui si opera sia definito in un intorno $2n$-dimensionale del punto. Tale condizione è soddisfatta per il campo tensoriale che definisce la struttura quasi complessa di $\mathfrak{V}_{2n}$ (n. 2) ed anche per i campi vettoriali V, $\tilde{V}$ che possono arbitrariamente essere prolungati al di fuori di $\sum$.

Ora, poichè dalla (7) segue subito

$$2\nabla_r h_q^{\cdot p} = -h_q^{\cdot l} N^p_{\cdot lr} + h^{pt} h_q^{\cdot m} K_{mrt} + K^p_{\cdot rq},$$

introdotti i tensori

$$'V^{rq} = -\frac{1}{4}(v^r \tilde{v}^q + \tilde{v}^r v^q), \qquad ''V^{rq} = -\frac{1}{4}(v^r v^q - \tilde{v}^r \tilde{v}^q),$$

dalla (16) deriva

$$(d^*v)^p = ''V^{rl} N^p_{\cdot lr} - h^{pt}\, ''V^{rm} K_{mrt} + {'V^{rq}} K^p_{\cdot rq}. \tag{17}$$

Infine, tenuto conto nella (17) della simmetria di $'V^{rq}$, $''V^{rq}$ e dell'emisimmetria di K_{pqr} (15), si perviene alla relazione

$$(d^*v)^p = ''V^{rl} N^p_{\cdot rl}. \tag{18}$$

Dunque, per una superficie quasi caratteristica, immersa in una $\mathfrak{V}_{2n}$ quasi hermitiana, il vettore $2d^*v$, che costituisce il primo membro della $(11)_2$, *non è in generale, nullo, ma dipende dal tensore di Nijenhuis della struttura quasi complessa.*

8. – Le considerazioni dei nn. 6, 7 permettono di ottenere un'espressione esplicita della curvatura hermitiana associata K_a, per le linee di una superficie quasi caratteristica di una $\mathfrak{V}_{2n}$ quasi hermitiana, uscenti da un punto.

A questo scopo, si noti anzitutto che, introdotto il *differenziale associato*

$$\delta^J = J^{-1}\,\delta J \quad (16) \tag{19}$$

e posto

$$2\,D_J v = \delta_{\tilde{v}}\tilde{v} - \delta_v v, \tag{20}$$

(15) Cfr. ad es. K. YANO [17], p. 231.
(16) Ved. G. B. RIZZA [14], p. 99.

dalla (14) segue subito la relazione

$$\mathrm{D}_J = \delta'_v - \mathrm{d}^*, \tag{21}$$

ove δ'_v è l'operatore associato a δ_v.

Ciò premesso, tenute presenti le $(11)_1$, (20), dalla (9) deriva

$$e_\theta = \delta_{\tilde{v}}\, v \cos 2\theta + \mathrm{D}_J v \operatorname{sen} 2\theta\,. \tag{22}$$

Conviene ora introdurre, per ogni coppia ω_1, ω_2 di operatori vettoriali, relativi ad un campo A di $\mathfrak{V}_{2n}$, l'operatore composto $\Omega(\omega_1, \omega_2)$, definito, per ogni vettore $a \in A$, dalla relazione

$$\Omega(\omega_1, \omega_2)a = \frac{1}{(a\cdot a)^3}\left[(a\cdot a)(\omega_1 a\cdot\omega_2 a + \omega_2 a\cdot\omega_1 a) + \right.$$
$$\left. - (a\cdot\omega_1 a)(\omega_2 a\cdot a) - (a\cdot\omega_2 a)\,(\omega_1 a\cdot a)\right]. \tag{23}$$

Sussistono le proprietà formali

$$\Omega(\omega_1, \omega_2) = \Omega(\omega_2, \omega_1), \qquad \Omega(-\omega_1, \omega_2) = \Omega(\omega_1, -\omega_2) = -\Omega(\omega_1, \omega_2)\,. \tag{24}$$

Dalle (5) del n. **2** deriva poi immediatamente l'uguaglianza

$$\Omega(J\omega_1, J\omega_2) = \Omega(\omega_1, \omega_2)\,, \tag{25}$$

da cui, posto $\omega_2 = -J\omega_1$ e tenuto conto delle (24), discende

$$\Omega(\omega_1, J\omega_1) = 0\,. \tag{26}$$

Si consideri ora la (10). In virtù delle (22), (23) si perviene finalmente alla *relazione*

$$K_a^2 = \Omega(\delta_{\tilde{v}}, \delta_{\tilde{v}})\, v \cos^2 2\theta + \Omega(\mathrm{D}_J, \mathrm{D}_J)\, v \operatorname{sen}^2 2\theta +$$
$$+ 2\Omega\,(\delta_{\tilde{v}}, \mathrm{D}_J)\, v \cos 2\theta \operatorname{sen} 2\theta\,, \tag{27}$$

che esprime le curvature hermitiane associate K_a delle linee di una superficie quasi caratteristica di $\mathfrak{V}_{2n}$, uscenti dal punto O.

9. – Dal risultato ottenuto discendono alcune osservazioni.

Si noti anzitutto che *i coefficienti* $\Omega(\mathrm{D}_J, \mathrm{D}_J)\, v$, $\Omega\,(\delta_{\tilde{v}}, \mathrm{D}_J)\, v$, che intervengono nella (27), a causa della (20) dipendono da $\mathrm{d}^* v$ e pertanto, tenuta presente la (18), *dipendono, in definitiva, dal tensore di Nijenhuis della struttura quasi complessa di* $\mathfrak{V}_{2n}$.

La (27) permette poi di discutere facilmente il modo di variare di K_a al variare dell'angolo θ.

Invero, si riconosce subito che K_a presenta due minimi uguali e due massimi uguali, in corrispondenza a due coppie di direzioni ortogonali mutuamente bisecantisi.

Con un cambiamento della semiretta origine dell'anomalia θ, la (27) può scriversi

$$K_a^2 = (K_a^m)^2 \cos^2 2\theta + (K_a^M)^2 \operatorname{sen}^2 2\theta\,,$$

dove K_a^m, K_a^M sono le curvature associate rispettivamente minima e massima; o anche, facendo intervenire i raggi di curvatura,

$$\frac{1}{R_a^2} = \frac{\cos^2 2\theta}{(R_a^M)^2} + \frac{\operatorname{sen}^2 2\theta}{(R_a^m)^2}\,. \tag{28}$$

L'indicatrice del raggio di curvatura hermitiana associata $R_a = \dfrac{1}{K_a}$, cioè il diagramma polare $\varrho = R_a(\theta)$, si ottiene dunque dall'ellisse

$$\frac{1}{\varrho'^2} = \frac{\cos^2 \theta'}{(R_a^M)^2} + \frac{\operatorname{sen}^2 \theta'}{(R_a^m)^2}$$

mediante la semplice trasformazione $\varrho' = \varrho$, $\theta' = 2\theta$.

Si tratta di una curva di tipo asteroidale con quattro prominenze.

In particolare, se $\mathfrak{V}_{2n}$ è a struttura complessa, cioè $N^p_{\cdot rl} = 0$ (n. 2), dalla (18) segue $\mathrm{d}^* = 0$ e quindi la (21) diviene

$$\mathrm{D}_J = \delta_v^J = J^{-1}\, \delta_v\, J = -J \delta_v\, J\,.$$

È ormai immediato riconoscere che, in virtù della $(11)_1$ e delle proprietà formali (24), (25), (26) risulta:

$$\Omega(\mathrm{D}_J,\ \mathrm{D}_J)\, v = \Omega(J\delta_{\tilde{v}},\ J\delta_{\tilde{v}})\, v = \Omega(\delta_{\tilde{v}},\ \delta_{\tilde{v}}) v,$$

$$\Omega(\delta_{\tilde{v}},\ \mathrm{D}_J)\, v = -\Omega(\delta_{\tilde{v}},\ J\delta_{\tilde{v}})\, v = 0,$$

onde, dalla (27) segue

$$K_a^2 = \Omega(\delta_{\tilde{v}},\ \delta_{\tilde{v}})\, v\,.$$

Si ritrova così che nel caso di una $\mathfrak{V}_{2n}$ a struttura complessa la curvatura K_a riesce costante (n. 5); l'indicatrice si riduce quindi ad una circonferenza.

10. - Bibliografia.

[1] L. Bianchi, *Lezioni di geometria differenziale*, 2ª ed., Spoerri, Pisa 1902.

[2] M. Bruni, *Su alcuni sistemi di sottospazi di uno spazio hermitiano*, Rend. Mat. e Appl. **20** (1961).

[3] B. Eckmann, *Cours sur les variétés complexes*, Centro Internazionale Matematico Estivo C.I.M.E., Cremonese, Roma 1956.

[4] L. P. Eisenhart, *An introduction to differential geometry*, Princeton Univ. Press., 1947.

[5] A. Lichnerowicz, *Théorie globale des connexions et des groupes d'holonomie*, Cremonese, Roma 1955.

[6] E. Martinelli, *Qualche proprietà geometrica nelle varietà a struttura complessa*, Atti Accad. Ligure **9** (1953).

[7] E. Martinelli, *Sulla curvatura delle superficie caratteristiche in una varietà kähleriana*, Atti Accad. Naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. **21** (1956).

[8] E. Martinelli, *Sulle varietà a struttura complessa*, Ann. Mat. Pura Appl. **43** (1957).

[9] E. Martinelli, *Generalizzazione dei teoremi di minimo volume di Wirtinger a tutte le varietà kähleriane o quasi kähleriane*, Ann. Mat. Pura Appl. **50** (1960).

[10] E. Martinelli, *Sulle varietà a struttura complessa o quasi complessa*, Sem. Mat. Univ. Bari **52-53** (1960).

[11] A. Newlander and L. Niremberg, *Complex analytic coordinates in almost complex manifolds*, Ann. of Math. **65** (1957).

[12] G. B. Rizza, *Deviazione caratteristica delle faccette piane di una varietà a struttura complessa*, Atti Accad. Naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. **24** (1958).

[13] G. B. Rizza, *Deviazione caratteristica e proprietà locali delle 2q-faccette di una V_{2n} a struttura complessa*, Rend. Accad. Naz. dei XL **10** (1959).

[14] G. B. Rizza, *Teoremi di curvatura in una V_{2n} quasi hermitiana*, Riv. Mat. Univ. Parma **2** (1961).

[15] B. SEGRE, *Forme differenziali e loro integrali*, I, II, Docet, Roma 1951, 1955.

[16] A. WEIL, *Introduction à l'étude des variétés kähleriennes*, Hermann, Paris 1958.

[17] K. YANO, *The theory of Lie derivatives, and its applications*, North-Holland, Amsterdam 1955.

[18] K. YANO and S. BOCHNER, *Curvature and Betti numbers*. Ann. of Math. Studies 32, Princeton Univ. Press 1953.

Summary.

An examination is made of the associated hermitian curvatures K_a in a fixed point, of the curves $\mathfrak{L}$ belonging to a given almost-characteristic surface, imbedded in an almost-hermitian manifold.

Contrary to the hermitian case, the curvature generally depends on $\mathfrak{L}$. An indicatrix, which is obtained by an elementary transformation of an ellipse, gives the distribution of the values of $R_a = 1/K_a$.

* * *