Riv. Mat. Univ. Parma (2) 3 (1962), 325-329

ROLF REISSIG (*)

Bemerkung zu einer Arbeit von Sestini. (**)

In seiner Arbeit « *Criterio di stabilità in un problema non lineare di meccanica dei sistemi a più gradi di libertà*, Riv. Mat. Univ. Parma **5** (1954), 227-232 » betrachtet G. SESTINI die Vektor-Differentialgleichung

$$\ddot{P}(t) = \Phi(P,\ \dot{P},\ t) = -G(P) - R(P,\ \dot{P}) + F(t)\,,$$

$$P = \{x_i\}, \qquad G = \{g_i\}, \qquad R = \{r_i\}, \qquad F = \{f_i\}.$$

Er behauptet für jede Lösung, die in einem Intervall $(t_0,\ +\infty)$ definiert ist, die Beschränktheit der Vektoren $P(t)$, $\dot{P}(t)$. Dazu wird über die Vektoren G, R, F folgendes vorausgesetzt:

a) $g_i\, x_i \geqq 0, \quad g_i \geqq \omega^2\, x_i$ $(\omega > 0$ konstant);

b) der Vektor R sei beschränkt, wenn $\dot{P}$ beschränkt ist; ferner sei

$$r_i\, \dot{x}_i \geqq 0, \qquad \lim_{|\dot{x}_i| \to \infty} |\, r_i \,| = +\infty;$$

c) die Funktionen $f_i(t)$ sollen über $(t_0,\ +\infty)$ von beschränkter Schwankung sein.

Auf Grund dieser Voraussetzungen besteht kein wesentlicher Unterschied zu Systemen mit einem Freiheitsgrad. Z.B. genügt ihnen die Differentialgleichung

$$\ddot{x} = -g(x) - r(x,\ \dot{x}) + f(t)\,,$$

(*) Indirizzo: Prof. Dr. ...; Bundenbacher Weg 51, Berlin-Weissensee, Deutschland.
(**) Ricevuto il 30-X-1961.

wobei

$$g(x) = \frac{1}{2}\,\omega^2(x + |\,x\,|)\,, \quad r(x,\ \dot{x}) = 2\,(\dot{x})^3, \quad f(t) \equiv 0$$

gesetzt wird.

Sestini bemerkt zunächst, dass bei den über $(t_0,\ +\infty)$ definierten Lösungen $P(t)$ jede unbeschränkte Komponente $x_i(t)$ notwendig oszillatorisch sein muss. Hierbei stützt er sich auf die Annahme a), die jedoch nicht ausreicht, wie das obige Beispiel zeigt: Dieses lässt wegen $g(x) \equiv 0$ für $x \leqq 0$ die unbeschränkte, monoton abnehmende Lösung

$$x(t) = -\sqrt{t} \qquad [x'(t) = -1/(2\sqrt{t})]\,,$$

die für $t \geqq t_0 > 0$ definiert ist, zu.

Die Bemerkung stimmt aber, wenn man

$$g_i(P) \to -\infty \qquad \text{für } x_i \to -\infty$$

annimmt.

Sestini betrachtet sodann eine über $(t_0,\ +\infty)$ definierte Lösung $P(t)$, die eine oszillatorische Komponente $x_i(t)$ besitzt, und versucht, die Beschränktheit der zugehörigen Maxima und Minima darzulegen. Beim Beweisverfahren spielen gewisse Symmetrieeigenschaften der Funktion $\Phi(P,\ \dot{P},\ t)$ in Bezug auf den Ursprung des $P, \dot{P}$-Phasenraumes eine Rolle. Sie bestehen darin, dass für den Vektor $\overline{P}(t) = -P(t)$ eine Gleichung

$$\ddot{\overline{P}}(t) = \overline{\Phi}(\overline{P},\ \dot{\overline{P}},\ t) = -\overline{G}(\overline{P}) - \overline{R}(\overline{P},\ \dot{\overline{P}}) + \overline{F}(t)$$

gilt, in der die Funktionen G, $\overline{R}$, $\overline{F}$ wiederum den Voraussetzungen a)-c) genügen. Dabei führt die Bedingung

$$\overline{g}_i \geqq \omega^2\,\overline{x}_i\,,$$

wegen $\overline{g}_i = -g_i$ zu der Forderung

$$g_i \leqq \omega^2\,x_i\,.$$

Aus ihr geht hervor, dass der angewandte Beweis nur in dem Sonderfall $G(P) \equiv \omega^2 P$ (d.h. bei einer linearen elastischen Kraft) aufrechterhalten werden kann.

Firenze, 28 dicembre 1961 (1)

Chiar.mo Prof. Dr. CARMELO LONGO
Direttore della « Rivista di Matematica della Università di Parma ».

Caro LONGO,

ho ricevuto la copia, gentilmente inviatami, della lettera con la quale il prof. REISSIG, comunicandovi di aver ricevuto una mia lettera, vi prega di pubblicare senz'altro le sue osservazioni ad una mia Nota del Vol. **5** (1954) della prima serie della « Rivista ».

Nella lettera, rimasta inspiegabilmente senza risposta, che, presa conoscenza delle sue osservazioni, avevo inviato al sig. REISSIG in data 30 novembre c., gli davo atto della giustezza della sua prima osservazione testualmente scrivendo: « La sua prima osservazione è ineccepibile finchè le condizioni a) di pag. 228 non vengano completate con la condizione $\lim g_i(x_i) = -\infty$ per $x_i \to -\infty$, od altra equivalente, e non so spiegare come tale condizione non figuri nel testo, essendo implicita nella affermazione del n. 3, ove si dice: « analogamente si prova che la x_i non può diventare definitivamente decrescente ... », in quanto la dimostrazione del caso opposto si basa essenzialmente sul fatto che è $\lim g_i(x_i) = +\infty$ per $x_i \to +\infty$.

Io penso che, o nella mia trascrizione o durante la stampa, sia stato saltato un rigo, in quanto manca pure qualsiasi accenno alla continuità dei vettori $\boldsymbol{G}$ ed $\boldsymbol{R}$, richiesta in tutti i criteri analoghi (vedasi ad es. REUTER) e da me esplicitamente dichiarata per R, essendo per $g(x) = \omega^2 cx$ evidente, nella mia precedente Nota [Riv. Mat. Univ. Parma (1) **2** (1951), 303-314], di cui il lavoro in questione è una estensione.

In merito alle considerazioni formanti oggetto della seconda osservazione, non nascondevo al sig. REISSIG qualche perplessità, testualmente osservando: « Pur non negando l'opportunità, rileggendola attentamente dopo tanto tempo, di qualche completamento alla dimostrazione della limitatezza delle x_i e delle $\dot{x}_i$, la Sua conclusione mi lascia dubbioso. Infatti, se ho ben capito, da

$$\ddot{P} = -\boldsymbol{G}(P) - \boldsymbol{R}(P, \dot{P}) + \boldsymbol{F}(t) ,$$

(1) Sentiamo doveroso far seguire alla « Bemerkung » del Prof. Dr. R. REISSIG la lettera inviata dal Prof. Dr. G. SESTINI al Prof. Dr. C. LONGO (N.R.).

facendovi $P = -P$, Ella deduce:

$$-\ddot{\overline{P}} = -\boldsymbol{G}(-\overline{P}) - \boldsymbol{R}(-\overline{P}, -\dot{\overline{P}}) + \boldsymbol{F}(t),$$

da cui

$$\ddot{\overline{P}} = -\overline{\boldsymbol{G}}(\overline{P}) - \overline{\boldsymbol{R}}(\overline{P}, \dot{\overline{P}}) + \overline{\boldsymbol{F}}(t),$$

avendo posto

$$\boldsymbol{G}(-\overline{P}) = -\overline{\boldsymbol{G}}(\overline{P}), \quad \boldsymbol{R}(-\overline{P}, -\dot{\overline{P}}) = -\overline{\boldsymbol{R}}(\overline{P}, \dot{\overline{P}}), \quad \boldsymbol{F}(t) = -\overline{\boldsymbol{F}}(t).$$

Avendosi, per le ipotesi a), $g_i(x_i) \geqq \omega^2 x_i$, essendo per le posizioni fatte $-x_i = \overline{x}_i$, $g_i(-\overline{x}_i) = -\overline{g}_i(\overline{x}_i)$, si ha:

$$g_i(x_i) = -\overline{g}_i(\overline{x}_i),$$

e quindi

$$-\overline{g}_i(\overline{x}_i) \geqq \omega^2 x_i = -\omega^2 \overline{x}_i,$$

da cui

$$\overline{g}_i(\overline{x}_i) \leqq \omega^2 \overline{x}_i,$$

contrariamente a quanto Ella mi sembra affermi ».

Terminando la lettera suggerivo al sig. REISSIG l'idea di pubblicare la doverosa rettifica del testo della mia Nota sotto forma di scambio di lettere e concludevo: « In ogni caso fin d'ora non posso che ringraziarLa delle Sue osservazioni, che mi offriranno l'occasione di colmare la involontaria lacuna del testo della Nota, che la rende, nella forma, inesatta. »

Non avendo il sig. REISSIG aderito a questa mia proposta, io Ti prego, naturalmente se il Comitato di redazione della Rivista lo riterrà opportuno, di far seguire alla Nota del sig. REISSIG questa mia lettera, che vuol essere insieme commento alla Nota del sig. REISSIG e rettifica alla mia, precisando che la disuguaglianza

$$\omega^2[x_i^2(t_1) - x_i^2(t_0)] = 2\int_{t_0}^{t_1} \omega^2 x_i \dot{x}_i \, dt \leqslant 2\int_{t_0}^{t_1} g_i \dot{x}_i \, dt$$

di pag. 230 resta valida per $\dot{x}_i \geqslant 0$ e non per $\dot{x}_i \leqslant 0$, come risulta dal testo, avendo fatto coincidere l'intervallo (t_0, t_1) con quello corrispondente ad un massimo positivo ed ad un minimo negativo, immediatamente successivo, per la x_i. Per poter quindi scrivere la (6) di pagina 230 occorre completare la dimostrazione, considerando anche intervalli per t nei quali sia $\dot{x}_i \leqslant 0$.

Rinnovando a Te e ai Colleghi della Rivista i migliori auguri per il 1962, invio i miei migliori e più cordiali saluti.

Tuo aff.mo GIORGIO SESTINI.

Berlin, 29 Jan. 1962 (²)

Sehr geehrter Herr Professor SESTINI

Für Ihren ausführlichen Brief von 30 November 1961 danke ich Ihnen bestens. Offenbar liegt aber ein missverständnis vor; denn die Abschätzung $\bar{g}_i(\bar{x}_i) \leqslant \omega^2\, \bar{x}_i$, die aus den Bedingungen Ihrer Arbeit folgt, gestattet nicht die Anwendung Ihres Beweisverfahrens auf den Fall, den Sie in der Arbeit nicht behandelt haben. Das ist der Inhalt meiner Bemerkung.

Übrigens bin ich der Meinung, dass die Behauptung Ihres Satzes richtig ist; jedoch wird man eine andere Beweismethode wählen müssen, z. B. die Bildung einer geeigneten LJAPUNOWschen Funktion und Anwendung der Hauptsätze der LJAPUNOWschen Theorie.

Mit freundlichen Grüssen Ihr R. REISSIG.

(²) Sentiamo pure doveroso pubblicare anche questa lettera del REISSIG, gentilmente inviatici dal SESTINI il 10 febbraio 1962 (N.R.).