

ANTONIO CARLO GARIBALDI (\*)

## Vibrazioni forzate di particolari sistemi non lineari, in due gradi di libertà. (\*\*)

### § 1. - Introduzione.

1. - In questo lavoro si considera l'equazione:

$$(E) \quad \ddot{x} + \dot{x} + \varepsilon \left[ a \ddot{x} + b \dot{x} + c x + a' \frac{d^2}{dt^2}(x^3/3) + b' \frac{d}{dt}(x^3/3) + c'(x^3/3) \right] = \varepsilon e(t),$$

che corrisponde ad alcuni fenomeni di vibrazioni in due gradi di libertà che preciseremo nel n. 2.

Per poter disporre di uno strumento di ricerca, si estende anzitutto ai sistemi non-lineari del terzo ordine il metodo di approssimazione di CARTWRIGHT [4] (\*\*\*). Questo metodo è rigorosamente giustificato per piccoli valori del parametro  $\varepsilon$  che compare nell'equazione, cioè per debole non-linearità. Esso viene applicato alla (E) per studiare le soluzioni armoniche (cioè le soluzioni di periodo approssimativamente eguale a quello della forza esterna  $e(t)$  supposta sinusoidale pura, come d'abitudine) e le oscillazioni libere, cioè le soluzioni periodiche di (E), in cui si ponga  $e(t) = 0$ .

Tale ricerca, svolta nei § 2, 3 conduce naturalmente allo studio di sistemi non-lineari autonomi del terzo ordine, cioè composti di tre equazioni differenziali del 1° ordine, aventi particolare interesse per la varietà di comportamento

(\*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università, Genova, Italia.

(\*\*) Ricevuto il 13-II-1963.

(\*\*\*) I numeri tra parentesi [ ] si riferiscono alla Bibliografia finale.

che presentano. I calcoli sono condotti direttamente sulle equazioni che schematizzano gli esempi concreti che svilupperemo nei numeri successivi e del resto sono rappresentativi della varietà di situazioni che presenta l'equazione generale (E).

Più complessa è la questione delle eventuali soluzioni sottoarmoniche, per esempio di periodo eguale a  $1/3$  di quello della forza esterna, per cui il solo metodo di CARTWRIGHT non è sufficiente in quanto non permette di concludere sulla stabilità.

Lo studio della stabilità di queste soluzioni mediante il metodo diretto del tipo [3] sarà argomento di un prossimo lavoro.

Si dà pure qualche notizia sulle soluzioni quasi-periodiche che si presentano sotto forma di cicli limite del sistema autonomo associato, così come sulle soluzioni transienti nell'intorno delle soluzioni periodiche.

2. - Per passare ad esempi concreti consideriamo in primo luogo il circuito elettrico della Fig. I costituito da:

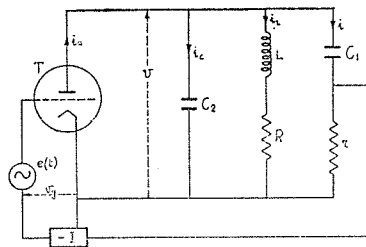


FIG. I.

i) un pentodo  $T$ , per cui la corrente anodica  $i_a$  risulta funzione univoca e continua della tensione di griglia  $e_g$ :  $i_a = \varphi(e_g)$ ;

ii) un apparecchio, indicato in figura con  $-I$ , sulla cui realizzazione concreta non ci fermeremo, che cambia il segno della tensione attraverso  $r$ , dopo che si è applicata alla griglia come  $e_g$ ;

iii) alcuni elementi reattivi, e precisamente una induttanza  $L$ , due capacità  $C_1$ ,  $C_2$ , due resistenze  $R$ ,  $r$ ;

iv) infine una forza elettromotrice alternata  $e(t)$  inserita nel circuito di griglia.

Indicando ora con  $e$  la differenza di potenziale tra l'anodo e il catodo del

tubo  $T$  e con  $i_a, i_L, i_o$ , le correnti nei vari rami del circuito, si ottengono facilmente le relazioni:

$$\left\{ \begin{array}{l} e_o = r i + \varepsilon e(t) \\ i_a = i_o + i_L + i \\ \frac{de}{dt} = -\frac{i_c}{C_2} = -\frac{i}{C_1} - r \frac{di}{dt} \\ e = -L \frac{di_L}{dt} - R i_L . \end{array} \right.$$

Se si assume come incognita unica  $e_o = x$  e si fanno le posizioni:

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) = r C_1 + R(C_1 + C_2) - R C_1 r \varphi'(e_o) \\ k_1 = LC_1 C_2 r, \quad k_2 = RC_1 C_2 r - (L/R) C_1 r, \quad k_3 = L/R \\ e(t) = E \cos(\omega t + \varphi) \\ e_1 = E \{ [1 - rRC_1 C_2 \omega^2 - L \omega^2 (C_1 + C_2)] \cos \varphi + [LC_1 C_2 r \omega^3 + r C_1 \omega + \\ \qquad \qquad \qquad + R \omega (C_1 + C_2)] \sin \varphi \} \\ e_2 = E \{ [LC_1 C_2 r \omega^3 + r C_1 \omega + R \omega (C_1 + C_2)] \cos \varphi - \\ \qquad \qquad \qquad - [1 - rRC_1 C_2 \omega^2 - L \omega^2 (C_1 + C_2)] \sin \varphi \}, \end{array} \right.$$

si conclude con l'equazione differenziale del terzo ordine

$$k_1 \ddot{x} + [k_2 + k_3 f(x)] \ddot{x} + k_3 f'(x) \dot{x}^2 + f(x) \dot{x} + x = e_1 \cos \omega t + e_2 \sin \omega t,$$

che nel caso delle oscillazioni libere è stata studiata da L. L. RAUCH [1], e che porremo sotto la forma

$$\ddot{x} + \frac{k_2}{k_1} \ddot{x} + \frac{x}{k_1} + \frac{k_3}{k_1} \frac{d}{dt} [f(x) \dot{x}] + \frac{1}{k_1} [f(x) \dot{x}] = e(t).$$

Prendiamo ora in esame il circuito della Fig. II, in cui  $T$  è un triodo di cui  $\mu$  è il fattore di amplificazione; supporremo che la funzione caratteristica

$$i = \varphi(v_p + \mu v_g)$$

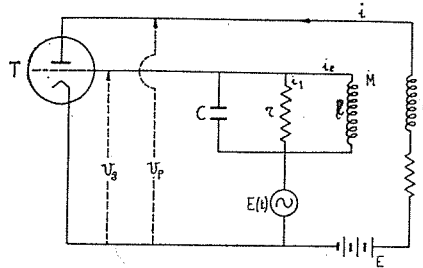


FIG. II.

sia una funzione crescente e quindi invertibile, per cui

$$v = v_p + \mu v_g = g(i).$$

Assumiamo come incognita la quantità  $x = i - i_0$ , essendo  $i$  la corrente di placca ed  $i_0$  la soluzione (necessariamente unica) dell'equazione

$$R i + g(i) = E.$$

Ponendo ora:

$$\left\{ \begin{array}{l} F(x) = R x + g(x + i_0) - g(i_0) \\ k = L - \frac{M^2}{l}, \quad a = \frac{1}{k}, \quad b = \frac{1}{r c}, \quad \beta = \frac{1}{c k l}, \quad \alpha = \frac{\mu M - L}{c l} \\ (a > 0, \quad b > 0, \quad \beta > 0, \quad k > 0, \quad \alpha \geq 0) \\ e_1 = \left[ -\frac{\mu}{l c} + \omega^2 \frac{M}{l} \right] E \cos \varphi + \frac{\mu \omega}{r c} E \sin \varphi \\ e_2 = \left[ \frac{M}{l c} - \omega^2 \frac{M}{c} \right] E \sin \varphi + \frac{\mu \omega}{r c} E \cos \varphi, \end{array} \right.$$

si perviene all'equazione definitiva

$$\ddot{x} + [a F'(x) + b] \ddot{x} + a F''(x) \dot{x}^2 + a [b F'(x) - \alpha] \dot{x} + \beta F(x) = e_1 \cos \omega t + e_2 \sin \omega t.$$

Nel caso di vibrazioni libere essa è stata studiata da G. COLOMBO [2]. Naturalmente, per sviluppare lo studio con metodi di approssimazione, validi per piccola non-linearità, supporremo di lavorare col tubo  $T$  in una zona limitata nell'intorno del punto di flesso della curva sperimentale  $i_a = \varphi(v)$ , assunto come origine, per cui potremo porre (cfr. Fig. III).

$$i_a = a v - b v^3, \quad v = a' i_a + b' i_a^3, \quad (a', b', a, b > 0),$$

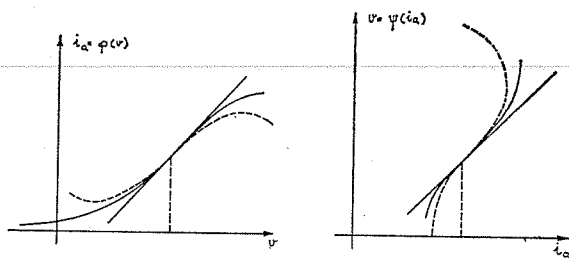


FIG. III.

essendo  $v = v_p + \mu v_s$  nel caso del 2° circuito, e riducendosi ad  $e_s$  per il 1°. Si ottengono così per le funzioni  $f(x)$  e  $g(x)$  le espressioni:

$$f(x) = \alpha + \beta x^2, \quad g(x) = \gamma x + \delta x^3, \quad (\alpha \geq 0; \beta, \gamma, \delta > 0),$$

per una zona limitata:  $|x| \leq X$ .

Per far rientrare questi circuiti nella (E) basta osservare che nel 1° caso si ha:

$$\ddot{x} + \frac{\alpha}{k_1} \dot{x} + \left( \frac{k_2}{k_1} + \frac{k_3 \alpha}{k_1} \right) \ddot{x} + \frac{x}{k_1} + \frac{k_3 \beta}{3 k_1} \frac{d^2}{dt^2} (x^3) + \frac{\beta}{3 k_1} \frac{d}{dt} (x^3) = e(t),$$

che diventa, con una ovvia normalizzazione,

$$\ddot{x} + \dot{x} + \varepsilon \left[ a \ddot{x} + c x + a' \frac{d^2}{dt^2} (x^3) + b' \frac{d}{dt} (x^3) \right] = \varepsilon \bar{e}(t) \quad (a', b', c' > 0; a \geq 0),$$

avendo supposto  $\frac{1}{k_1}$ ,  $\frac{k_2 + k_3 \alpha}{k_1}$ ,  $\frac{k_3 \beta}{3 k_1}$ ,  $\frac{\beta}{3 k_1}$  piccoli del 1° ordine in  $\varepsilon$ , e così pure  $e(t)$ .

Similmente dal 2° circuito si arriva all'equazione

$$\ddot{x} + \dot{x} + \varepsilon \left[ a \ddot{x} + c x + a' \frac{d^2}{dt^2} F(x) + c' F(x) \right] + \varepsilon^2 \left[ b \dot{x} + b' \frac{d}{dt} (x^3) \right] = \varepsilon e(t)$$

$$(a, c, a', c' > 0),$$

avendo supposto  $b, a F(x), \beta F(x), e(t)$  piccoli del 1° ordine in  $\varepsilon$ , e quindi risultando  $a b \frac{d}{dt} F(x)$  piccolo del 2° ordine.

3. — Indichiamo ora qualche problema meccanico che conduce ad una equazione del tipo (E).

Si consideri ad esempio un giroscopio  $S$  (Fig. IV) riferito ad angoli di EULERO  $\varphi, \vartheta, \psi$ , avente momento d'inerzia equatoriale  $J_1$  e momento giroscopico  $J_2$ , per cui l'energia cinetica è

$$\mathfrak{T} = \frac{1}{2} J_1 (\dot{\varphi}^2 \sin^2 \vartheta + \dot{\vartheta}^2) + \frac{1}{2} J_2 (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \vartheta)^2.$$

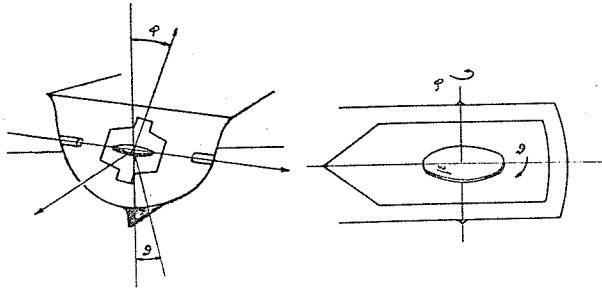


FIG. IV.

Se indichiamo con  $M_\varphi, M_\vartheta, M_\psi$  le componenti lagrangiane della sollecitazione esterna, le equazioni di LAGRANGE sono

$$(3.1) \quad \begin{cases} J_1 \ddot{\varphi} \sin^2 \vartheta + J_2 \ddot{\psi} \cos \vartheta + J_2 \ddot{\varphi} \cos^2 \vartheta + 2(J_1 - J_2) \dot{\varphi} \dot{\vartheta} \sin \vartheta \cos \vartheta - \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad - J_2 \dot{\vartheta} \dot{\psi} \sin \vartheta = M_\varphi \\ J_1 \ddot{\vartheta} - (J_1 - J_2) \dot{\varphi}^2 \sin \vartheta \cos \vartheta + J_2 \dot{\varphi} \dot{\psi} \sin \vartheta = M_\vartheta \\ J_2 \ddot{\psi} + J_2 \ddot{\varphi} \cos \vartheta - J_2 \dot{\varphi} \dot{\vartheta} \sin \vartheta = M_\psi. \end{cases}$$

Un giroscopio di questo tipo, montato per esempio su un aereo, serve per misure di orientazione e genericamente costituisce un « controllo » [8]. Supponiamo  $\dot{\varphi} = \omega = \text{costante}$  e  $\vartheta$  vicino a  $\pi/2$  per modo che posto  $\vartheta = (\pi/2) + \vartheta_1$  si possa considerare  $\vartheta_1$  piccolo di 1° ordine, e supponiamo ancora  $\dot{\varphi}$  piccola del 1° ordine. Dalle (3.1) si passa così alle equazioni approssimate

$$(3.2) \quad \begin{cases} J_1 \ddot{\varphi} - J_2 \omega \dot{\vartheta}_1 = M_\varphi \\ J_1 \ddot{\vartheta}_1 + J_2 \omega \dot{\varphi} = M_\vartheta, \end{cases}$$

mentre la terza è identicamente verificata, nello stesso ordine di approssimazione se si suppone  $M_\varphi = 0$ .

Sia ora

$$M_\varphi = -\lambda \varphi + e(t), \quad M_\vartheta = f(\vartheta) = f(\vartheta_1).$$

Posto  $\xi = \vartheta_1$  si ha il sistema

$$(3.3) \quad \begin{cases} J_1 \ddot{\varphi} - J_2 \omega \xi = -\lambda \varphi + e(t) \\ J_1 \ddot{\xi} + J_2 \omega \dot{\varphi} = f(\xi), \end{cases}$$

e se si suppone che la coppia resistente  $f(\vartheta_1)$  sia realizzata mediante attrito, come avviene per es. nel pendolo di FROUDE, potremo avere per  $f(\xi)$  la legge non-lineare

$$f(\xi) = \alpha \xi - \beta \xi^3 \quad (\alpha, \beta > 0),$$

da cui, sostituendo in (3.3) con ovvia normalizzazione, l'equazione del 3° ordine

$$(3.4) \quad \ddot{\xi} + \dot{\xi} + a \ddot{\xi} + a^* \xi + b \frac{d^2}{dt^2} (\xi^3) + b^* \xi^3 = e(t)$$

$$(a < 0, a^* > 0, b > 0, b^* < 0).$$

La (3.4) differisce alquanto dalle equazioni dei circuiti elettrici considerati in precedenza e costituisce una generalizzazione dell'oscillatore di VAN DER POL.

Un'altra possibile applicazione concreta che conduce a (3.4) è data in [5] limitatamente al caso lineare e consiste in pratica nell'uso del giroscopio come stabilizzatore contro il rollio di una nave nell'ordine di idee della soluzione di SCHNEIDER-FIEUX. Si parte dalle equazioni approssimate (3.2), che danno il cosiddetto accoppiamento giroscopico e si suppone di avere una coppia resistente non-lineare  $M_\vartheta$ , mentre  $M_\varphi$  è la coppia che compare nell'equazione del rollio della nave (rappresentato da  $\varphi$ ), per cui contiene un termine di richiamo e un termine forzato dato dal moto ondoso del mare.

## § 2. - Risonanza armonica.

### 4. - Estensione del metodo di Cartwright.

Nell'equazione

$$(4.1) \quad \ddot{x} + \dot{x} + \varepsilon \left[ a \ddot{x} + b \dot{x} + c x + \left[ \frac{a'}{3} \frac{d^2}{dt^2} + \frac{b'}{3} \frac{d}{dt} + \frac{c'}{3} \right] x^3 \right] = \varepsilon E \cos \omega t,$$

supporremo  $\varepsilon$  ed  $\omega - 1$  quantità piccole del 1° ordine, indipendenti tra loro e porremo per comodità:  $\sigma = (\omega - 1)/\varepsilon$  ( $-\infty < \sigma < +\infty$ ), considerando  $\sigma$  come parametro.

Cerchiamo soluzioni della forma:

$$(4.2) \quad \begin{cases} x(t) = b_0 + b_1 \sin t + b_2 \cos t + \varepsilon X(t) + \varepsilon^2 \xi(t) \\ \dot{x}(t) = b_1 \cos t - b_2 \sin t + \varepsilon \dot{X}(t) + \varepsilon^2 \dot{\xi}(t) \\ \ddot{x}(t) = -b_1 \sin t - b_2 \cos t + \varepsilon \ddot{X}(t) + \varepsilon^2 \ddot{\xi}(t), \end{cases}$$

e, poichè vogliamo che la determinazione delle condizioni iniziali dipenda soltanto dalla prima approssimazione, imponiamo sulle  $X(t)$ ,  $\xi(t)$  le condizioni iniziali

$$X(0) = \dot{X}(0) = \ddot{X}(0) = 0, \quad \xi(0) = \dot{\xi}(0) = \ddot{\xi}(0) = 0,$$

e naturalmente le  $X(t)$ ,  $\xi(t)$  saranno soluzioni di certe equazioni differenziali dedotte dalla (4.1) sostituendo in essa la soluzione nella forma cercata. Orbene proprio considerando queste equazioni e seguendo la linea del ragionamento di [4] si riesce a dimostrare che le tre funzioni  $\xi(t)$ ,  $\dot{\xi}(t)$ ,  $\ddot{\xi}(t)$  sono limitate nell'intervallo  $(0, 3\pi)$  per  $\varepsilon$  abbastanza piccolo.

Ciò permette di scrivere gli sviluppi (4.2) nella forma:

$$\begin{cases} x(t) = b_0 + b_1 \sin t + b_2 \cos t + \varepsilon X(t) + O(\varepsilon^2) \\ \dot{x}(t) = b_1 \cos t - b_2 \sin t + \varepsilon \dot{X}(t) + O(\varepsilon^2) \\ \ddot{x}(t) = -b_1 \sin t - b_2 \cos t + \varepsilon \ddot{X}(t) + O(\varepsilon^2), \end{cases}$$

essendo le  $O(\varepsilon^2)$  quantità infinitesime con  $\varepsilon^2$ , per  $\varepsilon$  abbastanza piccolo.



Volendo cercare soluzioni periodiche con periodo  $2\pi/\omega$  conviene anzitutto fare le seguenti posizioni:

$$x(0) = b_0 + b_2, \quad \dot{x}(0) = b_1, \quad \ddot{x}(0) = -b_2,$$

$$x(2\pi/\omega) = b'_0 + b'_2, \quad \dot{x}(2\pi/\omega) = b'_1, \quad \ddot{x}(2\pi/\omega) = -b'_2.$$

Dalle (4.2) si ottiene il seguente sistema alle differenze nelle incognite  $b'_0, b'_1, b'_2$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{b'_0 - b_0}{\pi\varepsilon} = \frac{1}{\pi} [X(2\pi/\omega) + \ddot{X}(2\pi/\omega)] + O(\varepsilon) = f_0(b_0, b_1, b_2) \\ \frac{b'_1 - b_1}{\pi\varepsilon} = 2b_2\sigma + \frac{1}{\pi} \dot{X}(2\pi/\omega) + O(\varepsilon) = f_1(b_0, b_1, b_2) \\ \frac{b'_2 - b_2}{\pi\varepsilon} = -2b_1\sigma - \frac{1}{\pi} \ddot{X}(2\pi/\omega) + O(\varepsilon) = f_2(b_0, b_1, b_2). \end{array} \right.$$

Eseguiti i calcoli e trascurati i termini  $O(\varepsilon)$  ed  $O(\omega - 1)$ , si ottiene:

$$(4.3) \left\{ \begin{array}{l} \frac{b'_0 - b_0}{\pi\varepsilon} = -2b_0 \left[ c + \frac{c'}{3} \left[ b_0^2 + \frac{3}{2} b_1^2 + \frac{3}{2} b_2^2 \right] \right] \\ \frac{b'_1 - b_1}{\pi\varepsilon} = 2b_2\sigma + b_1 \left[ c - a + (c' - a') \left[ b_0^2 + \frac{1}{4} b_1^2 + \frac{1}{4} b_2^2 \right] \right] - \\ \quad - b_2 \left[ b + b' \left[ b_0^2 + \frac{1}{4} b_1^2 + \frac{1}{4} b_2^2 \right] \right] \\ \frac{b'_2 - b_2}{\pi\varepsilon} = -2b_1\sigma + b_2 \left[ c - a + (c' - a') \left[ b_0^2 + \frac{1}{4} b_1^2 + \frac{1}{4} b_2^2 \right] \right] + \\ \quad + b_1 \left[ b + b' \left[ b_0^2 + \frac{1}{4} b_1^2 + \frac{1}{4} b_2^2 \right] \right] - E. \end{array} \right.$$

Per studiare la stabilità di una soluzione periodica  $\bar{b}_0, \bar{b}_1, \bar{b}_2$  delle (4.3) converrà porre

$$b_0 = \bar{b}_0 + \beta_0, \quad b'_0 = \bar{b}_0 + \beta'_0, \quad b_1 = \bar{b}_1 + \beta_1, \quad \dots$$

Si può ora considerare alla maniera solita il sistema alle variazioni

$$(4.4) \quad \begin{cases} \frac{\beta'_0 - \beta_0}{\pi \varepsilon} = \left[ \frac{\partial f_0}{\partial b_0} \right] \beta_0 + \left[ \frac{\partial f_0}{\partial b_1} \right] \beta_1 + \left[ \frac{\partial f_0}{\partial b_2} \right] \beta_2 \\ \frac{\beta'_1 - \beta_1}{\pi \varepsilon} = \left[ \frac{\partial f_1}{\partial b_0} \right] \beta_0 + \left[ \frac{\partial f_1}{\partial b_1} \right] \beta_1 + \left[ \frac{\partial f_1}{\partial b_2} \right] \beta_2 \\ \frac{\beta'_2 - \beta_2}{\pi \varepsilon} = \left[ \frac{\partial f_2}{\partial b_0} \right] \beta_0 + \left[ \frac{\partial f_2}{\partial b_1} \right] \beta_1 + \left[ \frac{\partial f_2}{\partial b_2} \right] \beta_2, \end{cases}$$

dove naturalmente le derivate in (...) si intendono calcolate in corrispondenza alla soluzione  $\bar{b}_0, \bar{b}_1, \bar{b}_2$  considerata.

Ci farà comodo anche la seguente trasformazione del sistema (4.3). Porremo:  $x = z + r \sin t$ ,  $E \cos(\omega t + \varphi)$  al posto di  $E \cos \omega t$ ,  $b_1 = r \cos(\varphi/\omega)$ ,  $b_2 = -r \sin(\varphi/\omega)$ , ottenendo così:

$$(4.5) \quad \begin{cases} \frac{z' - z}{\pi \varepsilon} = -2z \left[ c + \frac{c'}{3} \left( z^2 + \frac{3}{2} r^2 \right) \right] \\ \frac{r' - r}{\pi \varepsilon} = r \left[ c - a + (c' - a') \left( z^2 + \frac{1}{4} r^2 \right) \right] + E \sin \varphi \\ \frac{\varphi' - \varphi}{\pi \varepsilon} = 2\sigma + \frac{E}{r} \cos \varphi - b - b' \left( z^2 + \frac{1}{4} r^2 \right), \end{cases}$$

ed il corrispondente sistema alle variazioni sarà

$$(4.6) \quad \begin{cases} \frac{\zeta' - \zeta}{\pi \varepsilon} = -2\zeta \left[ c + c' \left( \bar{z}^2 + \frac{1}{2} \bar{r}^2 \right) \right] - 2c' \bar{r} \bar{z} \varrho \\ \frac{\varrho' - \varrho}{\pi \varepsilon} = 2(c' - a') \bar{r} \bar{z} \zeta + \left[ c - a + (c' - a') \left( \bar{z}^2 + \frac{3}{4} \bar{r}^2 \right) \right] \varrho + E \cos \varphi \cdot \psi \\ \frac{\psi' - \psi}{\pi \varepsilon} = -2b' \bar{z} \zeta - \left[ \frac{b'}{2} \bar{r} + \frac{E}{\bar{r}^2} \cos \varphi \right] \varrho - \frac{E}{\bar{r}} \sin \bar{\varphi} \cdot \psi. \end{cases}$$

Lo studio delle soluzioni periodiche si imposta in generale passando dai sistemi alle differenze ai sistemi differenziali autonomi che si ottengono sostituendo a  $(b'_0 - b_0)(\pi \varepsilon)$ ,  $(b'_1 - b_1)(\pi \varepsilon)$ ,  $(b'_2 - b_2)(\pi \varepsilon)$  rispettivamente  $db_0/d\tau$ ,  $db_1/d\tau$ ,  $db_2/d\tau$  e cercando i punti singolari, che si studiano nella maniera consueta;

per la stabilità si ricorre naturalmente ai sistemi alle variazioni corrispondenti.

Si vede subito che si potrà avere un massimo di nove punti singolari, di cui tre con  $b_0 = z = 0$ ; una discussione generale non è difficile ma risulta poco utile a causa della complicazione dei risultati.

Converrà quindi scegliere i parametri in corrispondenza alle equazioni degli esempi concreti del § 1 e sviluppare per essi uno studio approfondito, in cui tenendo conto del comportamento in generale delle caratteristiche del sistema autonomo associato ad ogni equazione si cercherà anche di dare informazioni sulle fasi transienti e sulle soluzioni non periodiche del sistema.

### 5. - Studio dei casi concreti.

Consideriamo l'equazione

$$(5.1) \quad \ddot{x} + \dot{x} + \varepsilon \{ a(x^2 - 1)\ddot{x} + 2ax\dot{x}^2 + b(x^2 - 1)\dot{x} + cx \} = \varepsilon E \cos(\omega t + \varphi),$$

per cui il sistema autonomo associato è

$$(5.2) \quad \begin{cases} \frac{dz}{d\tau} = -2cz \\ \frac{dr}{d\tau} = r \left[ c + a - a \left( \frac{r^2}{4} + z^2 \right) \right] + E \sin \varphi \\ \frac{d\varphi}{d\tau} = 2\sigma + b \left[ 1 - \frac{r^2}{4} - z^2 \right] + \frac{E}{r} \cos \varphi, \end{cases}$$

che ha come punti singolari quelli per cui

$$z = 0, \quad r^2 \{ (c + a - (a/4)r^2)^2 + (2\sigma - b - (b/4)r^2)^2 \} = E^2.$$

Conviene porre:  $y = r^2$ ,  $2\sigma + b = x$  e rappresentare in Fig. V e Fig. VI il sistema di cubiche, di parametro  $E$ , di equazione

$$y \{ (c + a - (a/4)y^2)^2 + (x - (b/4)y)^2 \} = E^2.$$

Il luogo dei punti a tangente orizzontale è dato dalle rette

$$y = 0, \quad x - (b/4)y = 0,$$

e quello dei punti a tangente verticale dalla conica

$$\left[ x - \frac{b}{4} y \right] \left[ x - \frac{3b}{4} y \right] + \left[ c + a - \frac{a}{4} y \right] \left[ c + a - \frac{3a}{4} y \right] = 0,$$

che risulta essere ellisse o iperbole a seconda che sia  $b^2 < 3a^2$ ,  $b^2 > 3a^2$ .

La curva corrispondente al valore  $\bar{E}$  per cui  $\bar{E}^2 = (16/27)(c+a)^3$ , ha un punto doppio (nodo a tangenti distinte) in

$$\bar{x} = \frac{bc+a}{3} \frac{1}{a}, \quad \bar{y} = \frac{4}{3} \frac{c+a}{a},$$

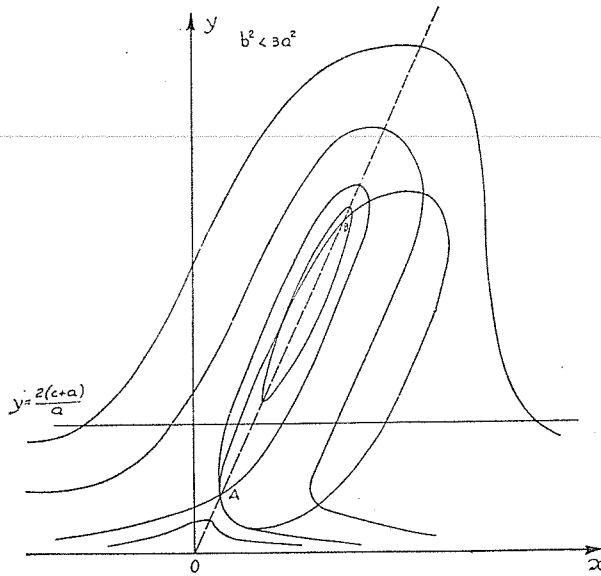


FIG. V.

ed inoltre per  $E = 0$  si ha oltre ad  $y = 0$  il punto isolato

$$\bar{x} = b(c+a)/a, \quad \bar{y} = 4(c+a)/a, \quad \bar{y} = 3\bar{y}, \quad \bar{x} = 3\bar{x}.$$

Le condizioni di stabilità sono:

$$(5.3) \begin{cases} y > (c+a)/a \\ \{ x - (b/4)y \} \{ x - (3b/4)y \} + \{ c + a - (a/4)y \} \{ c + a - (3a/4)y \} < 0, \end{cases}$$

e la retta  $y = 2(c+a)/a$  interseca sempre la conica.

Per quanto riguarda i punti singolari si ha il seguente risultato: per  $b^2 < 3a^2$ , qualunque sia  $E$ , avremo sempre un intervallo di valori di  $\sigma$  per cui ci sono tre punti singolari che sono: un colle, un nodo stabile e un nodo o fuoco, che, per qualche valore di  $\sigma$ , può essere ancora stabile se  $E$  è grande,

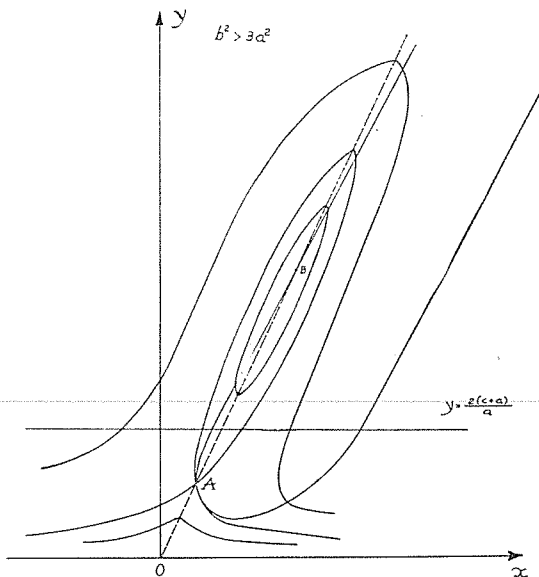


FIG. VI.

mentre negli altri casi è sempre instabile. Al di fuori di questa zona si ha un solo punto singolare che è un nodo o fuoco, stabile o instabile a seconda che sia sopra o sotto la retta  $y = r(c + a)/a$ , cioè per  $\sigma$  piccolo o  $\sigma$  grande rispettivamente;

per  $0 \leq b^2 < 3a^2$ , per  $E$  grande, si ha un solo punto singolare, nodo o fuoco, stabile per piccoli valori di  $\sigma$ , e instabile per grandi; per  $E$  inferiore ad un certo limite, si ha un intervallo di valori di  $\sigma$  con tre punti singolari e fuori di esso un solo punto singolare, classificati come nel caso precedente.

Consideriamo l'equazione

$$(5.4) \quad \ddot{x} + \dot{x} + \varepsilon \{ \alpha(x^2 + 1)\ddot{x} + 2\alpha x \dot{x}^2 + \beta((x^3/3) + x) \} = \varepsilon E \cos(\omega t + \varphi),$$

per cui il sistema autonomo associato dal procedimento del precedente è:

$$(5.5) \quad \begin{cases} \frac{dz}{d\tau} = -2\beta z \left[ 1 + z^2 + \frac{3}{2} r^2 \right] \\ \frac{dr}{d\tau} = (\beta - \alpha)r \left[ 1 + z^2 + \frac{1}{4} r^2 \right] - E \sin \varphi \\ \frac{d\varphi}{d\tau} = -2\sigma - \frac{E}{r} \cos \varphi. \end{cases}$$

L'esame di questo caso è molto semplice. Infatti i punti singolari verificano le condizioni

$$z = 0, \quad r^2[4\sigma^2 + (\beta - \alpha)^2(1 + (r^2/4))^2] = E^2.$$

Posto  $x = 2\sigma$ ,  $y = r^2$ , si ottiene al variare di  $E$  un sistema di cubiche

$$y[x^2 + (\beta - \alpha)^2(1 + (y/4))^2] = E^2,$$

rappresentato in Fig. VII, ed i punti singolari sono le intersezioni con le rette  $x = \text{costante}$ .

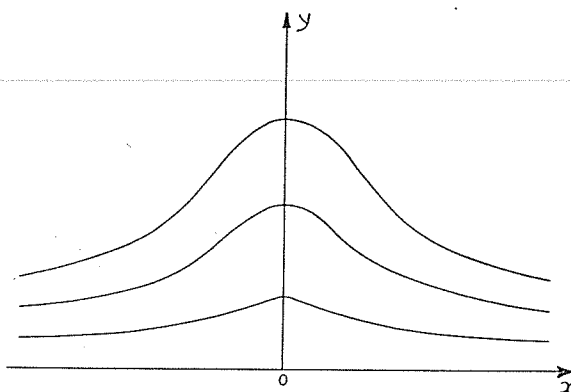


FIG. VII.

Si ha così sempre un sol punto singolare, per cui gli esponenti caratteristici sono:

$$\mu_1 = -2\beta(1 + (3/2)\bar{r}^2) < 0,$$

$$\mu_2, \mu_3: \quad \mu^2 + 2(\alpha - \beta)(1 + (\bar{r}^2/2))\mu + 4\sigma^2 + (\beta - \alpha)^2(1 + (\bar{r}^2/4))(1 + (3\bar{r}^2/4)) = 0.$$

La condizione (unica) di stabilità è  $\alpha - \beta > 0$ , e in tal caso il punto è un nodo o un fuoco, mentre in caso contrario è un colle.

Prendiamo ora in esame l'equazione

$$(5.6) \quad \ddot{x} + \dot{x} + \varepsilon \{ \alpha(x^2 - 1)\ddot{x} + 2\alpha x \dot{x}^2 + \beta(x - (x^3/3)) \} = \varepsilon E \cos(\omega t + \varphi),$$

per cui il sistema associato è:

$$\begin{cases} dz/d\tau = -2\beta \{1 - (z^2/3) - (r^2/2)\} \\ dr/d\tau = (\alpha + \beta)r(1 - (r^2/4) - z^2) + E \sin \varphi \\ d\varphi/d\tau = 2\sigma + (E/r) \cos \varphi. \end{cases}$$

L'equazione degli esponenti caratteristici s'ottiene annullando il determinante

$$\begin{vmatrix} -2\beta(1 - \bar{z}^2(\bar{r}^2/2)) - \mu & 2\beta \bar{r}\bar{z} & 0 \\ -2(\alpha + \beta)\bar{r}\bar{z} & (\alpha + \beta)(1 - \bar{z}^2 - (3/4)\bar{r}^2) - \mu & -2\sigma\bar{r} \\ 0 & 2\sigma\bar{r} & (\alpha + \beta)(1 - \bar{z}^2 - (1/4)\bar{r}^2) - \mu \end{vmatrix}.$$

Ci sono ancora punti singolari con  $z = 0$  il cui studio è simile a quello dei casi precedenti. Si ha l'equazione in  $r$ :

$$[(\alpha + \beta)^2(1 - (r^2/4))^2 + 4\sigma^2]r^2 = E^2,$$

che dà al massimo tre punti singolari, e le condizioni di stabilità sono:

$$-\beta(2 - r^2) < 0, \quad (\alpha + \beta)(2 - r^2) < 0,$$

$$(\alpha + \beta)^2(1 - (3/4)r^2)(1 - (1/4)r^2) + 4\sigma^2 > 0,$$

da cui si conclude che le soluzioni di questo tipo sono sempre instabili. Esistono poi delle soluzioni periodiche con  $z \neq 0$  per cui  $z^2 = 3(1 - (r^2/2))$ , che corrispondono a soluzioni, con  $0 \leq r^2 \leq 2$ , della equazione in  $r^2$ :

$$y \{ (\alpha + \beta)^2 (-2 + (5/4)y) + x^2 \} = E^2, \quad x = 2\sigma, \quad y = r^2,$$

che si studia al solito modo e dà un massimo di tre soluzioni.

Ad ogni  $r$  corrispondono due valori di  $z$  simmetrici e quindi i punti singolari con  $z \neq 0$  possono essere al massimo sei.

Per studiare la stabilità occorre usare le condizioni di ROUTH-HURWITZ, essendo ora l'equazione caratteristica di 3° grado irriducibile.

A calcoli fatti si ottengono le condizioni di stabilità :

$$\mu^3 - \mathcal{A}_1 \mu^2 + \mathcal{A}_2 \mu - \mathcal{A}_3 = 0 ,$$

$$\mathcal{A}_1 < 0, \mathcal{A}_3 < 0, -\mathcal{A}_1 \mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_3 > 0 ,$$

$$\mathcal{A}_1 = 2\alpha(y - 2) < 0$$

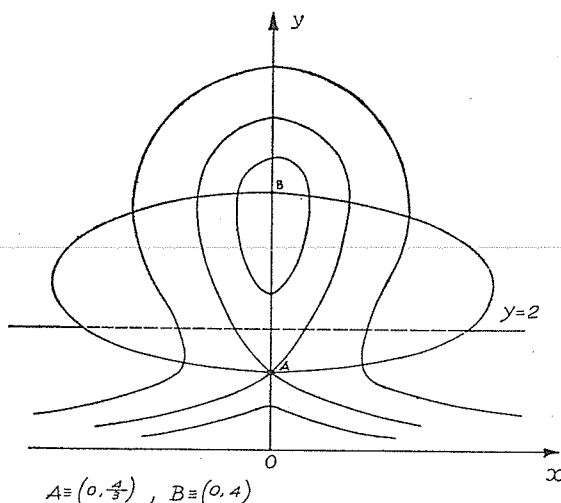


FIG. VIII.

per  $y < 2$ , che è la condizione per l'esistenza;

$$\mathcal{A}_3 = 2\beta(2 - y)[x^2 + (\alpha + \beta)^2(-2 + (5/4)y)(-2 + (15/4)y)] < 0,$$

$$-\mathcal{A}_1 \mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_3 = 2(\alpha + \beta)(2 - y) \{ x^2 + (\alpha + \beta)(-2 + (5/4)y)[-2(\alpha + \beta) + (3/4)y(\alpha + 5\beta)] + 4\alpha\beta(2 - y)((5/2)y - 2) \} > 0 .$$

Le soluzioni stabili sono dunque rispettivamente interne ed esterne alle due coniche rappresentate dalle equazioni

$$x^2 + (\alpha + \beta)^2((75/16)y^2 - 10y + 4) = 0 ,$$

$$x^2 + (5y^2/16)(3\alpha^2 - 14\alpha\beta + 15\beta^2) - 2y(2\alpha^2 - 7\alpha\beta + 5\beta^2) + 4(\alpha - \beta)^2 = 0 .$$



La prima equazione è semplicemente quella dell'ellisse luogo dei punti in cui le soluzioni di (5.8) hanno tangente verticale, mentre la seconda va discussa al variare dei parametri  $\alpha$  e  $\beta$ . Precisamente si avrà una ellisse per  $0 < \alpha < (5/3)\beta$ ,

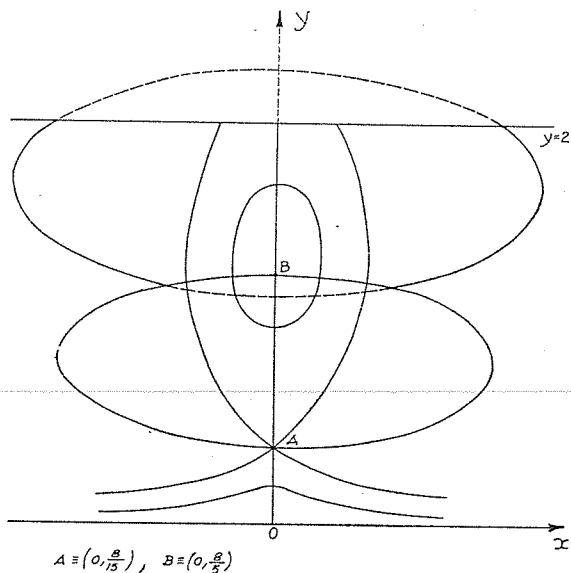


FIG. IX.

$\alpha > 3\beta$ , ed una iperbole per  $(5/3)\beta < \alpha < 3\beta$ . Si vede facilmente che non ci sono mai intersezioni con le rette  $y = 0$  e  $y = 8/5$ . Inoltre il centro della conica, simmetrica rispetto all'asse  $x$ , è:

$$y_0 = \frac{16}{5} \frac{(2\alpha - 5\beta)(\alpha - \beta)}{(3\alpha - 5\beta)(\alpha - 3\beta)},$$

che sta nel semipiano  $y > 0$  solo per  $0 < \alpha < \beta$ ,  $(5/3)\beta < \alpha < (5/2)\beta$ ,  $\alpha > 3\beta$ . Poichè inoltre si hanno intersezioni con la retta  $y = 8/15$  per  $\alpha > 5/(6\beta)$  il solo caso in cui l'ultima condizione limita la zona di stabilità è quello in cui si ha  $0 < \alpha < 5/(6\beta)$  corrispondente alla Figura IX.

### § 3. - Oscillazioni libere.

6. - Il metodo usato consente, come caso particolare, non privo di interesse, lo studio delle vibrazioni del sistema autonomo ottenuto annullando la  $e(t)$  nella equazione (E). Basterà porre  $E = 0$  nel sistema autonomo associato per otte-

nere le eventuali soluzioni periodiche libere (tra cui ovviamente la soluzione identicamente nulla, che corrisponde allo stato di quiete del sistema). Queste soluzioni hanno un periodo  $2\pi/\omega$  che differisce da  $2\pi$  per termini dell'ordine di  $\varepsilon$  in quanto  $\omega - 1 = \sigma\varepsilon + O(\varepsilon^2)$ . Se risultano però nulli i coefficienti  $b$  e  $b'$  nella (4.1), come avviene per le equazioni (5.4) e (5.6), risulta  $\sigma = 0$  e perciò il periodo è  $2\pi + O(\varepsilon^2)$ . Volendo precisare i risultati che si ottengono ora per le equazioni del n. 5, diremo anzitutto che per l'equazione

$$\ddot{x} + \dot{x} + \varepsilon [a(x^2 - 1)\ddot{x} + 2ax\dot{x}^2 + b(x^2 - 1)\dot{x} + cx] = 0,$$

dedotta da (5.1) ponendo  $E = 0$ , si ha la soluzione  $x = 0$  instabile (il punto singolare corrispondente è un fuoco secondo la nomenclatura di POINCARÉ), ed inoltre la soluzione periodica corrispondente al ciclo limite  $z = 0$ ,  $r^2 = 4(c + a)/a$ , ovvero  $x = r \sin t$ , che risulta stabile. Poichè il sistema autonomo associato è

$$\begin{cases} \frac{dz}{d\tau} = -2cz \\ \frac{dr}{dt} = r \left[ c + a - \frac{ar^2}{4} \right] \\ \frac{d\varphi}{dt} = 2\sigma + b \left[ 1 - \frac{r^2}{4} \right], \end{cases}$$

si vede subito che  $z \rightarrow 0$  per  $t \rightarrow +\infty$  e ci si può così ridurre allo studio di un sistema in due sole variabili che consente di concludere facilmente che ogni soluzione tende al ciclo limite.

Il caso (5.4) è molto semplice perchè l'unica soluzione libera è la quiete, stabile se  $\alpha > \beta$  ed instabile altrimenti, e poichè anche adesso  $z \rightarrow 0$  per  $t \rightarrow +\infty$ , si conclude dal sistema ridotto che non ci sono cicli e le traiettorie tendono tutte all'origine (per  $t \rightarrow +\infty$  se  $\alpha > \beta$  e per  $t \rightarrow -\infty$  se  $\alpha < \beta$ ).

Molto più interessante è il caso (5.6) in cui il sistema autonomo associato è:

$$\begin{cases} \frac{dz}{d\tau} = -2\beta z \left[ 1 - \frac{z^2}{3} - \frac{r^2}{2} \right] \\ \frac{dr}{d\tau} = (\alpha + \beta)r \left[ 1 - \frac{r^2}{4} - z^2 \right] \\ \frac{d\varphi}{d\tau} = 2\sigma, \end{cases}$$

e si hanno subito i tre punti singolari:  $(0, 0, 0)$ ,  $A(0, 0, \sqrt{3})$ ,  $A'(0, 0, -\sqrt{3})$ , ed i tre cicli limite:  $z = 0$ ,  $r = 2$  instabile,  $z = \pm \sqrt{3/5}$ ,  $r = \sqrt{8/5}$  stabili. Per il comportamento delle traiettorie vedasi la Figura X.

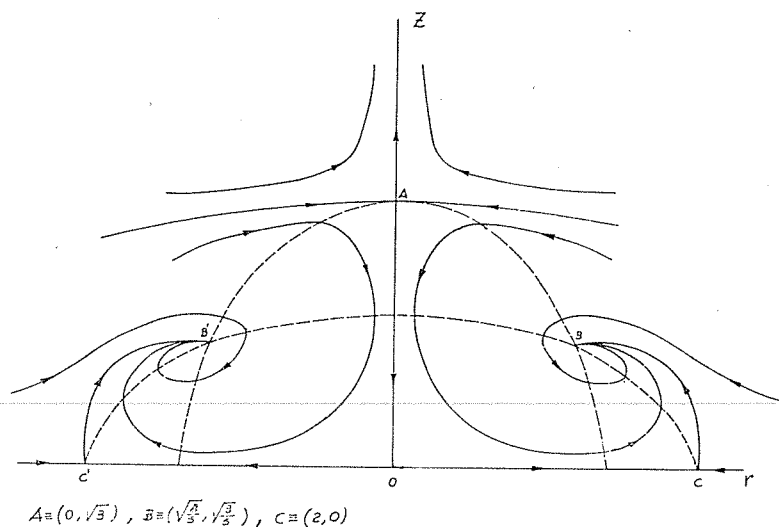


FIG. X.

### 7. - Soluzioni non periodiche.

Ci limiteremo, come al solito, ai casi particolari del n. 5. Nel 1° caso [equazione (5.1)] è subito visto che  $z \rightarrow 0$  per  $t \rightarrow \infty$ , come abbiamo già osservato; quindi il problema è ridotto allo studio del sistema autonomo piano:

$$(7.1) \quad \begin{cases} \frac{dr}{d\tau} = r \left[ c + a - a \frac{r^2}{4} \right] + E \sin \varphi \\ \frac{d\varphi}{d\tau} = 2\sigma + b \left[ 1 - \frac{r^2}{4} \right] + \frac{E}{r} \cos \varphi, \end{cases}$$

che si riporta alla forma:

$$(7.2) \quad \begin{cases} \frac{dr}{d\tau} = r(1 - r^2) + E \sin \varphi \\ \frac{d\varphi}{d\tau} = 2\sigma - \mu r^2 + \frac{E}{r} \cos \varphi, \end{cases}$$

che generalizza quella data per  $\mu = 0$  da ANDRONOV e WITT [6]. Nel caso  $b = 0$  possiamo senz'altro valerci dei risultati trovati da quegli autori che affermano che il sistema non ha cicli limite per  $\sigma < \bar{\sigma}$ , che può determinarsi col metodo delle curve di contatto di POINCARÉ. Tale risultato vale anche per  $\mu \neq 0$ , salvo una complicazione nei calcoli.

Analogamente si dimostra che per  $\sigma$  grande rispetto ad  $E$ , esiste un ciclo limite stabile, in quanto tutte le traiettorie entrano in una regione chiusa del tipo  $r < R$  che è priva di punti singolari, se si esclude il nodo o fuoco instabile (che è ora l'unico punto singolare) con un opportuno intorno.

Nel 2° caso si passa ancora ad un sistema autonomo piano (poichè  $z \rightarrow 0$  per  $t \rightarrow +\infty$ ) che risulta essere:

$$(7.3) \quad \begin{cases} \frac{dr}{d\tau} = (\beta - \alpha)r \left[ 1 + \frac{r^2}{4} \right] - E \sin \varphi \\ \frac{d\varphi}{d\tau} = -2\sigma - \frac{E}{r} \cos \varphi . \end{cases}$$

Questo sistema non ha cicli, come subito si vede passando a coordinate cartesiane e applicando il criterio negativo di BENDIXSON [7]. Tutte le traiettorie tendono al punto singolare, se  $\alpha > \beta$  per  $t \rightarrow +\infty$  e se  $\alpha < \beta$  per  $t \rightarrow -\infty$ .

Più interessante, ma più difficile, è l'esame del terzo caso, corrispondente all'equazione (5.6), in cui si ha il sistema autonomo in tre variabili (non riducibile)

$$(7.4) \quad \begin{cases} \frac{dz}{d\tau} = -2\beta z \left[ 1 - \frac{z^2}{3} - \frac{r^2}{2} \right] \\ \frac{dr}{d\tau} = (\alpha + \beta)r \left[ 1 - \frac{r^2}{4} - z^2 \right] + E \sin \varphi \\ \frac{d\varphi}{d\tau} = 2\sigma + \frac{E}{r} \cos \varphi . \end{cases}$$

Dimostriamo che in tal caso, per  $\sigma$  abbastanza grande ed  $E/(\alpha + \beta)$  abbastanza piccolo, esistono due soluzioni periodiche. Consideriamo infatti il sistema ausiliario, in  $r$  e  $z$ ,

$$(7.5) \quad \begin{cases} \frac{dz}{d\tau} = -2\beta z \left[ 1 - \frac{z^2}{3} - \frac{r^2}{2} \right] \\ \frac{dr}{d\tau} = (\alpha + \beta)r \left[ 1 - \frac{r^2}{4} - z^2 \right] + \xi . \end{cases}$$

È facile vedere che per  $\xi/(\alpha + \beta)$  abbastanza piccolo esso ammette una soluzione stabile vicino ad  $r = \sqrt{8/5}$ ,  $z = \sqrt{3/5}$  e perciò si può costruire nel piano  $r, z$  un intorno, per es. un cerchio di raggio  $\delta$ , del punto  $P^*(\sqrt{8/5}, \sqrt{3/5})$  da cui le soluzioni non possono uscire. Ovviamente  $\delta$  dipende da  $\xi$  con continuità. Ma, se  $\xi$  varia tra  $-E$  ed  $E$ ,  $\delta(\xi)$  avrà un minimo  $\delta^*$  necessariamente positivo (perchè la natura del punto singolare è la stessa per  $-E \leq \xi \leq E$ ).

Allora si può costruire nello spazio  $r, z, \varphi$  un toro circolare avente come linea meridiana la circonferenza  $z = \sqrt{3/5}$ ,  $r = \sqrt{8/5}$  e come sezione trasversale un cerchio di raggio  $\delta^*$ .

Da questo toro le traiettorie non escono e per  $\sigma$  abbastanza grande compiono il giro completo al crescere di  $\tau$ . Applicando allora ad una qualunque sezione trasversale il teorema di BROUWER del punto unito, si ottiene l'esistenza di una curva chiusa che è un ciclo per il sistema dato. Una dimostrazione analoga vale mutando  $\sqrt{3/5}$  in  $-\sqrt{3/5}$  e si ottiene così l'altra soluzione, vicina al cerchio  $z = -\sqrt{3/5}$ ,  $r = \sqrt{8/5}$ .

### 8. - Risonanza sottoarmonica.

Riprendiamo l'equazione (4.1) e supponiamo che la forza esterna sia ora del tipo  $e(t) = E \cos(3\omega t + \varphi)$ , essendo sempre  $\omega - 1 = \sigma\varepsilon$  piccolo del 1° ordine.

Se cerchiamo le soluzioni della forma (4.2), troviamo il sistema alle differenze:

$$\begin{cases} \frac{z' - z}{\pi\varepsilon} = -2z \left[ c + \frac{c'}{3} \left( \frac{3}{2} r^2 + z^2 \right) \right] \\ \frac{r' - r}{\pi\varepsilon} = r \left[ c - a + (c' - a') \left( \frac{r^2}{4} + z^2 \right) \right] \\ \frac{\varphi' - \varphi}{\pi\varepsilon} = 2\sigma - b - b' \left( \frac{r^2}{4} + z^2 \right), \end{cases}$$

ed il sistema alle variazioni

$$\begin{cases} \frac{\zeta' - \zeta}{\pi\varepsilon} = -[2c + c' \bar{r}^2 + r c' \bar{z}^2] \zeta - 2c' \bar{z} \bar{r} \varrho \\ \frac{\varrho' - \varrho}{\pi\varepsilon} = 2(c' - a') \bar{r} \bar{z} \zeta + \left[ c - a + (c' - a') \left( \frac{3}{4} \bar{r}^2 + \bar{z}^2 \right) \right] \varrho \\ \frac{\psi' - \psi}{\pi\varepsilon} = -2b' \bar{z} \varrho - \frac{b'}{2} \bar{r} \varrho, \end{cases}$$

da cui l'equazione caratteristica

$$\mu = 0, \quad \mu^2 + \left\{ \frac{1}{2} (a' + c') \bar{r}^2 - 2c' \bar{z}^2 - 2c \right\} \mu + (a' - c') \bar{r}^2 \left[ c + \frac{c'}{2} \bar{r}^2 - 3c' \bar{z}^2 \right] = 0.$$

Come era prevedibile, si vede così che queste sottoarmoniche coincidono in prima approssimazione, cioè a meno di termini dell'ordine di  $\varepsilon$ , con i cicli limite del sistema autonomo, e ciò spiega naturalmente perchè uno degli esponenti caratteristici risulti, in questa approssimazione, eguale a zero.

Il metodo fino a qui sviluppato fornisce soltanto condizioni necessarie per la stabilità e, per arrivare a conclusione, occorre un ulteriore esame. Limitandoci ai casi del n. 5, si vede intanto subito che per l'equazione (5.4) non ci sono soluzioni sottoarmoniche (perchè essa non ha cicli limite per  $E = 0$ ).

Per quanto riguarda la (5.1) essa ammette una soluzione:

$$x = 2\sqrt{(c+a)/a} \sin t + O(\varepsilon), \quad 2\sigma = cb/a,$$

per cui il metodo di CARTWRIGHT dà due esponenti caratteristici a parte reale negativa (e uno zero).

Nel caso della (5.6) lo stesso metodo dà subito instabilità per la sottoarmonica del tipo:

$$x = 2 \sin t + O(\varepsilon),$$

mentre si trovano ancora due esponenti caratteristici a parte reale negativa e uno zero per le soluzioni

$$x = \pm \sqrt{3/5} + \sqrt{8/5} \sin t + O(\varepsilon).$$

L'esame di questi casi e in generale di tutte le questioni relative alle sottoarmoniche sarà sviluppato in un successivo lavoro.

### Bibliografia.

- [1] L. L. RAUCH, *Oscillations of a third order non-linear autonomous system in Contributions to the theory of non-linear oscillations*, S. Lefschetz, Princeton 1950.
- [2] G. COLOMBO, *Sull'equazione differenziale non lineare del terzo ordine di un circuito oscillante triodico*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova 19 (1950), 114-140.
- [3] G. COLOMBO, *Sopra un singolare caso che si presenta in un problema di stabilità in meccanica non lineare*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova 22 (1953), 123-133.

- [4] M. L. CARTWRIGHT, *Forced oscillations in non-linear systems in Contributions to the theory of non-linear oscillations*, S. Lefschetz, Princeton 1950.
- [5] Y. ROCARD, *Dynamique générale des vibrations*, Masson et Cie, Paris 1949.
- [6] J. J. STOKER, *Non-linear vibrations*, Interscience, New York 1950.
- [7] N. MINORSKY, *Introduction to non-linear mechanics*, Edwards, Ann. Arbor 1947.
- [8] J. ASELTINE, *Transform method in linear system analysis*, Mc Graw-Hill, New York 1958.

---

\* \* \*

