Riv. Mat. Univ. Parma (2) 6 (1965), 1-15

U. BARBUTI e S. GUERRA (*)

Sulla stabilità degli integrali dell'equazione $x'' + B(t)\, x = 0$. (**)

In una Nota sul problema della stabilità (1) delle soluzioni dell'equazione

$$x'' + B(t)\, x = 0\,, \tag{0.1}$$

J. A. PAVLJUK (2) ha provato la seguente proposizione:
«Se $B(t)$ soddisfa la condizione

$$\int_{t_0}^{+\infty} |\, \eta(B)\, |\, dt < \infty\,, \tag{0.2}$$

ove

$$\eta(B) = \frac{B''}{4B} - \frac{5}{16}\left(\frac{B'}{B}\right)^2, \tag{0.3}$$

allora l'esistenza di un limite inferiore m, per $B(t)$, con $0 < m \leqslant B(t)$, su $R_{t_0} = [t_0, +\infty)$, è necessaria e sufficiente per la limitatezza di tutte le soluzioni di (0.1).»

(*) Indirizzo degli Autori: Istituto Matematico, Università, Trieste, Italia.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito del Gruppo di Ricerca n. 24 del C.N.R. (anno accademico 1964-65). – Ricevuto: 3-II-1965.

(1) Per una aggiornata bibliografia sull'argomento rimandiamo all'opera citata in [1].

(2) Si veda [2]. Di questo lavoro, stampato nel 1960, è apparsa una recensione su Math. Rev. (vol. 27, n. 3, 2684, p. 523) solo nel 1964.

Questa proposizione fu sostanzialmente provata una decina di anni addietro in [3] (3) e vogliamo qui rilevare, anche, che esistono casi di notevole interesse nei quali la (0.2) non è verificata e può aversi, o no, stabilità come nell'esempio seguente:

$$x'' + \left(b^2 + \frac{\operatorname{sen} 2at}{t}\right) x = 0 \qquad (a,\ b \text{ costanti}), \tag{0.4}$$

studiato da GUIDO ASCOLI (4).

Nella equazione (0.4) tutti gli integrali e le loro derivate sono limitate in futuro se le costanti a e b soddisfano la condizione $|a| \neq |b|$, ciò che non accade invece se $|a| = |b|$.

In [7] e [8] si trovano criteri che prevedono la limitatezza per gli integrali della (0.1) in casi analoghi alla equazione (0.4) (5). Utilizzando la medesima tecnica dei lavori [3] e [7], fondata sull'uso appropriato del teorema di ASCOLI (6), noi proviamo, in questa Nota (al n. 2), un nuovo criterio di stabilità il quale consente una sintesi che compendia un teorema dato in [7] (7), casi particolari di un teorema dato in [3] (8) e permette di ritrovare tutta una varietà di esempi atti a rilevare una fenomenologia indicata, per la prima volta, da G. PRODI in [8] (9).

1. - Su alcuni sviluppi formali.

Consideriamo l'equazione

$$y'' + A(t)\, y = 0 \tag{1.1}$$

---

(3) Utilizzando questa proposizione fu possibile comporre il noto criterio di R. CACCIOPPOLI [4] con un altro di L. A. GUSAROV [5]. Si veda, in proposito, [3], n. 6, p. 87 e 88.

(4) Si veda [6].

(5) In [9] sono stati dati criteri che prevedono casi di instabilità, analoghi all'esempio (0.4) quando sia $|a| = |b|$, e passati ormai nell'uso col termine « Risonanze »; cfr. [6], [8] e [10].

(6) Si veda [11]. Ricordiamo, per facilitare la lettura, questo teorema:

« Se l'equazione $y'' + A(t)\, y = 0$ ha tutti i suoi integrali e le loro derivate limitate su R_{t_0} e se $A(t) = B(t) + \lambda(t)$, ove $\lambda(t)$ è su R_{t_0} assolutamente integrabile, allora della stessa proprietà gode l'equazione $x'' + B(t)\, x = 0$. »

(7) Teorema B a p. 173.

(8) Teorema B a pag. 84.

(9) Nota II a p. 34.

e imponiamo che essa abbia come integrali le due funzioni

$$y_1(t) = R\cos v, \qquad y_2(t) = R\,\mathrm{sen}\,v, \tag{1.2}$$

con

$$v(t) = \int_{t_0}^{t} \sqrt{F(\tau)}\,d\tau, \qquad R(t) = [F(t)]^{-1/4} \tag{1.3}$$

ed

$$F(t) = k^2\, e^{u_1(t)+u_2(t)}, \tag{1.4}$$

essendo k una costante reale non nulla e $u_1(t)$, $u_2(t)$ funzioni quasi ovunque derivabili due volte e limitate su ogni intervallo limitato di R_{t_0}.

Si trova per la $A(t)$ (con facile calcolo) la forma

$$A(t) = k^2\, e^{u_1+u_2} + \frac{1}{4}(u_1'' + u_2'') - \frac{1}{16}(u_1' + u_2')^2. \tag{1.5}$$

Sviluppiamo $e^{u_1+u_2}$ secondo le potenze di $u_1 + u_2$ e scriviamo tale sviluppo nel modo seguente:

$$\begin{aligned} e^{u_1+u_2} &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(u_1+u_2)^r}{r!} = \sum_{r=0}^{p} \frac{(u_1+u_2)^r}{r!} + (u_1+u_2)^{p+1}\cdot g(u_1, u_2) = \\ &= \left[1 + (u_1+u_2) + \sum_{r=2}^{p} \frac{(u_1+u_2)^r}{r!}\right] + (u_1+u_2)^{p+1}\cdot g(u_1, u_2) = \\ &= \left[1 + (u_1+u_2) + \sum_{r=2}^{p} \frac{1}{r!}\left(\sum_{i=0}^{r}\binom{r}{i} u_1^{r-i} u_2^{i}\right)\right] + (u_1+u_2)^{p+1}\cdot g(u_1, u_2) = \\ &= \left[1 + (u_1+u_2) + \sum_{r=2}^{p} \frac{u_2^r}{r!} + \sum_{r=2}^{p} \frac{u_1\, u_2^{r-1}}{(r-1)!} + \sum_{r=2}^{p} \frac{1}{r!}\left(\sum_{i=0}^{r-2}\binom{r}{i} u_1^{r-i} u_2^{i}\right)\right] + \\ &\qquad + \left[u_1^{p+1} + u_2^{p+1} + \sum_{r=1}^{p}\binom{p+1}{r} u_1^{p+1-r} u_2^{r}\right]\cdot g(u_1, u_2), \end{aligned} \tag{1.6}$$

avendo posto

$$g(u_1, u_2) = \sum_{r=p+1}^{\infty} \frac{(u_1+u_2)^{r-p-1}}{r!}; \tag{1.7}$$

e gioverà subito osservare che risulta

$$|\, g(u_1, u_2)\,| \leqslant e^{|u_1+u_2|}. \tag{1.8}$$

Per la (1.6), la (1.5) può scriversi nella forma

$$A(t) = k^2 + \left[k^2 u_1 + \frac{1}{4} u_1''\right] + k^2 \sum_{r=1}^{p} \frac{u_2^r}{r!} + k^2 \sum_{r=2}^{p} \frac{u_1 u_2^{r-1}}{(r-1)!} + \lambda(t), \tag{1.9}$$

essendo

$$\begin{aligned} \lambda(t) = &\left\{k^2 u_1^{p+1} g(u_1, u_2) - \frac{1}{16} u_1'^2\right\} + \left\{k^2 u_2^{p+1} g(u_1, u_2) + \frac{1}{4} u_2'' - \frac{1}{16} u_2'^2\right\} + \\ &+ \left\{k^2 g(u_1, u_2) \sum_{r=1}^{p} \binom{p+1}{r} u_1^{p+1-r} u_2^r + k^2 \sum_{r=2}^{p} \frac{1}{r!}\left(\sum_{i=0}^{r-2} \binom{r}{i} u_1^{r-i} u_2^i\right) - \frac{1}{8} u_1' u_2'\right\}. \end{aligned} \tag{1.10}$$

2. - Un criterio generale di stabilità.

Vale il seguente

Teorema:

Se la costante reale non nulla k e la funzione $C(t)$ (integrabile su ogni tratto finito di R_{t_0}) sono tali che per esse:

i₁) *gli integrali*

$$\int_{t_0}^{+\infty} C(t) \operatorname{sen} 2kt \, dt\,, \quad \int_{t_0}^{+\infty} C(t) \cos 2kt \, dt$$

esistono,

i₂) *posto:*

$$\varphi(t) = -\int_{t}^{+\infty} C(\tau) \operatorname{sen} 2k\tau \, d\tau\,, \quad \psi(t) = -\int_{t}^{+\infty} C(\tau) \cos 2k\tau \, d\tau\,,$$

le funzioni $\varphi^2(t)$, $\psi^2(t)$ sono integrabili su R_{t_0};
inoltre per la funzione $D(t)$ sono soddisfatte le ipotesi:

j₁) *$D(t)$ limitata su R_{t_0},*

j₂) *per un certo intero $p \geqslant 1$ $D^{p+1}(t)$ è assolutamente integrabile su R_{t_0},*

j₃) *$D'^2(t)$ e $D''(t)$ sono assolutamente integrabili su R_{t_0}* [10], *allora gli inte-*

---

[10] Si noti come, se il prodotto $D(t)D'(t)$ è assolutamente continuo su ogni tratto finito di R_{t_0}, l'integrabilità della $D'^2(t)$ consegua dall'assoluta integrabilità della $D''(t)$; basta fare una integrazione per parti di $D'^2(t)$.

grali della (0.1), *con*

$$(2.1)\quad B(t) = k^2 + C(t) + \sum_{r=1}^{p} \frac{D^r(t)}{r!\,k^{2r-2}} + \frac{2}{k}\left[-\varphi(t)\cos 2kt + \psi(t)\operatorname{sen} 2kt\right]\cdot \sum_{r=2}^{p} \frac{D^{r-1}(t)}{(r-1)!\,k^{2r-4}}$$

e le loro derivate riescono tutte limitate in futuro.

Determiniamo $u_1(t)$ e $u_2(t)$ in guisa tale che, quasi ovunque, risulti

$$(2.2)\qquad \begin{cases} k^2 u_1 + \dfrac{1}{4} u_1'' = C(t) \\[2ex] u_2 = \dfrac{D(t)}{k^2}\,. \end{cases}$$

Risolvendo la prima delle (2.2) rispetto ad u_1 si trova

$$(2.3)\qquad \begin{aligned} u_1(t) = &-\frac{\cos 2kt}{2k}\left(\varphi_0 + 4\int_{t_0}^{t} C(\tau)\operatorname{sen} 2k\tau\, d\tau\right) + \\ &+ \frac{\operatorname{sen} 2kt}{2k}\left(\psi_0 + 4\int_{t_0}^{t} C(\tau)\cos 2k\tau\, d\tau\right), \end{aligned}$$

ove φ_0 e ψ_0 sono costanti arbitrarie.

Ponendo, in virtú dell'ipotesi i_1),

$$(2.4)\qquad \varphi_0 = -4\int_{t_0}^{+\infty} C(t)\operatorname{sen} 2kt\, dt, \qquad \psi_0 = -4\int_{t_0}^{+\infty} C(t)\cos 2kt\, dt\,,$$

la (2.3) dà luogo alla

$$(2.5)\qquad u_1(t) = \frac{2}{k}\left[-\varphi(t)\cos 2kt + \psi(t)\operatorname{sen} 2kt\right].$$

Se ora queste u_1 e u_2, determinate dalle (2.2) e dalle (2.4), si sostituiscono nella (1.9), la $A(t)$ assume la forma

$$(2.6)\qquad A(t) = B(t) + \lambda(t),$$

essendo $B(t)$ la funzione indicata in (2.1) e $\lambda(t)$ quella indicata in (1.10).

La i$_1$), la j$_1$) e la j$_3$) ci assicurano, per la (2.5) e la seconda delle (2.2), che le funzioni $u_1(t)$ e $u_2(t)$ sono, con le loro derivate, limitate su R_{t_0}; quindi, per le (1.4), (1.3), (1.2), tutti gli integrali della (1.1) e le loro derivate sono limitate in futuro ([11]).

Il teorema risulterà allora dimostrato se dimostreremo l'assoluta integrabilità su R_{t_0} della funzione $\lambda(t)$ ([12]). A tale scopo cominciamo con l'osservare che, dalla (2.5), si ha

$$u_1'(t) = 4\,[\varphi(t) \operatorname{sen} 2kt + \psi(t) \cos 2kt] \tag{2.7}$$

e che, sempre dalla (2.5) e da quest'ultima, segue

$$4\,k^2 u_1^2 + u_1'^2 = 16\,[\varphi^2(t) + \psi^2(t)]\,. \tag{2.8}$$

Dette L ed M due costanti positive tali che $|\,u_1 + u_2\,| < L$, $|\,u_1\,| < M$ e posto $N = \max\left(\dfrac{e^L M^{p-1}}{4}, \dfrac{1}{16}\right)$, si ha, per la (1.8) e per la (2.8),

$$\begin{aligned} \left|\,k^2 u_1^{p+1} g(u_1, u_2) - \frac{1}{16}\,u_1'^2\,\right| &\leqslant k^2 e^L M^{p-1} u_1^2 + \frac{1}{16}\,u_1'^2 \leqslant \\ &\leqslant N(4\,k^2 u_1^2 + u_1'^2) = 16N\,[\varphi^2(t) + \psi^2(t)] \end{aligned} \tag{2.9}$$

e, per i$_2$), il secondo membro è su R_{t_0} integrabile.

Si ha poi

$$\left|\,k^2 u_2^{p+1} g(u_1, u_2) + \frac{1}{4}\,u_2'' - \frac{1}{16}\,u_2'^2\,\right| \leqslant k^2 e^L\,|\,u_2^{p+1}\,| + \frac{1}{4}\,|u_2''| + \frac{1}{16}\,u_2' \tag{2.10}$$

e il secondo membro, per le j$_2$) e j$_3$) è integrabile su R_{t_0}.

Infine, detta P una costante positiva tale che $|\,u_2\,| < P$ e posto

$$\sum_{r=1}^{p-1} \binom{p+1}{r} M^{p-1-r} P^r = Q_1, \qquad \sum_{r=2}^{p} \frac{1}{r\,!} \sum_{i=0}^{r-2} \binom{r}{i} M^{r-2-i} P^i = Q_2\,,$$

([11]) Si verifica subito che le (1.2) hanno wronskiano uguale ad 1. Esse risultano pertanto linearmente indipendenti.

([12]) In virtù del teorema di ASCOLI. Si veda la nota ([6]).

risulta

$$
\begin{aligned}
(2.11)\qquad & \left| k^2 g(u_1, u_2) \sum_{r=1}^{p} \binom{p+1}{r} u_1^{p+1-r} u_2^r + k^2 \sum_{r=2}^{p} \frac{1}{r!} \sum_{i=0}^{r-2} \binom{r}{i} u_1^{r-i} u_2^i - \frac{1}{8} u_1' u_2' \right| \leqslant \\
& \leqslant k^2 e^L \left[Q_1 u_1^2 + (p+1) \,|\, u_1 u_2^p \,|\right] + k^2 Q_2 u_1^2 + \frac{1}{8} |\, u_1' u_2' \,| ;
\end{aligned}
$$

per la i$_2$) u_1^2 è integrabile su R_{t_0} e, sullo stesso intervallo, sono integrabili le funzioni $|u_1 u_2^p|$, $|u_1' u_2'|$ per esserlo la $u_1'^2$ [ipotesi i$_2$) e in vitrú della (2.7)] e la u_2^{p+1} [ipotesi j$_2$)].

Dalle disuguaglianze (2.9), (2.10) e (2.11) segue l'assoluta integrabilità su R_{t_0} della funzione $\lambda(t)$ e il teorema risulta così provato.

3. - Primi corollari ed osservazioni.

Se è $C(t) \equiv 0$ vengono a sopprimersi le ipotesi i) (in quanto ovviamente verificate), e quindi, dal teorema del n. **2**, segue il

Corollario: *Se per la funzione $D(t)$ valgono le ipotesi* j$_1$), j$_2$) j$_3$), *allora tutti gli integrali dell'equazione*

$$
(3.1)\qquad x'' + \left(k^2 + \sum_{r=1}^{p} \frac{D^r(t)}{r!\, k^{2r-2}} \right) x = 0
$$

e le loro derivate risultano limitate in futuro.

Se, invece, è $D(t) \equiv 0$, allora vengono a sopprimersi le j) e si riottiene così il teorema B della Nota [7].

Vogliamo ora qui rilevare l'interesse del teorema di ASCOLI sul quale poggia la nostra analisi. Esso precisa che: l'aggiunta di un termine $\lambda(t)$, assolutamente integrabile su R_{t_0}, alla funzione $B(t)$ della (0.1) è irrilevante rispetto alla limitatezza in futuro delle soluzioni della medesima equazione, *qualunque* sia la funzione $B(t)$; vale a dire esso assicura una specie di stabilità assoluta rispetto alla classe delle funzioni $B(t)$ per ciascuna delle quali gli integrali della (0.1) risultano stabili. Questo fatto non avviene piú se, per esempio, $\lambda(t)$ è soltanto a variazione limitata su R_{t_0} [cfr. l'esempio (5.5)]. Ciò significa che l'aggiunta di un termine così fatto potrà conservare la proprietà ora indicata per una sottoclasse di funzioni $B(t)$.

In quest'ordine di idee notiamo il contenuto del teorema del n. **2**:

Per una equazione del tipo

$$x'' + \{ k^2 + C(t) \} x = 0 , \tag{3.2}$$

ove $C(t)$ soddisfa alle ipotesi i_1), i_2) *che escludono risonanze* (13), *la perturbazione*

$$\sum_{r=1}^{p} \frac{D^r(t)}{r!\, k^{2r-2}} + \frac{2}{k} [-\varphi(t) \cos 2kt + \psi(t) \operatorname{sen} 2kt] \cdot \sum_{r=2}^{p} \frac{D^{r-1}(t)}{(r-1)!\, k^{2r-4}} , \tag{3.3}$$

ove $D(t)$ soddisfa alle j_1), j_2), j_3), *è irrilevante ai fini della limitatezza delle soluzioni.*

4. - Il caso $p = 1$.

Osserviamo che, nel caso $p = 1$, la (2.1) diviene

$$B(t) = k^2 + C(t) + D(t), \tag{4.1}$$

e notiamo esplicitamente i seguenti corollari.

Corollario I:

La funzione $C(t)$ soddisfi alle ipotesi i_1), i_2);
la funzione $D(t)$ soddisfi la j_1), *sia a quadrato integrabile su R_{t_0} e $D'(t)$ sia a variazione limitata su R_{t_0}.*
In queste condizioni per gli integrali della (0.1), *essendo $B(t)$ la funzione indicata in* (4.1), *vale la stessa tesi del testo del teorema del* n. 2.

Basta dimostrare che l'essere $D'(t)$ a variazione limitata su R_{t_0} implica la j_3). Infatti tale ipotesi implica che $D''(t)$ esiste quasi ovunque e che, essendo, per ogni t,

$$\int_{t_0}^{t} | D''(\tau) | \, d\tau \leqslant V(D'; \, t_0, \, t) , \tag{4.2}$$

ove V indica la variazione totale di $D'(t)$ su $[t_0, t]$, essa è su R_{t_0} assolutamente integrabile.

Si osservi poi che, essendo $D'(t)$ a variazione limitata su R_{t_0}, $D'(t)$ può decomporsi nel modo seguente

$$D'(t) = \delta(t) + \alpha(t), \tag{4.3}$$

---

(13) Cfr. [7], teorema B, a p. 173.

con $\delta(t)$ funzione assolutamente continua in ogni tratto finito di R_{t_0}, a variazione limitata su R_{t_0}, $\alpha(t)$ e $\alpha'(t)$ assolutamente integrabili su R_{t_0} (14). Segue allora:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[D(t)\, D'(t)] &= D'^2(t) + D(t)\, D''(t) = \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[D(t)\, \delta(t)] + D'(t)\, \alpha(t) + D(t)\, \alpha'(t),\end{aligned} \tag{4.4}$$

quindi

$$D'^2(t) = -\, D(t)\, D''(t) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[D(t)\, \delta(t)] + D'(t)\, \alpha(t) + D(t)\, \alpha'(t) \tag{4.5}$$

e, integrando tra t_0 e t [si tenga conto che $D(t)\, \delta(t)$ è assolutamente continuo]:

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^{t} D'(\tau)\, \mathrm{d}\tau &= -\int_{t_0}^{t} D(\tau)\, D''(\tau)\, \mathrm{d}\tau + [D(\tau)\, \delta(\tau)]_{t_0}^{t} + \\ &+ \int_{t_0}^{t} D'(\tau)\, \alpha(\tau)\, \mathrm{d}\tau + \int_{t_0}^{t} D(\tau)\, \alpha'(\tau)\, \mathrm{d}\tau\,.\end{aligned} \tag{4.6}$$

Di qui si deduce subito l'integrabilità della $D'^2(t)$ su R_{t_0} e dunque la j_3) è verificata.

Corollario II:

La funzione $C(t)$ soddisfi alle ipotesi i_1), i_2);

la funzione $D(t)$ soddisfi la j_1), *sia a quadrato integrabile su R_{t_0} ed ivi a variazione limitata.*

In queste condizioni vale la tesi del precedente Corollario I.

Si osservi preliminarmente che, per la $D(t)$, vale la decomposizione (4.3),

---

(14) Si veda [3] a pp. 85-87. Si ha precisamente la proposizione;

« Se $f(t)$ è a variazione limitata su R_{t_0}, esistono due funzioni $\varphi(t)$ e $\alpha(t)$, dotate quasi ovunque di derivate prime, per le quali è $f(t) = \varphi(t) + \alpha(t)$, con $\varphi(t)$ assolutamente continua su ogni tratto finito di R_{t_0}, a variazione limitata su R_{t_0} insieme con la sua derivata e $\alpha(t)$, $\alpha'(t)$ assolutamente integrabili su R_{t_0}.»

cioè

$$D(t) = \delta(t) + \alpha(t), \tag{4.7}$$

con $\delta(t)$, $\delta'(t)$ a variazione limitata su R_{t_0} e $\alpha(t)$ ivi assolutamente integrabile; conseguentemente, per il Corollario I, l'equazione (0.1), ove $B(t)$ ha la forma

$$B(t) = k^2 + C(t) + \delta(t)\,, \tag{4.8}$$

ha tutti i suoi integrali stabili e quindi risultano stabili, per il teorema di ASCOLI, gli integrali della (0.1) quando $B(t)$ è della forma (4.1).

È poi facile verificare che i due Corollari I e II possono comporsi nel seguente

Corollario III:

La funzione $C(t)$ soddisfi alle ipotesi i$_1$), i$_2$);

la funzione $D(t)$ sia la somma di due funzioni $D_1(t)$ e $D_2(t)$, entrambe a quadrato integrabile su R_{t_0}, $D_1(t)$ limitata e avente derivata a variazione limitata su R_{t_0} e $D_2(t)$ a variazione limitata sullo stesso intervallo.

In queste condizioni vale la tesi del Corollario I.

5. - Esempi critici.

Del teorema del n. **2** vale il seguente

Corollario:

Se per la funzione $D(t)$ valgono le ipotesi j$_1$), j$_2$), j$_3$), *allora tutti gli integrali dell'equazione*

$$x'' + \left\{k^2 + \left(k^2 - \frac{h^2}{4}\right)\frac{\operatorname{sen} ht}{t^\alpha} + \sum_{r=1}^{p}\frac{D^r(t)}{r\,!\,k^{2r-2}} + \frac{\operatorname{sen} ht}{t^\alpha}\cdot\sum_{r=2}^{p}\frac{D^{r-1}(t)}{(r-1)\,!\,k^{2r-4}}\right\}x = 0 \tag{5.1}$$

$$(t_0 > 0, \qquad h \text{ costante}, \qquad \alpha > 1/2)$$

e le loro derivate sono limitati in futuro.

Supponiamo $u_1(t)$ della forma

$$u_1(t) = \frac{\operatorname{sen} ht}{t^\alpha}\,, \tag{5.2}$$

ciò che avremo, per la prima delle (2.2), se risulta

$$C(t) = \left(k^2 - \frac{h^2}{4}\right)\frac{\operatorname{sen} ht}{t^\alpha} - \frac{\alpha h}{2}\,\frac{\cos ht}{t^{\alpha+1}} + \frac{\alpha(\alpha+1)}{4}\,\frac{\operatorname{sen} ht}{t^{\alpha+2}}. \tag{5.3}$$

Basterà allora osservare che, per tale $C(t)$, qualunque sia h, le ipotesi i_1), i_2) sono verificate (come facilmente può vedersi utilizzando il secondo teorema della media), che il secondo e il terzo addendo che figurano nella (5.3) risultano su R_{t_0} assolutamente integrabili e tener conto della (2.5) e della (5.2).

Abbiamo riportato questo corollario per l'interesse critico al quale esso dà luogo. Se $h = \varepsilon\cdot 2k$ con $|\varepsilon| = 1$, risultano stabili gli integrali dell'equazione

$$x'' + \left\{k^2 + \sum_{r=1}^{p}\frac{D^r(t)}{r!\,k^{2r-2}} + \varepsilon\cdot\frac{\operatorname{sen} 2kt}{t^\alpha}\sum_{r=2}^{p}\frac{D^{r-1}(t)}{(r-1)!\,k^{2r-4}}\right\}x = 0\,. \tag{5.4}$$

L'equazione (5.4) fornisce una vasta gamma di esempi analoghi al seguente

$$x'' + \left(1 + \frac{\operatorname{sen} 2t}{t} + \frac{2}{\sqrt{t}} + \frac{1}{t}\right)x = 0, \tag{5.5}$$

di G. Prodi ([15]). Infatti, se assumiamo $D(t) = \dfrac{1}{t^\beta}$, con $\beta > \dfrac{1}{p+1}$, e per tale funzione le ipotesi j_1), j_2), j_3) sono ovviamente verificate, la (5.4) diviene

$$x'' + \left\{k^2 + \varepsilon\,\frac{\operatorname{sen} 2kt}{t^{\alpha+\beta}} + \sum_{r=1}^{p}\frac{1}{r!\,k^{2r-2}\,t^{r\beta}} + \varepsilon\,\frac{\operatorname{sen} 2kt}{t^\alpha}\sum_{r=3}^{p}\frac{1}{(r-1)!\,k^{2r-4}t^{(r-1)\beta}}\right\}x = 0. \tag{5.6}$$

In particolare, per $k = 1$, $\varepsilon = 1$, $p = 2$ si ottiene l'equazione

$$x'' + \left(1 + \frac{\operatorname{sen} 2t}{t^{\alpha+\beta}} + \frac{1}{t^\beta} + \frac{1}{2\,t^{2\beta}}\right)x = 0\,, \qquad \left(\alpha > \frac{1}{2}, \quad \beta > \frac{1}{3}\right). \tag{5.7}$$

([15]) Ricollegandoci con quanto osservato al n. 3 circa il teorema di Ascoli, ricordiamo che, in [8], G. Prodi ha mostrato, per primo, che $\lambda(t)$ non può più dirsi irrilevante, rispetto alla stessa istanza, se tale funzione è, su R_{t_0}, a variazione limitata, producendo l'esempio (5.5), il quale risulta avere i suoi integrali tutti limitati per un criterio da Lui provato; mentre non lo sono quelli dell'equazione ottenuta dalla (5.5) sopprimendo il termine $\dfrac{2}{\sqrt{t}} + \dfrac{1}{t}$, a variazione limitata, per ragioni di risonanza.

La classe degli esempi indicati in (5.7) gioca ancora lo stesso ruolo.

6. - Formule asintotiche.

Ci proponiamo ora, a scopo indicativo, di assegnare una rappresentazione asintotica per gli integrali della (0.1), quando la funzione $B(t)$ sia del tipo (2.1), in ipotesi più particolari di quelle del teorema del n. 2.

Ricordiamo, a tal proposito, che ad ogni integrale della (1.1) se ne può far corrispondere uno della (0.1) che ne differisce per termini dell'ordine di $\int_t^{+\infty} |\lambda(\tau)|\, d\tau$, essendo $\lambda(t)$ la funzione definita in (1.10). Si ha cioè:

$$x(t) = R(c_1 \cos v + c_2 \operatorname{sen} v) + e(t), \tag{6.1}$$

essendo [16]

$$\begin{cases} R = \left\{ k^2\, e^{(2/k)[-\varphi(t)\cos 2kt + \psi(t)\operatorname{sen} 2kt] + D(t)/k^2} \right\}^{-1/4} \\ v = \displaystyle\int_{t_0}^{t} \left\{ k^2\, e^{(2/k)[-\varphi(\tau)\cos 2k\tau + \psi(\tau)\operatorname{sen} 2k\tau] + D(\tau)/k^2} \right\}^{1/2} d\tau\,, \end{cases} \tag{6.2}$$

c_1, c_2 costanti arbitrarie e

$$e(t) = O\left(\int_t^{+\infty} |\lambda(\tau)|\, d\tau \right). \tag{6.3}$$

Dalle (2.9), (2.10) e (2.11) segue, per il valore assoluto della funzione $\lambda(t)$, la disuguaglianza

$$\begin{aligned} |\lambda(t)| \leqslant & \left[k^2 (e^L M^{p-1} + e^L Q_1 + Q_2)\, u_1^2 + \frac{1}{16} u_1'^2 \right] + \left[k^2 e^L |u_2^{p+1}| + \frac{1}{4} |u_2''| + \right. \\ & \left. + \frac{1}{16} u_2'^2 \right] + \left[k^2 e^L (p+1) |u_1 u_2^p| + \frac{1}{8} |u_1' u_2'| \right]; \end{aligned} \tag{6.4}$$

quindi, tenendo conto della seconda delle (2.2), della (2.5), della (2.7) e della

[16] Cfr. le formule (1.2), (1.3), (1.4), (2.2) e (2.5).

(2.8), si ottiene:

$$(6.5)\quad \begin{cases} |\lambda(t)| \leqslant H\{[\varphi^2(t) + \psi^2(t)] + [|D^{p+1}(t)| + |D''(t)| + D'^2(t)] + \\ +|D^p(t)[-\varphi(t)\cos 2kt + \psi(t)\,\mathrm{sen}\,2kt]| + |D'(t)[\varphi(t)\mathrm{sen}2kt + \psi(t)\cos 2kt]| \leqslant \\ \leqslant H\{[\varphi^2(t) + \psi^2(t) + |D^{p+1}(t)|] + [|D''(t)| + D'^2(t)] + \\ + [|\varphi(t)| + |\psi(t)|]\cdot[|D^p(t)| + |D'(t)|], \end{cases}$$

con H costante positiva opportuna.

Per semplicità aggiungiamo alle ipotesi j) le ipotesi che $D(t)$ e $D'(t)$ siano *assolutamente continue* in ogni tratto finito di R_{t_0}, che $D(t) \to 0$ per $t \to +\infty$ e che, inoltre, $D'(t)$ sia su R_{t_0} *a variazione limitata*. In queste circostanze si ha

$$(6.6)\qquad \int_{t_0}^{t} D'^2(\tau)\,d\tau = [D(\tau)\,D'(\tau)]_{t_0}^{t} - \int_{t_0}^{t} D(\tau)\,D''(\tau)\,d\tau$$

e, poichè, per $t \to +\infty$, $D(t) \to 0$,

$$(6.7)\qquad \int_{t_0}^{+\infty} D'^2(\tau)\,d\tau = -D(t_0)\,D'(t_0) - \int_{t_0}^{+\infty} D(\tau)\,D''(\tau)\,d\tau\,.$$

Dalle (6.6) e (6.7) segue

$$(6.8)\qquad \int_{t}^{+\infty} D'^2(\tau)\,d\tau = -D(t)\,D'(t) - \int_{t}^{+\infty} D(\tau)\,D''(\tau)\,d\tau\,,$$

da cui

$$(6.9)\qquad \int_{t}^{+\infty} D'^2(\tau)\,d\tau \leqslant |\sigma(t)|\Big[|D'(t)| + \int_{t}^{+\infty} |D''(\tau)|\,d\tau\Big]$$

con $\sigma(t) \to 0$ per $t \to +\infty$.

Utilizzando per $D'(t)$ la decomposizione canonica di JORDAN si può scrivere

$$(6.10)\qquad D'(t_1) = D'(t) + P(t,\, t_1) - N(t,\, t_1) \qquad (t < t_1)\,,$$

essendo $P(t, t_1)$ ed $N(t, t_1)$ rispettivamente la variazione totale positiva e negativa di $D'(t)$ su (t, t_1); passando al limite per $t_1 \to +\infty$ ed osservando che $D'(t_1) \to 0$ e che P ed N tendono a limiti determinati e finiti, limiti che indicheremo con $P(t, +\infty)$ ed $N(t, +\infty)$, si ottiene

$$D'(t) = -P(t, +\infty) + N(t, +\infty) \tag{6.11}$$

e quindi

$$|D'(t)| \leqslant V(D'), \tag{6.12}$$

essendo $V(D')$ la variazione totale di $D'(t)$ su $(t, +\infty)$. Poichè risulta anche

$$\int_t^{+\infty} |D''(\tau)|\, d\tau = V(D'), \tag{6.13}$$

ne segue, per la parte infinitesima $e(t)$ della (6.1), l'espressione

$$e(t) = O\left(\int_t^{+\infty} [\varphi^2(\tau) + \psi^2(\tau) + |D^{p+1}(\tau)|]\, d\tau\right) + \tag{6.14}$$

$$+ O\left(\int_t^{+\infty} [|\varphi(\tau)| + |\psi(\tau)|][|D^p(\tau)| + |D'(\tau)|]\, d\tau\right) + O\left(V(D')\right).$$

Notiamo che tale espressione non è semplice, in quanto essa riflette una notevole molteplicità di casi. Si ottengono formule semplici nei casi particolari in cui sia $C(t) \equiv 0$ oppure $D(t) \equiv 0$ (17).

Bibliografia.

[1] L. Cesari: *Asymptotic behavior and stability problems ...*, Springer, Berlin (Göttingen, Heidelberg) 1959.

[2] J. A. Pavljuk: *Necessary and sufficient ...*, Dopovidi Akad. Nauk Ukräin R.S.R. (1960), 156-158.

[3] U. Barbuti: *Su alcuni teoremi di stabilità*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (3) **8** (1954), 81-91.

[4] R. Caccioppoli: *Una questione di stabilità*, Atti Accad. Naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (6) **2** (1930), 251-254.

[5] L. A. Gusarov: *On the boundedness of the solutions ...*, Dokl. Akad. Nauk. S.S.S.R. (N.S.) **68** (1949), 217-220.

[6] G. Ascoli: *Osservazioni sopra alcune questioni di stabilità*, Atti Accad. Naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (8) **9** (1950), 129-134 (Nota I), 210-213 (Nota II).

[7] U. Barbuti: *Sulla stabilità delle soluzioni ...*, Atti Accad. Naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (3) **12** (1952), 170-175.

(17) Si veda [3] a p. 90, e [7] a p. 174.

[8] G. PRODI: *Nuovi criteri di stabilità ...*, Atti Accad. Naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (8) **10** (1951), 447-451 (1951), (Nota I), e **11** (1952), 30-34 (Nota II.)

[9] U. BARBUTI: *Sopra un caso di risonanza ...*, Boll. Un. Mat. Ital. (3) **7** (1952), 154-159.

[10] F. V. ATKINSON: *The asymptotic solution ...*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) **37** (1954), 347-378.

[11] G. ASCOLI: *Sul comportamento asintotico ...*, Atti Accad. Naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (6) **22** (1935), 234-243.

Summary.

A new theorem on stability for the solutions of the equation $x'' + B(t)\,x = 0$ including, for some cases, known criteria (Caccioppoli, Gusarov and others) is stated by a suitable use of Ascoli's theorem (see [11]*) — a method already applied in* [3], [7], [9] *— our theorem anables one construct critical examples like that given by G. Prodi in* [8].

* * *