Riv. Mat. Univ. Parma (2) 6 (1965), 17-21

LUIGI MERLI (*)

# Le formule di interpolazione di tipo misto, di Lagrange e Hermite, per la classe delle funzioni del tipo $f(x) = c + x^2\,\varphi(x)$. (**)

## 1. - Introduzione.

Quando siano assegnati $n$ punti distinti $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dell'intervallo $[-1, 1]$, il polinomio di interpolazione di LAGRANGE è quell'unico polinomio, di grado $\leqslant n-1$, che assume nei punti dati i valori prefissati $y_1, y_2, \ldots, y_n$, mentre il polinomio di interpolazione di HERMITE è quell'unico polinomio, di grado $\leqslant 2n-1$, che assume nei punti dati i valori assegnati e, negli stessi punti, derivata prima assegnata (per esempio, derivata prima nulla).

È logico chiamare polinomio di interpolazione di tipo misto di LAGRANGE e HERMITE un polinomio che in alcuni dei punti dati assuma i corrispondenti valori assegnati e abbia ivi derivata assegnata (per esempio, uguale a zero) e negli altri punti assuma i valori prestabiliti, senza alcun vincolo sulla derivata in tali punti.

Polinomi di interpolazione di tipo misto di LAGRANGE e HERMITE sono stati studiati recentemente da P. SZASZ [1], il quale, estendendo un suo precedente risultato su tale argomento [2], ha costruito il polinomio $S_{2n}(x)$, di grado $\leqslant 2n$, che nei punti $x_1, x_2, \ldots, x_n, 1$, cioè negli $n$ punti distinti dell'in-

(*) Indirizzo; Via Nino Bixio 2, Firenze, Italia.

(**) Ricevuto il 22-VII-1965.

[1] P. SZASZ, *The extended Hermite-Fejér interpolation formula with application to the theory of generalized almost quasi-step parabolas*, Publ. Math. 11 (1964), 85-100.

[2] P. SZASZ, *On quasi Hermite-Fejér interpolation*, Acta Math. Acad. Sci. Hungar, **10** (1959), 413-439.

tervallo $(-1, 1)$ con l'aggiunta del punto estremo $+1$ (oppure $-1$), assume i valori assegnati $y_1, y_2, \ldots, y_n, \eta$, rispettivamente, e che nei punti $x_1, x_2, \ldots, x_n$ assume derivate assegnate $y'_1, y'_2, \ldots, y'_n$ (non viene cioè assegnata la derivata nel punto 1).

Egli ha inoltre provato che se $f(x)$ è una funzione continua nell'intervallo $[-1, 1]$, supponendo che i punti fondamentali siano gli zeri del polinomio di JACOBI $P^{(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})}(x)$ (3), nell'ipotesi che si assuma

$$y_1 = f(x_1), \quad y_2 = f(x_2), \quad \ldots, \quad y_n = f(x_n), \quad \eta = f(1)$$

e che sia

$$|y'_i| < a \qquad (a \text{ costante}, \ i = 1, 2, \ldots, n),$$

si ha uniformemente in $[-1, 1]$

$$\lim_{n \to \infty} S_{2n}(x) = f(x) . \tag{1}$$

In tale ordine di idee, noi studieremo, in questa Nota, il polinomio di interpolazione $\overline{S}_{4n}(x)$, di grado $\leqslant 4n$, che nei $2n$ punti $x_1, x_2, \ldots, x_{2n}$ assume rispettivamente i valori $y_1, y_2, \ldots, y_{2n}$ ed ha ivi derivata nulla e che inoltre si annulla nel punto 0, senza alcuna condizione sulla derivata del polinomio stesso in tale punto. In altri termini noi supporremo che il punto in cui *non* si assegna la derivata del polinomio sia interno all'intervallo $(-1, 1)$, mentre nel lavoro di SZASZ tale punto è un estremo dell'intervallo (4).

Proveremo poi il Teorema: *Se $\varphi(x)$ è una funzione continua nell'intervallo $[-1, 1]$, posto $f(x) = c + x^2 \varphi(x)$ (5) e assegnati nei punti fondamentali $x_1, x_2, \ldots, x_{2n}$, che supporremo essere gli zeri del polinomio di Tchebycheff di prima specie $\omega_n(x) = \cos 2n\theta$, $x = \cos\theta$, per $\overline{S}_{4n}(x)$ i valori $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_{2n})$, con $\overline{S}'_{4n}(x_i) = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, 2n)$, si ha uniformemente in $[-1, 1]$:*

$$\lim_{n \to \infty} \overline{S}_{4n}(x) = f(x) . \tag{2}$$

(3) G. SZEGÖ, *Orthogonal polynomials*, revised ed., New York 1959.

(4) Il punto in cui non si assegna la derivata potrebbe essere, anzichè l'origine, un qualunque altro punto interno.

(5) Si osservi che la costante $c$ può essere assunta uguale a zero, come noi faremo per semplicità.

**2. - Il polinomio $\overline{S}_{4n}(x)$.**

Per costruire il polinomio $\overline{S}_{4n}(x)$ senza ricorrere alla formula di HERMITE [6], costruiremo, in primo luogo, il polinomio di LAGRANGE, di grado $\leqslant 4n$, che nei punti $0,\ x_1,\ x_1+h,\ x_2,\ x_2+h,\ \ldots,\ x_{2n},\ x_{2n}+h$ assume i valori $0,\ y_1,\ y_1,\ y_2,\ y_2,\ \ldots,\ y_{2n},\ y_{2n}$ rispettivamente.

Sarà,

$$L_{4n}(x) = \sum_{k=1}^{2n} y_k \cdot \left[\frac{W_n(x)}{W_n'(x_k)\,(x-x_k)} + \frac{W_n(x)}{W_n'(x_k+h)\,(x-x_k-h)}\right], \tag{3}$$

dove

$$W_n(x) = x\,\omega_n(x)\,\omega_n(x-h), \tag{4}$$

con

$$\omega_n(x) = c(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n) \qquad (c \neq 0)\,. \tag{5}$$

Fissato $n$ e passando al limite per $h \to 0$, si ha:

$$\overline{S}_{4n}(x) = \lim_{h\to 0} L_{4n}(x) =$$

$$= \lim_{h\to 0} \sum_{k=1}^{2n} y_k\, W_n(x) \left[\frac{1}{W_n'(x_k)\,(x-x_k)} + \frac{1}{W_n'(x_k+h)\,(x-x_k-h)}\right],$$

e tenendo conto che è

$$W_n'(x_k) = x_k\,\omega_n'(x_k)\,\omega_n(x_k-h), \qquad W_n'(x_k+h) = (x_k-h)\,\omega_n'(x_k)\,\omega_n(x_k+h)\,,$$

si ottiene

$$\overline{S}_{4n}(x) = \sum_{k=1}^{2n} y_k \frac{x}{x_k}\left[1 - \left(\frac{1}{x_k} + \frac{\omega_n''(x_k)}{\omega_n'(x_k)}\right)(x-x_k)\right]\left[\frac{\omega_n(x)}{\omega_n'(x_k)\,(x-x_k)}\right]^2, \tag{6}$$

che soddisfa alle condizioni richieste, essendo, come si verifica subito

$$\overline{S}_{4n}(0) = 0, \qquad \overline{S}_{4n}(x_k) = y_k, \qquad \overline{S}_{4n}'(x_k) = 0, \qquad (k = 1,\ 2,\ \ldots,\ 2n). \tag{7}$$

---

[6] G. SANSONE, *Moderna teoria delle funzioni di variabile reale*, Parte II, N. Zanichelli, Bologna 1952 (cfr. p. 394).

### 3. - Dimostrazione del Teorema enunciato.

Si scelgano ora, come punti fondamentali, gli zeri del polinomio di TCHEBYCHEFF di prima specie,

$$\omega_n(x) = \cos 2n\theta, \qquad x = \cos\theta, \qquad (-1 \leqslant x \leqslant 1),$$

cioè i punti

$$x_k = \cos\theta_k = \cos\frac{(2k-1)\pi}{4n} \qquad (k = 1, 2, \dots, 2n)$$

e assumiamo come valori del polinomio, in tali punti,

$$y_k = x_k^2\,\varphi(x_k) \qquad (k = 1\ 2, \dots, 2n),$$

rispettivamente, cioè i valori assunti ivi dalla funzione $f(x) = x^2\,\varphi(x)$.

Dalla (6) avremo:

$$\overline{S}_{4n}(x) = \sum_{k=1}^{2n} \varphi(x_k)\, x\, x_k\left[1 - \left(\frac{1}{x_k} + \frac{x_k}{1-x_k^2}\right)(x - x_k)\right]\left[\frac{\omega_n(x)}{\omega_n'(x_k)\,(x - x_k)}\right]^2 \tag{8}$$

o anche

$$\overline{S}_{4n}(x) = \frac{1}{4n^2}\sum_{k=1}^{2n} \varphi(x_k)\,\frac{\cos^2 2n\theta\cdot\cos\theta}{(\cos\theta - \cos\theta_k)^2}\left[\cos\theta_k\cdot\operatorname{sen}^2\theta_k - (\cos\theta - \cos\theta_k)\right], \tag{9}$$

con $x = \cos\theta$.

Si consideri ora il polinomio interpolante di HERMITE che nei punti $x_1$, $x_2$, ..., $x_{2n}$ assume rispettivamente i valori $f(x_1)$, $f(x_2)$, ..., $f(x_{2n})$ e la cui derivata si annulla negli stessi punti. Esso è dato dalla formula (7)

$$H_{4n-1}(x) = \frac{1}{4n^2}\sum_{k=1}^{2n} \varphi(x_k)\,\frac{\cos^2 2n\theta}{(\cos\theta - \cos\theta_k)^2}\,(1 - \cos\theta\cdot\cos\theta_k)\,\cos^2\theta_k\,, \tag{10}$$

ed è un polinomio di grado $\leqslant 4n-1$. Inoltre, per il noto teorema di FEJÉR (8), tenuto conto che la funzione $f(x) = x^2\,\varphi(x)$ è continua in $[-1, 1]$, si ha:

$$\lim_{n\to\infty} H_{4n-1}(x) = x^2\,\varphi(x), \tag{11}$$

e ciò uniformenente in $[-1, 1]$.

---

(7) Cfr. annotazione (6).
(8) Cfr. annotazione (7).

Dalle (9) e (10) si ha ora:

$$\overline{S}_{4n}(x) - H_{4n-1}(x) = \frac{1}{4n^2}\sum_{k=1}^{2n}\varphi(x_k)\frac{\cos^2 2n\,\theta}{(\cos\theta - \cos\theta_k)^2}\left[(1 - \cos\theta\cdot\cos\theta_k)\cos^2\theta_k - \right.$$

$$\left. - \cos\theta_k\cdot\cos\theta\cdot\operatorname{sen}^2\theta_k + \cos\theta\cdot(\cos\theta - \cos\theta_k)\right] =$$

$$= \frac{1}{4n^2}\sum_{k=1}^{2n}\varphi(x_k)\frac{\cos^2 2n\theta}{(\cos\theta - \cos\theta_k)^2}(\cos\theta - \cos\theta_k)^2 = \frac{1}{4n^2}\sum_{k=1}^{2n}\varphi(x_k)\cos^2 2n\theta\,.$$

Quindi sarà

$$\overline{S}_{4n}(x) = H_{4n-1}(x) + \frac{1}{4n^2}\sum_{k=1}^{2n}\varphi(x_k)\cos^2 2n\theta\,. \tag{12}$$

Essendo $\varphi(x)$ continua in $[-1,\,1]$ è

$$\left|\frac{1}{4n^2}\sum_{k=1}^{2n}\varphi(x_k)\cos^2 2n\theta\right| \leqslant \frac{1}{4n^2}\sum_{k=1}^{2n}|\varphi(x_k)| < \frac{C}{n},$$

con $C$ costante assoluta. Ne viene allora

$$\lim_{n\to\infty}\overline{S}_{4n}(x) = \lim_{n\to\infty}H_{4n-1}(x) = x^2\,\varphi(x),$$

come volevasi dimostrare.

## Summary.

*An approximation theorem, for a class of continuous functions, is proved.*

* * *