Riv. Mat. Univ. Parma (2) 6 (1965), 23-30

GIULIO MATTEI (*)

Sul principio dell'effetto giroscopico per una classe di solidi autoeccitati di massa variabile. (**)

1. - Recentemente GRAMMEL [1] (1) e collaboratori hanno considerato e sviluppato a fondo lo studio del moto di un solido $\mathfrak{R}$ con un punto fisso O, soggetto ad un momento $\boldsymbol{M}$ delle forze attive avente origine nel solido stesso a causa di una emissione di particelle (solido autoeccitato). La teoria, i cui riflessi possono essere notevoli in missilistica, è stata particolarmente sviluppata nel caso in cui:

1) $\boldsymbol{M}$ ha direzione invariabile in $\mathfrak{R}$,

2) l'emissione è tale da non alterare sensibilmente nel tempo i momenti d'inerzia.

Per un solido autoeccitato nelle condizioni 1) e 2), considerando $|\boldsymbol{M}|$ funzione solo del tempo, è stata trovata la forma del principio dell'effetto giroscopico nel caso simmetrico da BATTAGLIA [2] e nel caso asimmetrico in un precedente lavoro [3]. Precisamente, detti: $S(O; \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$ una terna principale d'inerzia solidale ad $\mathfrak{R}$, A, B, C i momenti di inerzia relativi agli assi $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$ e $\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{\omega} = p\boldsymbol{i} + q\boldsymbol{j} + r\boldsymbol{k}$ la velocità di rotazione di S rispetto ad una terna fissa, in [2] si dimostra che, per $\mathfrak{R}$ a struttura giroscopica rispetto a $\boldsymbol{k}$, sotto le ipotesi:

a) $\quad \boldsymbol{M} \times \boldsymbol{k} = 0,$

b) $\quad p_0 = q_0 = 0,$

c) $\quad M(0) = 0,$

(*) Indirizzo: Istituto di Matematiche Applicate, Facoltà di Ingegneria, Università, Pisa, Italia.

(**) Ricevuto il 17-IV-1964.

(1) I numeri in neretto e in parentesi quadre si riferiscono alla Bibliografia posta alla fine del lavoro.

l'espressione al primo ordine per $r_0 \to \infty$ di $\dot{\boldsymbol{k}}$ è data da:

$$(C - A)\, r_0\, \dot{\boldsymbol{k}} = \boldsymbol{M} \tag{1.1}$$

e in [3] che, per $\mathfrak{R}$ asimmetrico, si ha:

$$r_0\, \dot{\boldsymbol{k}} = \frac{M_x}{C - B}\, \boldsymbol{i} + \frac{M_y}{C - A}\, \boldsymbol{j} + \boldsymbol{M}^0 \tag{1.2}$$

con $\boldsymbol{M}$ supposto di direzione qualsiasi (purchè fissa) in $\mathfrak{R}$ e $\boldsymbol{M}^0$ un opportuno vettore nullo solo se $p_0 = q_0 = 0$ e $M_x(0) = M_y(0) = 0$. Le espressioni corrispondenti alla (1.1) e alla (1.2) nel caso di sollecitazioni classiche sono:

$$C\, r_0\, \dot{\boldsymbol{k}} = \boldsymbol{M}, \tag{1.1'}$$

giustificata teoricamente, come è ben noto, per la prima volta da SIGNORINI [4] sotto le ipotesi a), b) e c), e:

$$C\, r_0\, \dot{\boldsymbol{k}} = \boldsymbol{M} + \frac{A - B}{A + B - C}\, \boldsymbol{M}' + \boldsymbol{M}'' \tag{1.2'}$$

trovata da STOPPELLI [5]. Quest'ultima forma, in cui $\boldsymbol{M}' = M_x \boldsymbol{i} - M_y \boldsymbol{j}$ è il vettore simmetrico di $\boldsymbol{M}$ rispetto ad $\boldsymbol{i}$ e $\boldsymbol{M}''$ un opportuno vettore nullo solo se $p_0 = q_0 = M(0) = 0$, vale sotto le ipotesi: $A + B \neq C$, $\boldsymbol{M} \times \boldsymbol{k} = 0$, p_0, q_0, $1/r_0$ infinitesimi dello stesso ordine per $r_0 \to \infty$ e le forze agenti indipendenti dalla velocità di rotazione equatoriale oltre che dall'angolo di rotazione propria.

Per quanto riguarda poi il solido simmetrico, MANACORDA (cfr. [6], n. 7), nella condizione più generale di momenti d'inerzia comunque variabili nel tempo ha dimostrato, facendo uso di una opportuna terna di riferimento mobile nello spazio e in $\mathfrak{R}$, che se la direzione del momento equatoriale $\boldsymbol{M}_e$ è invariabile in $\mathfrak{R}$ vale ancora la (1.1) con A e C funzioni del tempo.

In questa Nota si considera ancora la direzione di $\boldsymbol{M}$ invariabile in $\mathfrak{R}$ e $|\boldsymbol{M}|$ funzione solo del tempo e, usando un procedimento diverso da quello in [6], si abbandona l'ipotesi 2) supponendo però la terna principale $S(O;\, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$ sempre solidale ad $\mathfrak{R}$ nonostante la variabilità della massa (2); scegliendo opportunamente il nome degli assi in modo che sia sempre verificata l'una o l'altra delle due diseguaglianze:

$$C > B > A, \qquad C < B < A;$$

---

(2) Si osservi tuttavia che, meno restrittivamente, basterebbe supporre la terna S di direzione invariabile entro il corpo.

posto

$$a(t) = \{ C(t) - B(t) \}/A(t), \qquad b(t) = \{ C(t) - A(t) \}/B(t), \tag{1.3}$$
$$c(t) = \{ A(t) - B(t) \}/C(t),$$

si trova l'espressione del principio nel caso in cui durante tutto il moto si verifichi, ad esempio, la condizione strutturale per $\mathfrak{R}$:

$$b(t) = h \; a(t) \tag{1.4}$$

con h, per conseguenza, positiva.

Le seguenti eventualità, molto frequenti in pratica, sono contenute nella (1.4) quando $h = 1$:

1) $A = B$ e $C \neq A + B$ (caso simmetrico ma non piano),

2) $A \neq B$ e $C = A + B$ (caso piano asimmetrico),

3) $A = B$ e $C = A + B$ (caso piano simmetrico).

2. – In questo n., con un procedimento analogo a quello usato da STOPPELLI in [5] (cfr. pag. 19), trasformo le equazioni differenziali di moto del solido $\mathfrak{R}$ in questione in un opportuno sistema di equazioni integrali.

MANACORDA [7] ha dimostrato che per un solido $\mathfrak{R}$ a massa variabile, il teorema dei momenti, riferito a un punto O fisso o coincidente col centro di massa, assume la forma:

$$\sigma_0 \dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \wedge \sigma_0 \boldsymbol{\omega} = \mathfrak{M}_0 - \boldsymbol{\mu}_0 , \tag{2.1}$$

dove σ_0 è il tensore d'inerzia relativo ad O i cui elementi sono funzioni del tempo, $\boldsymbol{\mu}_0$ è il momento rispetto ad O delle forze del getto e $\mathfrak{M}_0$ è il momento rispetto ad O di tutte le altre forze esterne. Nel caso del solido autoeccitato in questione, conformemente a quanto detto al n. **1**, $\mathfrak{M}_0 = 0$ e $\boldsymbol{\mu}_0$ ha direzione invariabile in $\mathfrak{R}$ e modulo funzione solo del tempo. Posto allora $-\boldsymbol{\mu}_0 = \boldsymbol{M}$ e

$$M_x/A = m_x, \qquad M_y/B = m_y, \qquad M_z/C = m_z , \tag{2.2}$$

la (2.1) proiettata su $S(O; \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$ dà:

$$\dot{p} + arq = m_x, \tag{2.3$_1$}$$
$$\dot{q} - hapr = m_y, \tag{2.3$_2$}$$
$$\dot{r} - cpq = m_z, \tag{2.3$_3$}$$

alle quali vanno associate le condizioni iniziali:

$$p(0) = p_0, \quad q(0) = q_0, \quad r(0) = r_0 . \tag{2.4}$$

Nelle (2.3) $a = a(t)$, $c = c(t)$, $m_x = m_x(t)$, $m_y = m_y(t)$, $m_z = m_z(t)$ sono funzioni solo del tempo che suppongo continue e limitate con le loro prime due derivate.

Essendo $h > 0$, posto

$$\int_0^t a(\tau)\, r(\tau)\, d\tau = L_t, \tag{2.5}$$

osservando che due soluzioni indipendenti del sistema (2.3_1), (2.3_2) reso omogeneo sono:

$$p_1 = \sqrt{1/h} \cos(\sqrt{h}\, L_t), \qquad q_1 = \operatorname{sen}(\sqrt{h}\, L_t)$$

e

$$p_2 = \sqrt{1/h} \operatorname{sen}(\sqrt{h}\, L_t), \qquad q_2 = -\cos(\sqrt{h}\, L_t),$$

applicando il metodo di variazione delle costanti arbitrarie e tenendo presenti le condizioni iniziali (2.4), si ottiene:

$$\begin{aligned} p = {} & p_0 \cos(\sqrt{h}\, L_t) - \sqrt{1/h}\, q_0 \operatorname{sen}(\sqrt{h}\, L_t) + \\ & + \int_0^t m_x(\tau) \cos\{\sqrt{h}\,(L_t - L_\tau)\}\, d\tau - (1/\sqrt{h}) \int_0^t m_y(\tau) \operatorname{sen}\{\sqrt{h}\,(L_t - L_\tau)\}\, d\tau , \end{aligned} \tag{2.6_1}$$

$$\begin{aligned} q = {} & q_0 \cos(\sqrt{h}\, L_t) + \sqrt{h}\, p_0 \operatorname{sen}(\sqrt{h}\, L_t) + \\ & + \sqrt{h} \int_0^t m_x(\tau) \operatorname{sen}\{\sqrt{h}\,(L_t - L_\tau)\}\, d\tau + \int_0^t m_y(\tau) \cos\{\sqrt{h}\,(L_t - L_\tau)\}\, d\tau. \end{aligned} \tag{2.6_2}$$

Da (2.3_3) si ha poi:

$$r = r_0 + \int_0^t c(\tau)\, p(\tau)\, q(\tau)\, d\tau + \int_0^t m_z(\tau)\, d\tau . \tag{2.6_3}$$

Le (2.6) costituiscono il sistema di equazioni integrali non lineari del tipo di VOLTERRA equivalente al sistema (2.3) delle equazioni differenziali di moto con le condizioni iniziali (2.4).

3. – Valuto ora asintoticamente per $r_0 \to \infty$ gli integrali che compaiono nelle (2.6).

Pongo:

$$I_1 = \int_0^t m_x(\tau) \cos\{\sqrt{h}\,(L_t - L_\tau)\}\, d\tau, \qquad I_2 = \int_0^t m_x(\tau) \operatorname{sen}\{\sqrt{h}\,(L_t - L_\tau)\}\, d\tau .$$

Integrando per parti si ha:

$$I_1 = \frac{m_{x0}}{\sqrt{h}\, a_0 r_0} \operatorname{sen}(\sqrt{h}\, L_t) + \frac{1}{\sqrt{h}} \int_0^t \frac{\dot{m}_x(\tau)}{a(\tau)\, r(\tau)} \operatorname{sen}\{\sqrt{h}\,(L_t - L_\tau)\}\, d\tau -$$

$$- \frac{1}{\sqrt{h}} \int_0^t \frac{m_x(\tau)\, \dot{a}(\tau)}{a^2(\tau)\, r(\tau)} \operatorname{sen}\{\sqrt{h}\,(L_t - L_\tau)\}\, d\tau - \frac{1}{\sqrt{h}} \int_0^t \frac{m_x(\tau)\, \dot{r}(\tau)}{a(\tau)\, r^2(\tau)} \operatorname{sen}\{\sqrt{h}\,(L_t - L_\tau)\}\, d\tau .$$

Pongo ora:

$$I_3 = \int_0^t \frac{\dot{m}_x(\tau)}{a(\tau)\, r(\tau)} \operatorname{sen}\{\sqrt{h}\,(L_t - L_\tau)\}\, d\tau, \qquad I_4 = \int_0^t \frac{m_x(\tau)\, \dot{a}(\tau)}{a^2(\tau)\, r(\tau)} \operatorname{sen}\{\sqrt{h}\,(L_t - L_\tau)\}\, d\tau,$$

$$I_5 = \int_0^t \frac{m_x(\tau)\, \dot{r}(\tau)}{a(\tau) r^2(\tau)} \operatorname{sen}\{\sqrt{h}\,(L_t - L_\tau)\}\, d\tau .$$

Dalle (2.6) segue, per le ipotesi su m_x, m_y, m_z e c, che p, q e $r - r_0$ sono funzioni limitate del tempo per $r_0 \to \infty$ e quindi:

$$r \xrightarrow[r_0 \to \infty]{} \infty .$$

Dalla (2.3$_3$) discende inoltre che anche $\dot{r}$ è funzione limitata del tempo per $r_0 \to \infty$, per cui $I_5 \to 0$ almeno come $1/r_0^2$ quando $r_0 \to \infty$.

Riguardo ad I_3 integrando per parti:

$$I_3 = \frac{\dot{m}_x}{\sqrt{h}\, a^2 r^2} - \frac{\dot{m}_{x0}}{\sqrt{h}\, a_0^2 r_0^2} \cos(\sqrt{h}\, L_t) -$$

$$- \frac{1}{\sqrt{h}} \int_0^t \frac{\ddot{m}_x(\tau) a^2(\tau) r^2(\tau) - 2\dot{m}_x(\tau) a(\tau) \dot{a}(\tau) r^2(\tau) - 2\dot{m}_x(\tau) a^2(\tau) r(\tau) \dot{r}(\tau)}{a^4(\tau)\, r^4(\tau)} \cos\{\sqrt{h}\,(L_t - L_\tau)\}\, d\tau,$$

quindi: $I_3 \to 0$ almeno come $1/r_0^2$ quando $r_0 \to \infty$. Nello stesso modo si vede che $I_4 \to 0$ almeno come $1/r_0^2$ quando $r_0 \to \infty$, per cui:

$$I_1 = \frac{m_{x0}}{\sqrt{h}\, a_0\, r_0} \operatorname{sen}(\sqrt{h}\, L_t) + O(1/r_0^2) .$$

Procedendo in modo analogo si trova:

$$I_2 = \frac{m_x}{\sqrt{h}\, a\, r} - \frac{m_{x0}}{\sqrt{h}\, a_0\, r_0} \cos(\sqrt{h}\, L_t) + O(1/r_0^2)\,,$$

per cui da (2.6_1) e (2.6_2) si ha:

$$(3.1_1) \qquad p = p_0 \cos(\sqrt{h}\, L_t) - \sqrt{1/h}\, q_0 \operatorname{sen}(\sqrt{h}\, L_t) + \\ + \frac{m_{x0}}{\sqrt{h}\, a_0\, r_0} \operatorname{sen}(\sqrt{h}\, L_t) + \frac{m_{y0}}{h\, a_0\, r_0} \cos(\sqrt{h}\, L_t) - \frac{m_y}{h\, a\, r} + O(1/r_0^2)\,,$$

$$(3.1_2) \qquad q = q_0 \cos(\sqrt{h}\, L_t) + \sqrt{h}\, p_0 \operatorname{sen}(\sqrt{h}\, L_t) + \\ + \frac{m_x}{a\, r} - \frac{m_{x0}}{a_0\, r_0} \cos(\sqrt{h}\, L_t) + \frac{m_{y0}}{\sqrt{h}\, a_0\, r_0} \operatorname{sen}(\sqrt{h}\, L_t) + O(1/r_0^2)\,.$$

Da (2.6_3) supponendo p_0, q_0 e $1/r_0$ infinitesimi dello stesso ordine, si ha allora:

$$(3.1_3) \qquad r = r_0 + \int_0^t m_z(\tau)\, d\tau + O(1/r_0^2)\,,$$

e da quest'ultima

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} = - \frac{\int_0^t m_z(\tau)\, d\tau + O(1/r_0^2)}{r_0\left(r_0 + \int_0^t m_z(\tau)\, d\tau + O(1/r_0^2)\right)} = O(1/r_0^2)\,.$$

Introdotto il vettore (nullo solo se $p_0 = q_0 = m_{x0} = m_{y0} = 0$):

$$\boldsymbol{M}^* = r_0 \Bigg[- \Bigg(p_0 \cos(\sqrt{h}\, L_t) - \frac{1}{\sqrt{h}}\, q_0 \operatorname{sen}(\sqrt{h}\, L_t) + \frac{m_{x0}}{\sqrt{h}\, a_0\, r_0} \operatorname{sen}(\sqrt{h}\, L_t) + \\ + \frac{m_{y0}}{h\, a_0\, r_0} \cos(\sqrt{h}\, L_t) \Bigg) \boldsymbol{j} + \Bigg(q_0 \cos(\sqrt{h}\, L_t) + \sqrt{h}\, p_0 \operatorname{sen}(\sqrt{h}\, L_t) - \\ - \frac{m_{x0}}{a_0\, r_0} \cos(\sqrt{h}\, L_t) + \frac{m_{y0}}{\sqrt{h}\, a_0\, r_0} \operatorname{sen}(\sqrt{h}\, L_t) \Bigg) \boldsymbol{i} \Bigg]\,,$$

dalla $\dot{\boldsymbol{k}} = q\, \boldsymbol{i} - p\, \boldsymbol{j}$, tenendo presenti le (2.2) e (1.3) si ha la cercata espressione di $\dot{\boldsymbol{k}}$ al prim'ordine:

$$(3.2) \qquad r_0\, \dot{\boldsymbol{k}} = \frac{M_x}{C - B} \boldsymbol{i} + \frac{A\, M_y}{h\, B\, (C - B)} \boldsymbol{j} + \boldsymbol{M}^*\,.$$

Relativamente ai casi particolari citati al n. **1** si ha, nelle ipotesi $p_0 = q_0 = m_{x0} = m_{y0} = 0$:

1) $A = B$ e $C \neq A + B$:

$$(C - A)\, r_0\, \dot{\boldsymbol{k}} = \boldsymbol{M}_e \tag{3.3}$$

con $\boldsymbol{M}_e$ momento equatoriale, risultato identico a quello trovato, per altra via, nel lavoro [6].

2) $A + B = C$ e $A \neq B$:

$$r_0\, \dot{\boldsymbol{k}} = (M_x/A)\, \boldsymbol{i} + (M_y/B)\, \boldsymbol{j}\,. \tag{3.4}$$

3) $A = B$ e $C = A + B$:

$$A\, r_0\, \dot{\boldsymbol{k}} = \boldsymbol{M}_e \tag{3.5}$$

identica, come la (3.4), a quella ottenuta in [3] considerando costanti nel tempo i momenti d'inerzia.

Quindi possiamo dire che le modificazioni alle forme classiche del principio dell'effetto giroscopico nel caso di solidi autoeccitati non sono in modo essenziale inerenti alla variabilità della massa, bensì alla variabilità o meno in $\mathfrak{R}$ del momento autoprodotto.

A conferma di questa affermazione, oltre al fatto, già visto in [2] e [3], che, se l'emissione in $\mathfrak{R}$ è tale che i momenti d'inerzia possono in buona approssimazione considerarsi costanti nel tempo ed $\boldsymbol{M}$ ha direzione invariabile in $\mathfrak{R}$, non valgono più le (1.1′) e (1.2′) bensì le (1.1) e (1.2), va tenuto presente che quando $\boldsymbol{M}$ è comunque variabile in $\mathfrak{R}$:

a) nel lavoro [6] Manacorda, riferendosi al caso $A(t) = B(t)$ con momenti d'inerzia comunque variabili nel tempo, purchè C/A sia una funzione limitata e continua con le prime sue due derivate, ha trovato che si ristabilisce la forma (1.1) di Signorini relativa a sollecitazioni classiche non appena $\boldsymbol{M}_e$ varia in $\mathfrak{R}$.

b) Quando è $A(t) + B(t) = C(t)$ da (2.1) si ha:

$$\begin{cases} \dot{p} + q\, r = m_x \\ \dot{q} - p\, r = m_y \\ \dot{r} - c\, p\, q = m_z \end{cases} \tag{3.6}$$

con $c = (A - B)/(A + B)$.

Dalle (3.6), nell'ipotesi $c(t)$ continua e limitata e $\boldsymbol{m}$ vettore a derivata assoluta rispetto al tempo di modulo limitato, seguendo esattamente il procedimento usato da QUILGHINI [8] nello studio di questo caso sotto sollecitazioni di tipo classico, si ritrovano i risultati validi del caso di massa costante contenuti in [8] al n. 3.

Bibliografia.

[1] R. GRAMMEL, *Der selbsterregte unsymmetrische Kreisel*, Ing. - Arch. **22** (1954), 73-97.

[2] L. BATTAGLIA, *Sul principio dell'effetto giroscopico nei solidi autoeccitati*, Riv. Mat. Univ. Parma **8** (1957-58), 73-80.

[3] G. MATTEI, *Sul principio dell'effetto giroscopico per un solido asimmetrico autoeccitato*, Riv. Mat. Univ. Parma, in corso di pubblicazione.

[4] A. SIGNORINI, *Complementi di dinamica dei giroscopi e equazione del problema completo della balistica esterna*, Atti Acc. Naz. Lincei. Mem. (8) **1** (1946), 1-41.

[5] F. STOPPELLI, *Sul principio dell'effetto giroscopico*, Giorn. Mat. Battaglini (4) **80** (1950-51), 14-38.

[6] T. MANACORDA, *Sul principio dell'effetto giroscopico per i solidi di massa variabile*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) **48** (1959), 183-191.

[7] T. MANACORDA, *Sul moto di un corpo di massa variabile*, Riv. Mat. Univ. Parma **3** (1952), 361-373.

[8] D. QUILGHINI, *Sul principio dell'effetto giroscopico*, Ricerche Mat. **7** (1958), 205-231.

Summary.

The author finds the equation of «the principle of the gyroscopic effect» in the case of some particular selfexcited solids with variable mass moving around a fixed point.

* * *