Riv. Mat. Univ. Parma (2) 6 (1965), 65-69

SANTA SANTORO CALAFIORE (*)

Due teoremi di stabilità asintotica per equazioni differenziali lineari, omogenee, del secondo ordine. (**)

1. – Sia data l'equazione differenziale

$$\ddot{x} + p(t)\ \dot{x} + q(t)\ x = 0\ , \tag{E}$$

ove è $\dot{x} = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$, $\ddot{x} = \mathrm{d}^2x/\mathrm{d}t^2$, e $p(t)$, $q(t)$ sono funzioni continue, positive, definite per $t \geqslant 0$.

Si trovano delle relazioni tra $p(t)$ e $q(t)$ atte a garantire che le soluzioni dell'equazione (E) tendano a zero, per $t \to +\infty$, con le loro derivate prime [ovvero, che le soluzioni di (E) siano *asintoticamente stabili*], *senza supporre la limitatezza di* $p(t)$ *e* $q(t)$ (1).

Scritta l'equazione (E) sotto forma di sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \\ \dot{y} = -\,qx - py, \end{cases} \tag{S}$$

in un primo teorema si associa al sistema (S) una opportuna funzione $V(t,\ x,\ y)$ e si utilizza il così detto *secondo metodo di Liapunov* per provare la stabilità asintotica delle soluzioni.

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università, Parma, Italia.

(**) Ricevuto il 2-II-1965.

(1) Per la nomenclatura usata e per i risultati già noti di cui si fa uso in questo lavoro, cfr.: G. SANSONE e R. CONTI, *Equazioni differenziali non lineari*, Monografie Matematiche del C. N. R., Ediz. Cremonese, Roma 1956.

In un secondo teorema sempre per il sistema (S) si individua, in un piano $t = \bar{t} \geqslant 0$ dello spazio T: (t, x, y), una famiglia di curve Γ_a. Ogni curva della famiglia è composta di più archi di linea semplice e racchiude una regione R_a, che gode delle seguenti proprietà:

a) contiene l'unico punto singolare $O \equiv (0, 0)$ di (S),

b) « capta » le proiezioni delle curve integrali di (S) [2],

c) $R_a \to 0$ per $a \to 0$.

2. – Teorema I. *Se $p(t)$, $q(t)$ sono funzioni derivabili e*

$$(\alpha) \qquad q(t) > p(t) > 1 \qquad \textit{per } t \geqslant \bar{t},$$

$$(\beta) \qquad \sup_t \, (\dot{p}/p + \dot{q}/q) < 2 \qquad \textit{per } t \geqslant \bar{t},$$

allora per ogni soluzione $x(t)$ dell'equazione (E) *si ha*

$$\lim_{t \to +\infty} x(t) = 0, \qquad \lim_{t \to +\infty} \dot{x}(t) = 0 .$$

Infatti, consideriamo la funzione

$$(1) \qquad V(t, x, y) \equiv [p(t) + q(t)]x^2 + 2xy + y^2,$$

che è definita positiva; lungo una soluzione $x = x(t)$, $y = y(t)$ di (S) si ha

$$(2) \qquad \mathrm{d}V/\mathrm{d}t = (\dot{p} + \dot{q} - 2q)x^2 + 2(1 - p)y^2;$$

avendosi, per (α),

$$(3) \qquad 1 - p < 0$$

ed inoltre, sempre per (α),

$$\dot{p}/q + \dot{q}/q < \dot{p}/p + \dot{q}/q,$$

---

(2) Si intende con ciò che, detta $\mathcal{C}$ la superficie cilindrica di direttrice Γ_a e generatrici parallele all'asse t, ogni curva integrale di (S), che per $t = t_0 \geqslant \bar{t}$ incontra $\mathcal{C}$, è costretta a rimanere nella regione cilindrica per $t > t_0$.

e quindi, per (β),

$$\dot{p}/q + \dot{q}/q < 2 \,, \tag{4}$$

si ha, tenuto conto di (2), (3), (4), che $\mathrm{d}V/\mathrm{d}t$ è definita negativa.

Poichè abbiamo associato al sistema (S) una funzione $V(t, x, y)$ definita positiva e con $\mathrm{d}V/\mathrm{d}t$ definita negativa, la soluzione nulla di (S) è asintoticamente uniformemente stabile. Trattandosi di un sistema lineare, la soluzione nulla del sistema (S) è asintoticamente stabile in grande e quindi per le soluzioni dell'equazione (E), comunque siano fissati i valori iniziali $x(t_0)$, $\dot{x}(t_0)$, segue la tesi.

3. - Teorema II. *Se*

$$p(t) \geqslant q(t) > 4k^2 \qquad per\ t \geqslant \bar{t} \geqslant 0\ \ e\ \ k > 1, \tag{5}$$

le soluzioni di (E) *sono asintoticamente stabili.*

α) Per la dimostrazione individueremo, in un piano $t = \bar{t} \geqslant 0$ dello spazio T: (t, x, y), una famiglia di curve Γ_a; ogni curva della famiglia consta di più archi di linea semplice e racchiude una regione R_a che gode delle proprietà a), b), c) enunciate nel n. 1.

Ci riferiremo inoltre, ancora una volta, al sistema (S) e poichè cambiando in (S) x in $-x$ e y in $-y$ il sistema rimane inalterato, ogni osservazione relativa al sistema, valida per un quadrante, può essere ripetuta per il quadrante simmetrico rispetto all'origine O; pertanto considereremo regioni R_a simmetriche rispetto ad O.

β) Per costruire la famiglia di curve Γ_a, procederemo nel seguente modo.

Fissato un punto $A \equiv (a, 0)$ $(a > 0)$, consideriamo la retta

$$s: \qquad y = -(1+b)(x-a) \qquad \text{con} \qquad b > 1/(k-1), \qquad k > 1$$

e chiamiamo $M \equiv (x_M, y_M)$ il punto di intersezione di s con s': $x + y = 0$.

Avremo

$$x_M = (1+b)a/b, \qquad y_M = -(1+b)a/b$$

e da $b > 1/(k-1)$ segue $|y_M| < k\,a$.

Ci sarà utile anche la retta

$$s'': \qquad y = y_M + c(x - x_M), \qquad \text{con} \qquad 0 < c < 2kb/(1+b) - 1\,,$$

che incontra la retta $x = 0$ in un punto B, con OB di lunghezza minore di $2ka$.

Chiamiamo Γ_a la curva chiusa, formata dagli archi di linea semplice

$$CA,\ AM,\ MB,\ BC',\ C'A',\ A'M',\ M'B',\ B'C,$$

dove:

CA è l'arco di ellisse $\begin{cases} x^2 + y^2/(4k^2) = a^2 \\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0 \end{cases}$

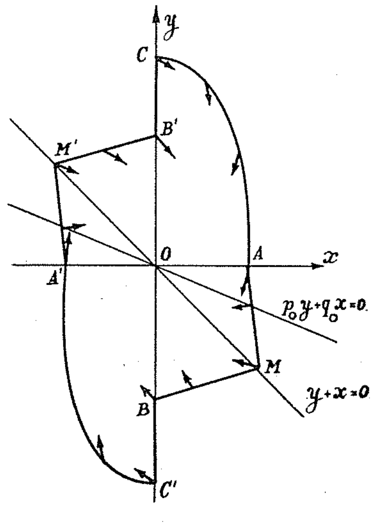
di estremi $C \equiv (0,\ 2ka)$ e $A \equiv (a,\ 0)$,

AM è il segmento di $y = -(1+b)(x-a)$ $\quad (b > 1/(k-1),\ k > 1)$ di estremi A e M,

MB è il segmento di $y = y_M + c(x - x_M)$ $\quad (0 < c < 2kb/(1+b) - 1)$ di estremi M e B,

BC' è il segmento dell'asse y di estremi B e $C' \equiv (0,\ -2ka)$,

$C'A'$, $A'M'$, $M'B'$, $B'C$ sono archi di curve simmetrici, rispetto alla origine, degli archi CA, AM, MB, BC'.



[Le frecce indicano le direzioni del campo del sistema (S).]

γ) La regione R_a racchiusa da Γ_a soddisfa ai requisiti richiesti in α). Infatti,

1) tenuto conto della (5), il comportamento del campo di (S) (3) per ogni punto $P \in \Gamma_a$ è come quello indicato in figura;

2) inoltre notiamo che, tenendo fissi b e k, per $0 < a' < a$ la curva chiusa $\Gamma_{a'}$ è contenuta in R_a ed è simile a Γ_a; quindi $R_{a'} \subset R_a$;

3) $\lim\limits_{a \to 0} R_a = 0$.

Allora ogni curva integrale del sistema (S) che incontra il cilindro di direttrice Γ_a e generatrici parallele all'asse t, è costretta a rimanere nel cilindro; e ciò avviene qualunque sia a (> 0) e quindi per la proprietà (3) della regione R_a, segue l'asserto.

---

(3) Cioè il comportamento del vettore $(\dot{x}, \dot{y})$ al crescere della variabile t.

Sommaire.

On trouve, pour l'équation $\ddot{x} + p(t)\,\dot{x} + q(t)\,x = 0$, *des relations entre* $p(t)$ *et* $q(t)$ *capables à garantir que les solutions tendent à zéro, lorsque* $t \to +\infty$, *avec les dérivées premières, sans supposer la limitation de* $p(t)$ *et* $q(t)$.

* * *