

FERRUCCIO FONTANELLA (\*)

**Quadrature meccaniche in due variabili. (\*\*)**

**1.**

È noto (1) che se si considerano i polinomi  $L_{n,m}[f(x, y)]$  di interpolazione di LAGRANGE in due variabili

$$(1) \quad L_{n,m}[f(x, y)] = \sum_k^n l_k^{(n)}(x) \sum_i^m l_i^{(m)}(y) f(x_k, y_i),$$

dove

$$(2) \quad l_s^{(p)}(u) = \frac{\omega_p(u)}{\omega_p'(u_s)(u - u_s)} \quad (s = 1, 2, \dots, p)$$

con

$$(2') \quad \omega_p(u) = (u - u_1)(u - u_2) \dots (u - u_p),$$

nel caso che il doppio sistema di punti fondamentali per l'interpolazione sia costituito dagli zeri

$$(3) \quad x_k^{(n)} = \cos \frac{2k-1}{2n} \pi \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

$$y_i^{(m)} = \cos \frac{2i-1}{2m} \pi \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

(\*) Indirizzo: Istituto Matematico della Università, Viale Morgagni 67/A, Firenze, Italia.

(\*\*) Lavoro eseguito nell'ambito del Gruppo di Ricerca n. 6 del Comitato Nazionale per la Matematica del C.N.R. per l'anno 1964-65. — Ricevuto il 22-VII-1965.

(1) L. MERLI, *Sull'approssimazione delle funzioni continue di due variabili mediante polinomi*, Boll. Un. Mat. Ital. (3) 5 (1950), 68-71.

del polinomio di TCHEBYCHEFF di prima specie, nell'ipotesi che la funzione  $f(x, y)$  sia definita e continua nel quadrato  $R \equiv [-1 \leq x, y \leq +1]$  e soddisfi, in tutto il campo considerato, la condizione di LIPSCHITZ

$$(4) \quad |f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| \leq L \{ |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| \},$$

dove  $L$  è una costante assoluta e  $(x_1, y_1) \in R$ ,  $(x_2, y_2) \in R$ , ed inoltre esistano due costanti  $h$  e  $k$  tali che

$$(5) \quad h \leq m/n \leq k,$$

si ha uniformemente in  $R$

$$(6) \quad \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ m \rightarrow \infty}} L_{n,m} [f(x, y)] = f(x, y). \quad (2)$$

Scopo di questa Nota è lo studio di una formula di quadratura meccanica per funzioni di due variabili, ottenuta per integrazione della (1), ma con la sola ipotesi della continuità della  $f(x, y)$  in  $R$  e senza porre alcuna limitazione al rapporto  $m/n$ .

Dimostreremo infatti il seguente teorema.

**Teorema.** *Se  $f(x, y)$  è continua in  $R$ , nell'ipotesi che i punti fondamentali della interpolazione siano dati dalle (3), si ha*

$$(7) \quad \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ m \rightarrow \infty}} \iint_R L_{n,m} [f(x, y)] dx dy = \iint_R f(x, y) dx dy.$$

## 2.

Per la dimostrazione del teorema premettiamo alcune considerazioni sulle formule di quadratura meccanica in due variabili.

Di una  $f(x, y)$ , definita ed integrabile nel quadrato  $R \equiv [-1 \leq x, y \leq +1]$ , siano noti i valori  $f(x_k^{(n)}, y_i^{(m)})$  che essa assume negli  $n \cdot m$  nodi  $N \equiv (x_k^{(n)}, y_i^{(m)})$  con

$$(8) \quad -1 \leq x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n \leq +1,$$

$$(8') \quad -1 \leq y_1 < y_2 < \dots < y_{n-1} < y_n \leq +1.$$

---

(2) Un teorema analogo è stato dato successivamente da J. W. ARMSTRONG:  
J. W. ARMSTRONG, *Point system for Lagrange interpolation*, Duke Math. J. 21 (1954), 514-515.

Si abbiano, inoltre, le due successioni triangolari

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \lambda_1^{(1)} & \bar{\lambda}_1^{(1)} \\ \lambda_1^{(2)}, \lambda_2^{(2)} & \bar{\lambda}_1^{(2)}, \bar{\lambda}_2^{(2)} \\ \dots & \dots \\ \lambda_1^{(n)}, \lambda_2^{(n)}, \dots, \lambda_n^{(n)} & \bar{\lambda}_1^{(n)}, \bar{\lambda}_2^{(n)}, \dots, \bar{\lambda}_n^{(n)} \end{array} \right.$$

e si consideri la doppia successione

$$(10) \quad Q_{n,m} [f(x, y)] = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m \lambda_k^{(n)} \bar{\lambda}_i^{(m)} f(x_k^{(n)}, y_i^{(m)}).$$

Se accade che

$$(11) \quad \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ m \rightarrow \infty}} Q_{n,m} [f(x, y)] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(x, y) dx dy,$$

si dice che  $Q_{n,m}[f(x, y)]$  è una formula di quadratura meccanica in due variabili.

I punti  $(x_k^{(n)}, y_i^{(m)})$  sono detti i punti fondamentali ed i numeri  $\lambda_k^{(n)}, \bar{\lambda}_i^{(m)}$  i pesi del procedimento di quadratura.

Se per la classe dei polinomi  $P_{n,m}(x, y)$  nelle variabili  $(x, y)$ , di grado  $n$  rispetto alla  $x$  e di grado  $m$  rispetto alla  $y$ , vale la relazione

$$(12) \quad Q_{n,m}[P_{n,m}(x, y)] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 P_{n,m}(x, y) dx dy$$

e se inoltre sono soddisfatte le relazioni

$$(13) \quad \sum_{k=1}^n |\lambda_k^{(n)}| < c_1, \quad \sum_{i=1}^m |\bar{\lambda}_i^{(m)}| < c_2,$$

dove  $c_1$  e  $c_2$  sono delle costanti assolute, allora per le funzioni  $f(x, y)$ , definite e continue nel quadrato  $R$ , si ha

$$(14) \quad \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ m \rightarrow \infty}} Q_{n,m}[f(x, y)] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(x, y) dx dy.$$

Per provare la (14) studiamo la differenza

$$\left| Q_{n,m}[f(x, y)] - \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(x, y) \, dx \, dy \right|.$$

Per la supposta validità della (12) potremo scrivere

$$\begin{aligned} & \left| Q_{n,m}[f(x, y)] - \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(x, y) \, dx \, dy \right| = \\ & = \left| Q_{n,m}[f(x, y)] - Q_{n,m}[P_{n,m}(x, y)] + \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 P_{n,m}(x, y) \, dx \, dy - \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(x, y) \, dx \, dy \right| \leq \\ & \leq \left| Q_{n,m}[f(x, y)] - Q_{n,m}[P_{n,m}(x, y)] \right| + \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 |P_{n,m}(x, y) - f(x, y)| \, dx \, dy \leq \\ & \leq \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m |\lambda_k^{(n)}| \cdot |\bar{\lambda}_i^{(m)}| \cdot |f(x_k^{(n)}, y_i^{(m)}) - P_{n,m}(x_k^{(n)}, y_i^{(m)})| + \\ & \quad + \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 |P_{n,m}(x, y) - f(x, y)| \, dx \, dy. \end{aligned}$$

Per il teorema di WEIERSTRASS<sup>(3)</sup> è possibile costruire una successione di polinomi razionali interi in due variabili che approssima uniformemente una  $f(x, y)$  continua nell'insieme chiuso e limitato in cui la  $f(x, y)$  è definita; è possibile, cioè, fissato un  $\varepsilon$  positivo arbitrario, costruire una successione di polinomi  $P_{n,m}(x, y)$  tali che

$$|f(x, y) - P_{n,m}(x, y)| < \varepsilon$$

uniformemente in tutto il quadrato  $R$ . Quindi

$$\sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m |\lambda_k^{(n)}| \cdot |\bar{\lambda}_i^{(m)}| \cdot |f(x_k^{(n)}, y_i^{(m)}) - P_{n,m}(x, y)| < \varepsilon \sum_{k=1}^n |\lambda_k^{(n)}| \sum_{i=1}^m |\bar{\lambda}_i^{(m)}|$$

e ancora

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 |P_{n,m}(x, y) - f(x, y)| \, dx \, dy < \varepsilon \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 dx \, dy = 4\varepsilon$$

(3) G. SANSONE, *Sviluppi in serie di funzioni ortogonali* (cfr. Parte II dell'opera: G. VITALI e G. SANSONE, *Moderna teoria delle funzioni di variabile reale*, III ediz., Zanichelli, Bologna 1952).

e tenuto conto delle (13) si ha

$$\left| Q_{n,m}[f(x, y)] - \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(x, y) \, dx \, dy \right| < (c_1 c_2 + 4)\varepsilon$$

uniformemente in tutto il quadrato  $R \equiv [-1 \leq x, y \leq +1]$ .

### 3.

Consideriamo ora il caso particolare in cui  $Q_{n,m}$  è una formula di quadratura interpolatoria, in cui, cioè,  $Q_{n,m}$  è l'integrale di  $L_{n,m}[f(x, y)]$  dato dalla (1), di grado al massimo  $n-1$  in  $x$  ed  $m-1$  in  $y$ , che interpola la funzione  $f(x, y)$  nei punti  $(x_k^{(n)}, y_i^{(m)})$ , cioè

$$Q_{n,m}[f(x, y)] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 L_{n,m}[f(x, y)] \, dx \, dy.$$

Vale identicamente, qualunque sia il polinomio  $P_{n,m}(x, y)$  di grado al massimo  $n-1$  in  $x$  ed  $m-1$  in  $y$ ,

$$P_{n,m}(x, y) \equiv L_{n,m}[P_{n,m}(x, y)] \equiv \sum_k^n l_k^{(n)}(x) \left[ \sum_i^m l_i^{(m)}(y) f(x_k^{(n)}, y_i^{(m)}) \right]$$

ed integrando nel quadrato  $R$  otterremo

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 P_{n,m}(x, y) \, dx \, dy \equiv \sum_k^n \sum_i^m \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 l_k^{(n)}(x) l_i^{(m)}(y) f(x_k^{(n)}, y_i^{(m)}) \, dx \, dy$$

e quindi

$$(15) \quad \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 P_{n,m}(x, y) \, dx \, dy = \sum_k^n \lambda_k^{(n)} \sum_i^m \bar{\lambda}_i^{(m)} f(x_k^{(n)}, y_i^{(m)}),$$

con i  $\lambda_k^{(n)}$ ,  $\bar{\lambda}_i^{(m)}$  dati da

$$(16) \quad \lambda_k^{(n)} = \int_{-1}^1 l_k^{(n)}(x) \, dx, \quad \bar{\lambda}_i^{(m)} = \int_{-1}^1 l_i^{(m)}(y) \, dy.$$

In analogia con le definizioni date per le formule di quadratura interpolatoria in una variabile <sup>(4)</sup>, diremo i  $\lambda_k^{(n)}$  e i  $\bar{\lambda}_i^{(m)}$  delle (16) i numeri di COTES della quadratura.

Siamo ora in grado di dimostrare il teorema enunciato. Infatti la (7) sarà dimostrata se proviamo la validità delle (12) e (13). La (15) ci assicura subito la validità della (12). Per provare la (13) basterà ricordare che i numeri di COTES dati dalle (16) sono nel nostro caso, cioè nella ipotesi che il sistema di punti fondamentali sia costituito dagli zeri del polinomio di TCHEBYCHEFF di prima specie, non negativi <sup>(5)</sup>; quindi, ricordando che

$$\sum_k^n \lambda_k^{(n)}(x) \equiv 1,$$

$$\sum_k^n |\lambda_k^{(n)}| = \sum_k^n \lambda_k^{(n)} = \sum_k^n \int_{-1}^1 l_k^{(n)}(x) dx = \int_{-1}^1 \sum_k^n l_k^{(n)}(x) dx = \int_{-1}^1 1 \cdot dx = 2,$$

e ne segue il Teorema.

Vogliamo ora osservare che la validità del teorema precedente può essere estesa al caso più generale in cui i punti fondamentali dell'interpolazione siano gli zeri dei polinomi ultrasferici

$$(17) \quad P_n^{(\alpha)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} (1-x^2)^{-\alpha} \frac{d^n}{dx^n} [(1-x^2)^{\alpha+n}]$$

con

$$-1 < \alpha \leq 3/2.$$

I pesi del procedimento di quadratura sono allora i numeri di COTES

$$(18) \quad \lambda_k^{(n)} = \int_{-1}^1 \frac{P_n^{(\alpha)}(x)}{(x-x_k)P_n^{(\alpha)'(x_k)}} dx$$

<sup>(4)</sup> E. FELDHEIM, *Théorie de la convergence de procédés d'interpolation et de quadrature mécanique*, Mém. Sci. Math. 45, Paris 1939 (cfr. p. 67).

<sup>(5)</sup> L. FEJÉR, *Mechanische Quadraturen mit positiven Coteschen Zahlen*, Math. Z. 37 (1933), 296-299.

e tenendo conto che essi sono positivi per  $n$  sufficientemente grande per  $-1 < \alpha \leq 3/2$  e sempre positivi per  $-1 < \alpha \leq 0$  ed  $1/2 \leq \alpha \leq 1$  <sup>(6)</sup>, si ha ancora la (7).

### S u m m a r y .

*A convergent process, for mechanical quadratures in two variables, is given.*

\* \* \*

---

<sup>(6)</sup> G. SZEGÖ, *Orthogonal Polynomials*, Amer. Math. Soc. Coll. Publ., Vol. 23 (1959) (cfr. pp. 352-355).

