Riv. Mat. Univ. Parma (2) 6 (1965), 103-116

CORRADO SCARAVELLI (*)

Su i polinomi di Appell. (**)

Introduzione.

Nella presente Nota mi occupo di una classe, assai estesa e ormai classica, di polinomi in una variabile: i cosiddetti *polinomi di Appell*, aventi come casi particolari i polinomi di BERNOULLI e i polinomi di EULER. Si ha una successione di polinomi di APPELL, in una variabile x, in corrispondenza di ogni successione di quantità indipendenti da x. L'importanza di tali successioni di polinomi dipende dal fatto che esse sono una naturale generalizzazione della successione x^n ($n = 0, 1, 2, \ldots$) delle potenze (con esponenti interi non negativi) della variabile x.

Qui, dapprima (cfr. § 1), richiamo la definizione di questi polinomi ed indico un simbolismo assai utile per rappresentarli, poi (cfr. § 2), espongo e provo in modo assai semplice (senza fare ricorso a delle serie) le principali proprietà di tali polinomi. Il lavoro si chiude (cfr. § 3) con una estesa bibliografia che intendo sfruttare in successive ricerche.

§ 1. - Prime nozioni.

1.1. - Definizione.

Detta x una variabile indipendente (reale o complessa) e fissata una qualsiasi successione di quantità, indipendenti da x,

$$a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots, \tag{1}$$

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università, Parma, Italia.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del Gruppo di Ricerca n. 40 del Comitato per la Matematica del C.N.R., per l'anno 1964-65. – Ricevuto il 15-X-1965.

si chiama «*successione di polinomi di Appell*, nella variabile x, relativa alla successione (1)» la successione seguente:

$$
(2) \qquad \begin{cases}
A_0(x) \equiv a_0 \\
A_1(x) \equiv a_0\, x + a_1 \\
A_2(x) \equiv a_0\, x^2 + 2a_1\, x + a_2 \\
A_3(x) \equiv a_0\, x^3 + 3a_1\, x^2 + 3a_2\, x + a_3 \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
A_n(x) \equiv \begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} a_0\, x^n + \begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} a_1\, x^{n-1} + \begin{bmatrix} n \\ 2 \end{bmatrix} a_2\, x^{n-2} + \dots + \begin{bmatrix} n \\ n-1 \end{bmatrix} a_{n-1}\, x + \begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix} a_n \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots ,
\end{cases}
$$

dove appare chiaramente come sono distribuiti i termini della successione (1) nei vari polinomi: in $A_0(x)$ compare solo a_0; in $A_1(x)$ compaiono solo a_0, a_1; in $A_2(x)$ compaiono solo a_0, a_1, a_2; e così via; in generale in $A_n(x)$ compaiono solo a_0, a_1, a_2, ..., a_n; e così via. Precisamente, nel passaggio da $A_{n-1}(x)$ ad $A_n(x)$ entra la nuova quantità a_n non figurante nei polinomi precedenti.

Più concisamente, la successione (2) si può scrivere:

$$
(2') \qquad A_n(x) \equiv \sum_0^n {}_r \begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} a_r\, x^{n-r} \qquad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \dots),
$$

dove s'intenda che la potenza x^{n-r} quando è $r = n$ sia sempre eguale ad 1, anche quando diventa 0^0 (perchè è inoltre $x = 0$).

Si ha, pertanto (come ho già affermato nella Introduzione), una successione di polinomi di Appell, in una variabile x, in corrispondenza di ogni successione (1) di quantità indipendenti da x. Per tale ragione la (1) si dirà «*la successione generatrice* (o più semplicemente *la generatrice*) dei polinomi $A_n(x)$, [o del polinomio $A_n(x)$]». Abbiamo quindi che *una successione di polinomi di Appell è data quando è data la sua successione generatrice.* In particolare, se la successione (1) è quella dei numeri di Bernoulli

$$
B_0 = 1,\ B_1 = -\frac{1}{2},\quad B_2 = \frac{1}{6},\ B_3 = 0,\ B_4 = -\frac{1}{30},\ B_5 = 0,\ B_6 = \frac{1}{42},\ \dots,
$$

la successione (2) è quella dei polinomi di Bernoulli; se la successione (1) è quella dei numeri di EULER

$$E_0 = 1,\ E_1 = 0,\ E_2 = -1,\ E_3 = 0,\ E_4 = 5,\ E_5 = 0,\ E_6 = -61,\ \ldots,$$

la successione (2) è quella dei polinomi di EULER.

1.2. - Alcune osservazioni.

Gli $A_n(x)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ sono stati chiamati « polinomi di APPELL » in quanto fu l'APPELL che li studiò per primo nel 1880 (cfr. [4]) [1].

$A_n(x)$ si dice « il polinomio di APPELL *di indice* n ». Tale polinomio è sempre *di grado* $\leqslant n$, ed è proprio di grado n se e solo se $a_0 \neq 0$.

È interessante notare che, detta a una quantità determinata indipendente da x, i polinomi $A_n(x)$ sono una generalizzazione dei polinomi

$$(3) \qquad (a + x)^n \equiv \sum_0^n{}_r \begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} a^r x^{n-r} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Precisamente, la (3) è la successione dei polinomi di APPELL avente per successione generatrice le potenze

$$(4) \qquad a^0 = 1, \quad a^1 = a, \quad a^2, \quad \ldots, \quad a^n, \ldots .$$

Nel caso particolare $a = 0$, la successione dei polinomi (3) diventa la successione delle potenze della variabile x:

$$(3') \qquad 1,\ x,\ x^2,\ \ldots,\ x^n,\ \ldots$$

e la successione (4) si riduce alla successione

$$(4') \qquad 1,\ 0,\ 0,\ \ldots,\ 0,\ \ldots .$$

Aggiungiamo che si usa chiamare « *serie generatrice* dei polinomi $A_n(x)$ » la serie (convergente o no)

$$(5) \qquad \sum_0^\infty{}_n A_n(x) \frac{t^n}{n!}$$

---

[1] Sembra che tale denominazione sia da attribuire al PINCHERLE (cfr. [32], p. 130).

che si ottiene moltiplicando formalmente, secondo la regola di CAUCHY, le due serie

$$(6) \qquad \sum_0^\infty{}_n\, a_n \frac{t^n}{n!}, \qquad \sum_0^\infty{}_n\, x^n \frac{t^n}{n!} \equiv e^{xt}.$$

Qualora la prima delle serie (6) risulti convergente, detta $f(t)$ la sua somma, si dice che

$$f(t)\, e^{xt}$$

è « *la funzione generatrice* dei polinomi $A_n(x)$ ».

1.3. - Simbolismo.

Come esprimere brevemente un polinomio di APPELL mediante la successione generatrice $\{a_n\}$ e la variabile x ?

La risposta può essere subito ispirata dalla successione (3) di polinomi di APPELL, che si ottiene materialmente dalla successione (2) mutando a_r in a^r: ciò ha condotto a porre

$$A_n(x) \equiv (a + x)^n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

aggiungendo di intendere il secondo membro « in senso simbolico » (vale a dire, dopo avere sviluppata la potenza del binomio $a + x$, si deve sostituire ogni potenza a^r con a_r).

Si può, però, evitare l'uso di una scrittura simbolica (che può dare luogo ad inconvenienti), introducendo una notazione della cosiddetta « Algebra delle successioni » ([2]). In base a quest'Algebra si pone

$$(7) \qquad A_n(x) = a_n \overset{n}{\cdot} x^n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

dove l'operazione indicata nel secondo membro è stata chiamata « *moltiplicazione binomiale* delle successioni ». Il secondo membro di (7) si legge:

« a_n moltiplicato, binomialmente n, per x^n », o più brevemente « a_n per (binomiale n) x^n ».

Si verifica facilmente che tale moltiplicazione binomiale gode delle proprietà commutativa e associativa, ossia, dette

$$b_0,\ b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_n,\ \ldots; \qquad c_0,\ c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_n,\ \ldots$$

([2]) A. MAMBRIANI, *Sull'Algebra delle successioni*, Ann. Mat. Pura Appl.: (4) 8 (1930), 103-139 (Mem. I); (4) 9 (1931), 25-56 (Mem. II).

altre due successioni, si ha

$$a_n \overset{n}{\cdot} b_n = b_n \overset{n}{\cdot} a_n, \qquad (a_n \overset{n}{\cdot} b_n) \overset{n}{\cdot} c_n = a_n \overset{n}{\cdot} (b_n \overset{n}{\cdot} c_n).$$

Nel seguito userò per i polinomi di APPELL il simbolo indicato in (7).

1.4. - Esempi semplici.

1°) Essendo a una costante, abbiamo:

$$a^n \overset{n}{\cdot} x^n \equiv (a+x)^n.$$

2°) Si ha:

$$\frac{1^n + (-1)^n}{2} \overset{n}{\cdot} x^n \equiv \frac{(x+1)^n + (x-1)^n}{2}, \qquad \frac{1^n - (-1)^n}{2} \overset{n}{\cdot} x^n \equiv \frac{(x+1)^n - (x-1)^n}{2}.$$

3°) Poniamo, con l'Algebra delle successioni,

$$\ldots = \varepsilon_{-3} = \varepsilon_{-2} = \varepsilon_{-1} = 0, \qquad \varepsilon_0 = 1, \qquad 0 = \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \ldots,$$

e consideriamo le successioni seguenti

$$\varepsilon_n \, (n = 0, 1, 2, \ldots), \qquad \varepsilon_{n-1} \, (n = 0, 1, 2, \ldots), \qquad \varepsilon_{n-2} \, (n = 0, 1, 2, \ldots), \qquad \ldots,$$

ossia estesamente le successioni [3]:

$$\begin{cases} 1, \ 0, \ 0, \ 0, \ \ldots, \ \varepsilon_n, \ \ldots \\ 0, \ 1, \ 0, \ 0, \ \ldots, \ \varepsilon_{n-1}, \ \ldots \\ 0, \ 0, \ 1, \ 0, \ \ldots, \ \varepsilon_{n-2}, \ \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

I polinomi di APPELL aventi ordinatamente queste successioni generatrici sono allora:

$$\varepsilon_n \overset{n}{\cdot} x^n \equiv x^n, \qquad \varepsilon_{n-1} \overset{n}{\cdot} x^n \equiv n\, x^{n-1}, \qquad \varepsilon_{n-2} \overset{n}{\cdot} x^n \equiv \begin{bmatrix} n \\ 2 \end{bmatrix} x^{n-2}, \qquad \ldots \tag{8}$$

---

(3) Esse sono le cosiddette *successioni unitarie* dell'Algebra delle successioni [cfr. loc. cit. in (2)].

4°) Risulta

$$n \overset{n}{:} x^n \equiv n(x+1)^{n-1},$$

$$n^2 \overset{n}{:} x^n \equiv n(x+1)^{n-1} + n(n-1)(x+1)^{n-2}.$$

5°) Abbiamo:

$$\frac{h^{n+1}}{n+1} \overset{n}{:} x^n \equiv \frac{(x+h)^{n+1} - x^{n+1}}{n+1} = \int_x^{x+h} t^n \, dt\,.$$

§ 2. - Principali proprietà.

2.1. - Combinazione lineare di polinomi di Appell.

1°) *Una combinazione lineare, con coefficienti costanti rispetto alle variabili n e x, di dati polinomi di Appell, è un polinomio di Appell la cui generatrice è la combinazione lineare, ordinatamente con le stesse costanti, delle generatrici dei dati polinomi di Appell.*

Cioè, essendo

$$A_{1,n}(x) \equiv a_{1,n} \overset{n}{:} x^n, \qquad \ldots, \qquad A_{p,n}(x) \equiv a_{p,n} \overset{n}{:} x^n$$

dati polinomi di Appell, e $c_1, \ldots, c_p$ date costanti rispetto a n e x, si ha:

$$c_1\, (a_{1,n} \overset{n}{:} x^n) + \ldots + c_p\, (a_{p,n} \overset{n}{:} x^n) = (c_1\, a_{1,n} + \ldots + c_p\, a_{p,n}) \overset{n}{:} x^n. \tag{9}$$

Infatti, dalla definizione (2′) di polinomio di Appell segue facilmente che è

$$c_1\, (a_{1,n} \overset{n}{:} x^n) = (c_1\, a_{1,n}) \overset{n}{:} x^n\,,$$

e inoltre

$$(a_{1,n} \overset{n}{:} x^n) + (a_{2,n} \overset{n}{:} x^n) = (a_{1,n} + a_{2,n}) \overset{n}{:} x^n,$$

e quindi in generale la (9).

2°) È utile notare ancora che si ha, essendo k una costante rispetto a n e x,

$$k^n\, (a_n \overset{n}{:} x^n) = (k^n\, a_n) \overset{n}{:} (k^n\, x^n) = (k^n\, a_n) \overset{n}{:} (k\, x)^n, \tag{10}$$

dove l'ultimo membro è un polinomio di Appell della variabile $\xi = k\, x$.

2.2. - Derivazione dei polinomi di Appell.

1°) *Derivando (rispetto alla variabile x) i polinomi di una successione di polinomi di Appell*

$$A_n(x) = a_n \overset{n}{\cdot} x^n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

si ottiene una nuova successione di polinomi di Appell, e precisamente la successione

$$A'_n(x) = na_{n-1} \overset{n}{\cdot} x^n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots), \tag{11}$$

intendendo che sia $na_{n-1} = 0$ per $n = 0$. Inoltre è

$$A'_n(x) = n\, A_{n-1}(x) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)\ (4), \tag{12}$$

intendendo che sia $nA_{n-1}(x) = 0$ per $n = 0$.

Infatti, si ha $A'_n(x) = a_n \overset{n}{\cdot} nx^{n-1}$, ma è [cfr. la seconda delle (8)] $n\, x^{n-1} = \varepsilon_{n-1} \overset{n}{\cdot} x^n$, onde

$$A'_n(x) = a_n \overset{n}{\cdot} (\varepsilon_{n-1} \overset{n}{\cdot} x^n)\,. \tag{13}$$

Applicando ora la proprietà associativa e commutativa della moltiplicazione binomiale delle successioni (cfr. n. **1.3**), la (13) si può scrivere

$$A'_n(x) = (\varepsilon_{n-1} \overset{n}{\cdot} a_n) \overset{n}{\cdot} x^n, \tag{13'}$$

ossia proprio la (11) in quanto si trova subito che è

$$\varepsilon_{n-1} \overset{n}{\cdot} a_n = n\, a_{n-1} \qquad \text{con } n\, a_{n-1} = 0 \text{ per } n = 0\,.$$

D'altra parte, la (13') per la proprietà associativa della moltiplicazione bino-

(4) Osserviamo che, posto $\mathcal{A}_n(x) = \dfrac{1}{n!} A_n(x)$, la (12) prende la forma

$$\mathcal{A}'_n(x) = \mathcal{A}_{n-1}(x)\,. \tag{12'}$$

Ciò a generalizzazione di

$$\left(\frac{x^n}{n!}\right)' = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\,.$$

miale delle successioni si può scrivere

$$A_n'(x) = \varepsilon_{n-1} \overset{n}{\cdot} (a_n \overset{n}{\cdot} x^n) = \varepsilon_{n-1} \overset{n}{\cdot} A_n(x)\,,$$

da cui segue subito la (12), intendendo sia $nA_{n-1}(x) = 0$ per $n = 0$.

2°) *Condizione necessaria e sufficiente affinchè una successione di polinomi* $A_n(x)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ *sia una successione di polinomi di* A p p e l l, *è che si abbia*:

$$(14) \qquad A_n(x) \textit{ di grado } \leqslant n, \qquad A_n'(x) = n\, A_{n-1}(x), \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

D i m o s t r a z i o n e.

La condizione (14) è *necessaria*. Infatti, per una successione (2′) di polinomi di Appell la prima delle (14) è soddisfatta e pure è soddisfatta la seconda delle (14) come afferma la (12).

La condizione (14) è *sufficiente*. Infatti, sia $A_n(x)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ una data successione di polinomi pei quali vale (14). Poichè $A_0(x)$ deve essere di grado zero, sarà $A_0(x) = c_0$, con c_0 costante (rispetto ad x). Per $A_1(x)$ è poi $A_1'(x) = A_0(x)$, ossia $A_1'(x) = c_0$, da cui (integrando) $A_1(x) = c_0\, x + c_1$, con c_1 costante (rispetto ad x). Per $A_2(x)$ è $A_2'(x) = 2A_1(x)$, ossia $A_2'(x) = 2c_0\, x + 2c_1$, da cui (integrando) $A_2(x) = c_0\, x^2 + 2c_1\, x + c_2$, con c_2 costante (rispetto ad x). Analogamente, per $A_3(x)$ è $A_3'(x) = 3A_2(x)$, ossia $A_3'(x) = 3c_0\, x^2 + 6c_1\, x + 3c_2$, da cui (integrando) $A_3(x) = c_0\, x^3 + 3c_1\, x^2 + 3c_2\, x + c_3$, con c_3 costante (rispetto ad x). Si constata dunque che

$$A_0(x), \qquad A_1(x), \qquad A_2(x), \qquad A_3(x)$$

sono proprio i primi quattro polinomi di una successione di polinomi di Appell. Ragionando ora induttivamente, suppongo che ciò continui a verificarsi fino al polinomio $A_{n-1}(x)$, cioè che sia

$$A_{n-1}(x) = \sum_0^{n-1}{}_r \begin{bmatrix} n-1 \\ r \end{bmatrix} c_r\, x^{(n-1)-r}.$$

Segue allora

$$A_n'(x) = n\, A_{n-1}(x) = n \sum_0^{n-1}{}_r \begin{bmatrix} n-1 \\ r \end{bmatrix} c_r\, x^{(n-1)-r},$$

ed integrando

$$A_n(x) = n \sum_0^{n-1}{}_r \begin{bmatrix} n-1 \\ r \end{bmatrix} c_r \frac{x^{n-r}}{n-r} + c_n\,,$$

con c_n costante (rispetto ad x), ossia proprio

$$A_n(x) = \sum_0^n r \begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} c_r\, x^{n-r} = c_n \overset{n}{:} x^n.$$

La proposizione enunciata è quindi dimostrata.

2.3. - Polinomi di Appell di generatrici le successioni-resto della generatrice di un dato polinomio di Appell.

Premetto che, data una successione

$$\{a_n\} \qquad a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ \dots,$$

si chiamano « *successioni-resto* della $\{a_n\}$, di indici 1, 2, 3, ... » ordinatamente le successioni

$$\begin{array}{r} a_1,\quad a_2,\quad a_3,\quad a_4,\quad \dots, \\ a_2,\quad a_3,\quad a_4,\quad \dots, \\ a_3,\quad a_4,\quad \dots, \\ \dots\dots\dots\dots, \end{array}$$

successioni di termini generali rispestivamente a_{1+n}, a_{2+n}, a_{3+n}, ... (volendo che la variabile n parta sempre dal valore zero).

Nelle applicazioni, accanto a un polinomio di APPELL $A_n(x) = a_n \overset{n}{:} x^n$, è utile considerare i polinomi di APPELL (tutti di grado $\leqslant n$)

$$(15) \qquad {}_rA_n(x) = a_{r+n} \overset{n}{:} x^n \qquad (r = 1,\ 2,\ 3,\ \dots)$$

aventi per generatrici le varie successioni-resto della generatrice di $A_n(x)$. I polinomi (15) si diranno « *i polinomi-resto* del polinomio di APPELL $A_n(x)$ ». Abbiamo ora:

I polinomi-resto di ${}_rA_n(x)$ di un polinomio di Appell $A_n(x)$ si esprimono tutti semplicemente mediante i polinomi della successione

$$A_0(x),\quad A_1(x),\quad A_2(x),\quad \dots,\quad A_n(x),\quad \dots;$$

precisamente si ha

$$(16) \qquad {}_rA_n(x) = A_{r+n}(x) \overset{r}{\cdot} (-x)^r,$$

ossia

$$(16') \qquad {}_rA_n(x) = \sum_0^r{}_s (-1)^{r-s} \begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix} A_{s+n}(x)\, x^{r-s}.$$

Dimostrazione.

Detto brevemente $\varphi_{r,n}(x)$ il secondo membro di (16') e sostituendo in esso ad $A_{s+n}(x)$ la sua espressione, si ha

$$\varphi_{r,n}(x) = \sum_0^r{}_s (-1)^{r-s} \begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix} \left\{ \sum_0^{s+n}{}_\nu \begin{bmatrix} s+n \\ \nu \end{bmatrix} a_\nu\, x^{s+n-\nu} \right\} x^{r-s} =$$

$$= \sum_0^r{}_s (-1)^{r-s} \begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix} \sum_0^{s+n}{}_\nu \begin{bmatrix} s+n \\ \nu \end{bmatrix} a_\nu\, x^{r+n-\nu}.$$

Invertendo qui, nell'ultimo membro, l'ordine delle sommazioni, si ottiene

$$\varphi_{r,n}(x) = \sum_0^{r+n}{}_\nu a_\nu\, x^{r+n-\nu} \sum_0^r{}_s (-1)^{r-s} \begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+n \\ \nu \end{bmatrix}.$$

Essendo poi

$$\sum_0^r{}_s (-1)^{r-s} \begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+n \\ \nu \end{bmatrix} = \begin{cases} 0 & \text{per } \nu = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ r-1 \\ \begin{bmatrix} n \\ \nu - r \end{bmatrix} & \text{per } \nu = r,\ r+1,\ r+2,\ \ldots, \end{cases}$$

si ha più semplicemente

$$\varphi_{r,n}(x) = \sum_r^{r+n}{}_\nu \begin{bmatrix} n \\ \nu - r \end{bmatrix} a_\nu\, x^{n-(\nu-r)},$$

od anche, ponendo $\nu - r = \mu$,

$$\varphi_{r,n}(x) = \sum_0^n{}_\mu \begin{bmatrix} n \\ \mu \end{bmatrix} a_{r+\mu}\, x^{n-\mu} = a_{r+n} \overset{n}{\cdot} x^n,$$

dove l'ultimo membro è proprio l'espressione di ${}_rA_n(x)$ data da (15). La (16'), cioè la (16), è così dimostrata.

In particolare da (16') si ha:

$$ {}_1A_n(x) = a_{1+n} \overset{n}{\cdot} x^n = A_{n+1}(x) - x\, A_n(x), $$

$$ {}_2A_n(x) = a_{2+n} \overset{n}{\cdot} x^n = A_{n+2}(x) - 2x\, A_{n+1}(x) + x^2\, A_n(x), $$

$$ {}_3A_n(x) = a_{3+n} \overset{n}{\cdot} x^n = A_{n+3}(x) - 3x\, A_{n+2}(x) + 3x^2\, A_{n+1}(x) - x^3\, A_n(x)\,. $$

§ 3. - Bibliografia.

[1] W. A. Al-Salam, *Some characterizations of the Laguerre and Hermite polynomials.* Michigan Math. J. **10** (1963), 381-383.

[2] A. Angelescu, *Sur les polynomes orthogonaux en rapport avec d'autres polynomes.* Bul. Soc. Stünte, Cluj. **1** (1921), 44-59.

[3] A. Angelescu, *Sur certains polynomes généralisant les polynomes de Laguerre.* C. R. Acad. Sci. Roumanie (3) **2** (1938), 199-201.

[4] P. Appell, *Sur une classe de polynomes.* Ann. École Norm. Sup. (Paris) (2) **9** (1880), 119-144.

[5] P. Appell, *Sur des polynomes qui se rattachent aux intégrales eulériennes.* C. R. Acad. Sci. Paris, **178** (1924), 157-161.

[6] P. Appell, *Quelques intégrales définies se rattachant à la constante d'Euler.* Acta Math. **45** (1925), 287-302.

[7] R. Badescu, E. Dumitrescu, C. Saulescu, *Asupra unei equatii diferentiale de ordinul n.* Bul. Inst. Politehn. Bucuresti (5) **25** (1963), 29-41.

[8] R. Badescu, E. Dumitrescu, C. Saulescu, *Sur une équation différentielle linéaire à coefficients variables.* L'Enseignement Math. (2) **11** (1965), 126-136.

[9] E. T. Bell, *A class of polynomials and rational functions in four variables.* Amer. J. **51** (1929), 329-344.

[10] E. T. Bell, *Exponential polynomials.* Ann. of Math. **35** (1934), 258-277.

[11] K. P. Bhatnagar, *On the polynomial $\pi_n(x)$.* Proc. Indian Acad. Sci. Sect. A **34** (1951), 41-42.

[12] R. P. Boas, *Exponential transforms and Appell polynomials.* Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **34** (1948), 481-483.

[13] R. P. Boas, *Entire functions.* Academic Press, New York 1954. (Cfr. in particolare pp. 245-247).

[14] R. P. Boas, R. C. Buck, *Polynomials defined by generating relations.* Amer. Math. Monthly. **63** (1956), 626-632.

[15] R. P. Boas, R. C. Buck, *Polynomial expansions of analytic functions.* Ergebnisse der Mathematik **19**, Springer-Verlag, Berlin 1958. (Cfr. in particolare pp. 17-21, 28-33).

[16] L. Carlitz, *The multiplication formulas for the Bernoulli and Euler polynomials.* Math. Mag. **27** (1953), 59-64.

[17] L. Carlitz, *A note on the multiplication formulas for the Bernoulli and Euler polynomials.* Proc. Amer. Math. Soc. **4** (1953), 184-188.

[18] L. Carlitz, *Products of Appell polynomials.* Coll. Math. (3) **15** (1963), 245-258.

[19] F. Ceschino, *Sur une propriété de certains polynomes d'Appell.* Ann. Soc. Sci. Bruxelles. (1) **64** (1950), 154-155.

[20] E. Feldheim, *Formules d'inversion et autres relations pour les polynomes orthogonaux classiques.* Bull. Soc. Math. France **68** (1940), 199-228. (Cfr. in particolare pp. 223-226).

[21] J. Geronimus, *On some persymmetric determinants formed by the polynomials of P. Appell.* J. London Math. Soc. **6** (1931), 55-59.

[22] J. Geronimus, *On a problem of J. Shohat.* Amer. J. Math. **54** (1932), 85-91.

[23] J. Geronimus, *On a class of Appell polynomials.* Communications Khakoff (4) **8** (1934), 13-23.

[24] J. Geronimus, *The orthogonality of some systems of polynomials.* Duke Math. J. **14** (1947), 503-510.

[25] J. Geronimus, *On certain polynomials of Steffensen.* Doklady Akad. Nauk SSSR. (N. S.) **69** (1949), 721-724.

[26] P. Humbert, *Sur deux polynomes associés aux polynomes de Legendre.* Bull. Soc. Math. France **46** (1918), 120-151.

[27] P. Humbert, *Sur une classe de polynomes.* C. R. Acad. Sci. Paris **178** (1924), 366-367.

[28] M. Mallet, *Les suites isogènes.* Houille Blanche **5** (1950), 7-14.

[29] A. Mambriani, *Saggio di una nuova trattazione dei numeri e dei polinomi di Bernoulli e di Euler.* Mem. Accad. Italia, Classe Scienze Fis. Mat. Nat. **3** (1932), N. 4, 1-36.

[30] N. Nielsen, *Note sur une formule de M. Appell.* Nieuw Archief (2) **10** (1912), 154-160.

[31] V. B. Ozegov, *Some extremal properties of generalized Appell polynomials.* Dokl. Akad. Nauk SSSR **159** (1964), 958-987.

[32] S. Pincherle, *Le operazioni distributive.* N. Zanichelli, Bologna 1901 (cfr. in particolare pp. 130-139).

[33] T. Popoviciu, *Asupra polinoamelor cari formeaza un sir Appell*. I, II. Bull. Math. Soc. Sci. Roumanie **33-34** (1932), 11-21, 22-27.

[34] S. K. Rangarajan, *On some infinite series involving Appell polynomials and the functions $F(z, \alpha)$*. I. Proc. Indian Acad. Sci. Sect. A **60** (1964), 153-158.

[35] S. K. Rangarajan, *Generating functions for Gegenbauer and Legendre polynomials: Some generalizations*. I. Proc. Indian Acad. Sci. Sect. A **61** (1965), 41-49.

[36] I. M. Sheffer, *Expansions in generalized Appell polynomials, and a class of related linear functional equations*. Trans. Amer. Math. Soc. **31** (1929), 261-280.

[37] I. M. Sheffer, *A differential equation for Appell polynomials*. Bull. Amer. Math. Soc. **41** (1935), 914-923.

[38] I. M. Sheffer, *Concerning Appell sets and associated linear functional equations*. Duke Math. J. **3** (1937), 593-609.

[39] I. M. Sheffer, *Some properties of polynomial sets of type zero*. Duke Math. J. **5** (1939), 590-622.

[40] I. M. Sheffer, *Some applications of certain polynomial classes*. Bull. Amer. Math. Soc. **47** (1941), 885-898.

[41] I. M. Sheffer, *Note on Appell polynomials*. Bull. Amer. Math. Soc. **51** (1945), 739-744.

[42] J. Shohat, *The relation of the classical orthogonal polynomials to the polynomials of Appell*. Amer. J. Math. **58** (1936), 453-464.

[43] R. P. Singh, *Some polynomials of Srivastava related to the Laguerre polynomials*. Math. Japon. **9** (1964), 5-9.

[44] Vikramaditya Singh, *Appell set of polynomials*. Proc. Nat. Inst. Sci. India **20** (1954), 341-347.

[45] Vikramaditya Singh, *Appell polynomials of large order*. J. London Math. Soc. **30** (1955), 475-479.

[46] Vikramaditya Singh, *On the orthogonal sub-set of Appell polynomials*. Proc. Nat. Inst. Sci. India, Part A **22** (1956), 26-31.

[47] R. C. T. Smith, *Generating functions of Appell form for the classical orthogonal polynomials*. Proc. Amer. Math. Soc. **7** (1956), 639-641.

[48] J. F. Steffensen, *On a class of polynomials*. Mat. Tidsskr. B. (1945), 10-14.

[49] J. F. Steffensen, *On the polynomials $R_\nu^{[\lambda]}(x)$, $N_\nu^{[\lambda]}(x)$ and $M_\nu^{[\lambda]}(x)$*. Acta Math. **78** (1946), 291-314.

[50] J. Steinberg, *Application de la théorie des suites d'Appell à une classe d'équations intégrales*. Bull. Res. Council Israel. Sect. F **7F** (1957-58), 55-68.

[51] J. STEINBERG, *Classes of biorthonormal systems*, I. Ann. Mat. Pura Appl. (4) **52** (1960), 183-218.

[52] J. STEINBERG, *Classes of biorthonormal systems*, II. Ann. Mat. Pura Appl. (4) **59** (1962), 285-318.

[53] C. J. THORNE, *A property of Appell sets.* Amer. Math. Monthly **52** (1945), 191-193.

[54] L. TOSCANO, *Polinomi ortogonali o reciproci di ortogonali nella classe di Appell.* Matematiche, Catania **11** (1956), 168-174.

[55] J. TOUCHARD, *Sur une propriété des polynomes orthogonaux.* C. R. Acad. Sci. Paris **232** (1951), 2279-2281.

[56] R. S. VARMA, *On Appell polynomials.* Proc. Amer. Math. Soc. **2** (1951), 593-596.

Sommario.

Questo lavoro si occupa delle classiche successioni di polinomi di Appell: dapprima si richiama la definizione di tali polinomi e se ne indica un utile simbolismo; indi si dànno dimostrazioni, in forma elementare, delle loro principali proprietà. Segue una estesa Bibliografia.

Summary.

This paper deals with the classical Appell polynomials. After recalling a definition for such polynomials, a useful symbolism is suggested and some of their main properties are proved in an elementary way. The work ends with an extensive Bibliography.

* * *