Riv. Mat. Univ. Parma (2) 6 (1965), 147-162

ARISTIDE SANINI (*)

Rette linearizzanti e loro applicazioni alle trasformazioni puntuali di 2ª e di 3ª specie fra piani. (**) (1)

1. - Premessa.

Le trasformazioni puntuali di 2ª e 3ª specie tra piani sono state classificate da L. MURACCHINI [6] (2) mediante il metodo del riferimento mobile e poi rispettivamente da F. SPERANZA [7] e da M. VILLA [11] usufruendo della corrispondenza linearizzante relativa alla trasformazione ed alle trasformazioni quadratiche osculatrici ad essa.

Nella presente Nota completo i significati geometrici (e non mi risulta che essi siano già noti) dei riferimenti rispetto ai quali la trasformazione assume le forme canoniche dei diversi tipi determinate dai detti Autori.

Raggiungo lo scopo mediante la caratterizzazione di $2s$ direzioni invarianti che, per il loro legame alla corrispondenza linearizzante, chiamo *rette linearizzanti* (n. 3), relative ad una coppia di punti corrispondenti nella quale due trasformazioni si approssimano fino all'ordine s.

In alcuni casi, per completare il significato geometrico dei riferimenti, utilizzo, oltre alle rette linearizzanti, alcune semplici configurazioni geometriche relative alla trasformazione puntuale.

Usufruisco inoltre delle dette rette per caratterizzare (n. 4) alcune tra le proiettività tangenti ad una data trasformazione.

2. – Data una trasformazione puntuale T_1 tra i piani $\pi(x, y)$ e $\bar{\pi}(\bar{x}, \bar{y})$, regolare nella coppia di punti corrispondenti $O(0, 0)$ ed $\bar{O}(0, 0)$, sia T_2 una

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Politecnico, Torino, Italia.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito del Gruppo di Ricerca n. 11 del C. N. R. per l'anno 1963-64. — Ricevuto: 29-XII-1964.

(1) Alcuni risultati di questa Nota sono contenuti nella mia Tesi di Laurea.

(2) I numeri tra [ ] si riferiscono alla Bibliografia che trovasi al termine della Nota.

trasformazione puntuale che approssimi T_1 nella detta coppia fino all'intorno d'ordine $s \geqslant 1$.

Supposto che il riferimento nel fascio di rette di centro $\overline{O}$ sia il corrispondente del riferimento in O in una proiettività K tangente a T_1 e T_2, siano queste rappresentate dalle equazioni:

$$(2.1)\quad T_1 : \begin{cases} \bar{x} = \alpha\, x + \varphi_2(x, y) + \ldots + \varphi_s(x, y) + \varphi_{1,s+1}(x, y) + \varphi_{1,s+2}(x, y) + [s+3] \\ \bar{y} = \alpha\, y + \psi_2(x, y) + \ldots + \psi_s(x, y) + \psi_{1,s+1}(x, y) + \psi_{1,s+2}(x, y) + [s+3], \end{cases}$$

$$(2.2)\quad T_2 : \begin{cases} \bar{x} = \alpha\, x + \varphi_2(x, y) + \ldots + \varphi_s(x, y) + \varphi_{2,s+1}(x, y) + \varphi_{2,s+2}(x, y) + [s+3] \\ \bar{y} = \alpha\, y + \psi_2(x, y) + \ldots + \psi_s(x, y) + \psi_{2,s+1}(x, y) + \psi_{2,s+2}(x, y) + [s+3], \end{cases}$$

dove le

$$(2.3)\qquad \varphi_i\,(\psi_i), \qquad \varphi_{j,s+h}(\psi_{j,s+h}) \qquad (i = 2, \ldots, s; \quad j = 1, 2; \quad h = 1, 2, \ldots)$$

sono polinomi omogenei di grado rispettivamente i ed $s + h$ in x, y.

Considerato un ramo lineare l di origine O e tangente la retta $x/p = y/q$, riferito al parametro t,

$$(2.4)\qquad x = p\, t + p_2\, t^2 + \ldots, \qquad y = q\, t + q_2\, t^2 + \ldots,$$

siano $\overline{P}_1$ e $\overline{P}_2$ i corrispondenti rispettivamente in T_1 e T_2 di un punto $P(t)$ di l.

Ciò posto, scelto in $\bar{\pi}$ un generico punto $\overline{S}(\bar{p}, \bar{q})$, sia τ la corrispondenza che nel fascio di rette di centro $\overline{S}$ associa le rette $\overline{S}\overline{P}_1$, $\overline{S}\overline{P}_2$ di coefficienti angolari rispettivamente m_1, m_2.

Posto

$$(2.5)\qquad \varphi_{s+h} = \varphi_{2,s+h} - \varphi_{1,s+h}, \qquad \psi_{s+h} = \psi_{2,s+h} - \psi_{1,s+h}$$

e quindi

$$(2.6)\qquad A_{s+1} = \bar{q}\, \varphi_{s+1} - \bar{p}\, \psi_{s+1}\,,$$

$$(2.7)\quad A_{s+2} = \bar{q}\,(\varphi_{s+2} + p_2\, \partial_p \varphi_{s+1} + q_2\, \partial_q \varphi_{s+1}) - \bar{p}\,(\psi_{s+2} + p_2\, \partial_p \psi_{s+1} + q_2\, \partial_q \psi_{s+1}) + \\ + \alpha\,(p\, \psi_{s+1} - q\, \varphi_{s+1}),$$

si ha:

$$m_2 - m_1 = H(t)\{A_{s+1}\, t^{s+1} + A_{s+2}\, t^{s+2} + \dots\} \tag{2.8}$$

con $H(0) \neq 0$.

Segue che la corrispondenza τ è l'identità fino all'ordine s: essa coincide con l'identità fino all'ordine $s+1$ se e solo se $A_{s+1} = 0$, ossia se $\overline{S}$ appartiene alla retta $\bar{r}$ per $\overline{O}$ individuata da:

$$\varrho\, \bar{p} = \varphi_{s+1}(p,\ q), \qquad \varrho\, \bar{q} = \psi_{s+1}(p,\ q). \tag{2.9}$$

Se si considera la retta per O di parametri $\bar{p}$, $\bar{q}$, ossia la direzione per O corrispondente in K alla direzione $\bar{r}$, le (2.9) rappresentano la *corrispondenza linearizzante* di ČECH [5] e VILLA [10].

Le $s+2$ rette unite nella detta corrispondenza

$$p\, \psi_{s+1}(p,\ q) - q\, \varphi_{s+1}(p,\ q) = 0 \tag{2.10}$$

individuano le *direzioni d'iperosculazione* (³) di T_1, T_2 in $(O,\ \overline{O})$.

3. – La corrispondenza τ coincide con l'identità fino all'ordine $s+2$ se e solo se $\overline{S}$ è tale che: $A_{s+1} = A_{s+2} = 0$.

Tenute presenti le (2.6), (2.7) segue che il punto $\overline{S}$, che diremo *punto linearizzante*, ha le coordinate:

$$\bar{p} = \frac{\alpha\, (q\, \varphi_{s+1} - p\, \psi_{s+1})\, \varphi_{s+1}}{A}, \qquad \bar{q} = \frac{\alpha\, (q\, \varphi_{s+1} - p\, \psi_{s+1})\, \psi_{s+1}}{A}, \tag{3.1}$$

ove, posto

$$F_{2s}(p,\ q) = \frac{\partial(\varphi_{s+1},\ \psi_{s+1})}{\partial(p,\ q)} = \begin{vmatrix} \partial_p \varphi_{s+1} & \partial_p \psi_{s+1} \\ \partial_q \varphi_{s+1} & \partial_q \psi_{s+1} \end{vmatrix}, \tag{3.2}$$

si ha

$$A = \psi_{s+1}\, \varphi_{s+2} - \varphi_{s+1}\, \psi_{s+2} + \{1/(s+1)\}(q\, p_2 - p\, q_2)\, F_{2s}\,. \tag{3.3}$$

(³) Queste sono state introdotte da E. BOMPIANI [1] nel caso di una trasformazione T e di una trasformazione quadratica osculatrice ad essa e generalizzate da M. VILLA [9] nel caso di due trasformazioni qualsiasi T_1, T_2.

Si verifica facilmente che il punto linearizzante è indipendente dalla parametrizzazione scelta per la rappresentazione (2.4) di l.

Pertanto si può affermare che:

Considerato un generico E_2 di origine O, sulla retta corrispondente alla tangente all'E_2 nella corrispondenza linearizzante, esiste un punto linearizzante, distinto da $\overline{O}$, tale che la detta corrispondenza τ è l'identità fino all'intorno d'ordine $s+2$.

Inoltre:

La corrispondenza tra gli E_2 di un pennello ed i relativi punti linearizzanti è (in generale) *una proiettività.*

La (3.3) pone in evidenza che se la tangente all'E_2 è tale che

$$F_{2s}(p,\ q) = 0 \tag{3.4}$$

il punto linearizzante non varia al variare dell'E_2 nel pennello individuato dalla tangente, ossia:

Considerate due trasformazioni puntuali tra i piani π e $\overline{\pi}$, le quali si approssimino fino all'intorno d'ordine s, vi sono $2s$ direzioni per O ($\overline{O}$), che diremo direzioni linearizzanti, tali che il punto linearizzante non dipende dall'E_2 tangente ad esse.

4. - Considerata una coppia O, $\overline{O}$ di punti corrispondenti in una trasformazione puntuale T fra i piani π, $\overline{\pi}$, le due direzioni linearizzanti relative a T e ad una proiettività tangente permettono di caratterizzare alcune di queste proiettività.

Ricordiamo che, supposta la T di 1ª specie e scelto il riferimento individuato dalle tre direzioni inflessionali o caratteristiche, la T ha equazioni [**1**], [**8**]

$$\begin{cases} \overline{x} = \alpha x + a x^2 + (c-a)\, x y + [3] \\ \overline{y} = \alpha y + (c-b)\, x y + b y^2 + [3] \end{cases} \tag{4.1}$$

con $a+b-c \neq 0$ se T non è approssimabile da una proiettività fino all'intorno del 2° ordine.

Le due direzioni linearizzanti relative a T e ad una proiettività tangente $K(\lambda,\ \mu)$

$$\overline{x} = \frac{\alpha x}{1-\lambda x-\mu y}, \qquad \overline{y} = \frac{\alpha y}{1-\lambda x-\mu y}, \tag{4.2}$$

individuata dalla retta r:

$$1-\lambda x-\mu y=0\,, \tag{4.3}$$

di π corrispondente alla retta impropria di $\bar{\pi}$, sono date da:

$$(a-\alpha\lambda)(c-b-\alpha\lambda)x^2+2(a-\alpha\lambda)(b-\alpha\mu)\,xy+ \\ +(b-\alpha\mu)(c-a-\alpha\mu)\,y^2=0\,. \tag{4.4}$$

Le due direzioni (4.4) coincidono se e solo se:

$$(a+b-c)(a-\alpha\lambda)(b-\alpha\mu)(c-\alpha\lambda-\alpha\mu)=0. \tag{4.5}$$

Segue una nuova caratterizzazione delle direzioni inflessionali, in quanto si ha:

Le direzioni inflessionali sono le sole direzioni con cui possono coincidere le direzioni linearizzanti.

Inoltre:

Per ciascuna direzione inflessionale vi sono ∞^1 proiettività tangenti per le quali le direzioni linearizzanti coincidono con essa.

Le dette proiettività sono caratterizzate dalle rette (4.3) appartenenti rispettivamente ai fasci di centro $A(\alpha,\,0,\,a)$, $B(0,\,\alpha,\,b)$, $C(\alpha,\,\alpha,\,c)$ e sono tutte e sole le proiettività che subordinano sulla corrispondente direzione caratteristica la *proiettività caratteristica* [**1**], [**8**].

Le proiettività individuate rispettivamente dalle rette AB, BC, CA sono le sole proiettività tangenti le cui direzioni linearizzanti sono indeterminate.

Si verifica poi che:

Date due direzioni distinte, vi è una ed una sola proiettività tangente per la quale le direzioni linearizzanti coincidono con le due date direzioni.

In particolare le rette:

$$r_1)\qquad \alpha-(c-b)\,x-(c-a)\,y=0,$$

$$r_2)\qquad \alpha-(2a+b-c)\,x-(c-a)\,y=0,$$

$$r_3)\qquad \alpha-(c-b)\,x-(a+2b-c)\,y=0$$

individuano le proiettività K_1, K_2, K_3 le cui direzioni linearizzanti coincidono rispettivamente con le coppie di direzioni caratteristiche:

$$x\,y = 0, \qquad x\,(x - y) = 0, \qquad y\,(x - y) = 0\,.$$

Indicate con A', B', C' le intersezioni delle rette caratteristiche OA, OB, OC rispettivamente con le rette BC, CA, AB, le rette $A'B'$, $B'C'$, $C'A'$ individuano rispettivamente le proiettività K_1, K_2, K_3.

Se si scelgono A, B come punti impropri, C come punto unità U in π, si ha $a = b = 0$, $c = \alpha$; scelto poi il punto unità $\overline{U}$ in $\bar{\pi}$ nel corrispondente di U nella proiettività tangente individuata da AB, segue $\alpha = 1$.

Si perviene così alla forma canonica per la trasformazione puntuale T:

$$\text{(4.6)} \qquad \begin{cases} \bar{x} = x + x\,y + [3] \\ \bar{y} = y + x\,y + [3]\,. \end{cases}$$

Se invece si scelgono A', B' come punti impropri, C' come punto unità U in π, si ha $a = b = c = \alpha/2$; scelto il punto unità $\overline{U}$ di $\bar{\pi}$ come corrispondente di U nella proiettività tangente individuata da $A'B'$, segue $\alpha = 1$.

Si perviene allora alla forma canonica:

$$\text{(4.7)} \qquad \begin{cases} \bar{x} = x + (1/2)\,x^2 + [3] \\ \bar{y} = y + (1/2)\,y^2 + [3]\,. \end{cases}$$

Analogamente si potrebbero determinare le direzioni linearizzanti relative a T e ad una trasformazione quadratica osculatrice e caratterizzare alcune di queste trasformazioni.

5. - Supponiamo ora che T sia una trasformazione puntuale di 2ª specie e vediamo come la nozione di direzione linearizzante permetta di caratterizzare geometricamente i riferimenti che danno luogo alle già note forme canoniche.

Nella coppia O, $\overline{O}$ di punti corrispondenti, scelto il riferimento in $\overline{O}$ come il corrispondente del riferimento in O in una proiettività tangente e le rette $y = 0$, $x = 0$ come direzioni caratteristiche rispettivamente doppia e semplice, la T ha equazioni:

$$\text{(5.1)} \qquad \begin{cases} \bar{x} = \alpha\,x + a\,x^2 + b\,x\,y + \dfrac{1}{3!}\,(a_{30}\,x^3 + 3a_{21}\,x^2\,y + 3a_{12}\,x\,y^2 + a_{03}\,y^3) + [4] \\ \bar{y} = \alpha\,y + a\,x\,y + c\,y^2 + \dfrac{1}{3!}\,(b_{30}\,x^3 + 3b_{21}\,x^2\,y + 3b_{12}\,x\,y^2 + b_{03}\,y^3) + [4], \end{cases}$$

con $b \neq c$ se T non è approssimabile fino al 2° ordine da una proiettività. Le direzioni linearizzanti relative a T e ad una proiettività tangente $K(\lambda, \mu)$ di equazioni (4.2) sono date da

$$(a-\alpha\lambda)^2 x^2 + 2(a-\alpha\lambda)(c-\alpha\mu)\, x y + (b-\alpha\mu)(c-\alpha\mu)\, y^2 = 0. \tag{5.2}$$

Come nel caso delle trasformazioni di 1ª specie, vi sono due sistemi ∞^1 di proiettività $K(\lambda, \mu)$, individuate dalle rette (4.3) passanti rispettivamente per i punti $A(\alpha, 0, a)$, $B(0, \alpha, c)$, tali che le due direzioni linearizzanti (5.2) coincidono rispettivamente con le direzioni caratteristiche $y=0$, $x=0$.

Le dette proiettività subordinano sulle rispettive rette caratteristiche le proiettività caratteristiche e, scelti A, B come punti impropri, si ha $a=c=0$.

La proiettività K^* individuata dalla retta AB e quella individuata dalla retta AU_1 con $U_1(0, \alpha, b)$ sono le sole per le quali le direzioni linearizzanti sono indeterminate. Scelti U_1 come punto unità su $x=0$ e il corrispondente $\overline{U}_1$ di U_1 in K^* come punto unità su $\bar{x}=0$, si ha $\alpha=b=1$.

La (5.1) si scrive pertanto:

$$\left\{\begin{aligned} \bar{x} &= x + x y + \frac{1}{3!}(a_{30}x^3 + 3a_{21}x^2 y + 3a_{12} x y^2 + a_{03} y^3) + [4] \\ \bar{y} &= y + \frac{1}{3!}(b_{30}x^3 + 3b_{21}x^2 y + 3b_{12} x y^2 + b_{03} y^3) + [4]. \end{aligned}\right. \tag{5.3}$$

Caratterizziamo ora l'intorno del 3° ordine in modo che T sia di 2ª specie in ogni punto $O+\delta O = (\delta x, \delta y)$ dell'intorno del 1° ordine di O.

Le direzioni caratteristiche in $O+\delta O$ sono date dall'equazione

$$\alpha_0(\delta x, \delta y)\, m^3 + \alpha_1(\delta x, \delta y)\, m^2 + \alpha_2(\delta x, \delta y)\, m + b_{30}\,\delta x + b_{21}\,\delta y = 0,$$

la quale è equivalente ad un'equazione del tipo:

$$(\beta_0 m + \beta_1)^2 (\gamma_0 m + \gamma_1) = 0$$

(che per $\delta x = \delta y = 0$ si riduce ad $m^2 = 0$) se e solo se $b_{30} = b_{21} = 0$. Pertanto T si può scrivere (4)

$$\left\{\begin{aligned} \bar{x} &= x + x y + \frac{1}{3!}(a_{30}x^3 + 3a_{21}x^2 y + 3a_{12} x y^2 + a_{03} y^3) + [4] \\ \bar{y} &= y + \frac{1}{3!}(\phantom{a_{30}x^3 + 3a_{21}x^2 y +} 3b_{12} x y^2 + b_{03} y^3) + [4]. \end{aligned}\right. \tag{5.4}$$

---

(4) Cfr. [7], n. 3.

Le trasformazioni quadratiche osculatrici $T_{q,0}$ alla T sono date da:

$$\text{(5.5)} \quad \begin{cases} \bar{x} = \dfrac{x\{1 - u\,x - (v - 1)\,y\}}{1 - u\,x - v\,y + u\,x\,y} = x + x\,y + v\,x\,y^2 + [4] \\ \\ \bar{y} = \dfrac{y\,(1 - u\,x - v\,y)}{1 - u\,x - v\,y + u\,x\,y} = y - u\,x\,y^2 + [4]\,, \end{cases}$$

essendo

$$\text{(5.6)} \qquad 1 - u\,x - v\,y = 0$$

l'equazione della retta congiungente i punti base della $T_{q,o}$.

In relazione alla T e ad una $T_{q,o}$ si hanno:

a) la corrispondenza linearizzante γ:

$$\text{(5.7)} \quad \begin{cases} \varrho\,x' = a_{30}\,x^3 + 3a_{21}\,x^2\,y + 3(a_{12} - 2\,v)\,x\,y^2 + a_{03}\,y^3 \\ \varrho\,y' = \qquad\qquad\qquad\qquad 3(b_{12} + 2\,u)\,x\,y^2 + b_{03}\,y^3; \end{cases}$$

b) le direzioni d'iperosculazione:

$$\text{(5.8)} \quad y\left\{a_{30}\,x^3 + 3[a_{21} - (b_{12} + 2u)]x^2\,y + [3(a_{12} - 2\,v) - b_{03}]x\,y^2 + a_{03}\,y^3\right\} = 0;$$

c) le direzioni linearizzanti:

$$\text{(5.9)} \quad y\left\{2a_{30}\,(b_{12} + 2u)\,x^3 + [3a_{21}\,(b_{12} + 2u) + a_{30}\,b_{03}]\,x^2\,y + 2a_{21}\,b_{03}\,x\,y^2 + \right.$$
$$\left. + [b_{03}\,(a_{12} - 2\,v) - a_{03}\,(b_{12} + 2\,u)]\,y^3\right\} = 0$$

di cui una, come per le direzioni d'iperosculazione, coincide con la retta caratteristica doppia $y = 0$.

Esiste una ed una sola trasformazione quadratica osculatrice $T^*_{q,o}$ per cui due delle tre direzioni linearizzanti coincidono con le rette caratteristiche in O; per essa si ha:

$$\text{(5.10)} \qquad b_{12} + 2\,u = 0, \qquad a_{12} - 2\,v = 0.$$

Supposto $a_{30}\,a_{21}\,b_{03} \neq 0$, l'ulteriore direzione linearizzante è data da:

$$\text{(5.11)} \qquad a_{30}\,x + 2\,a_{21}\,y = 0.$$

Scelti i punti base di $T^*_{q,o}$ come punti impropri, si ha dalle (5.10): $b_{12} = a_{12} = 0$; scelto il punto unità sulla retta (5.11) segue: $a_{30} + 2\, a_{21} = 0$.

Risulta così completamente caratterizzato il riferimento rispetto al quale la generica trasformazione di 2ª specie assume la forma canonica:

$$\text{(5.12)} \qquad \begin{cases} \bar{x} = x + x\,y + a\,x^2\,(2\,x - 3\,y) + b\,y^3 + [4] \\ \bar{y} = y \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + c\,y^3 + [4]\,. \end{cases}$$

Le direzioni d'iperosculazione relative a $T^*_{q,o}$ dànno un significato geometrico dei tre invarianti a, b, c.

6. – Si ottengono casi particolari quando uno o più dei tre invarianti a, b, c è zero (5).

1) Tipo (2.a): $a_{30} = 0$.

Due direzioni sia d'iperosculazione che linearizzanti sono date da $y = 0$, mentre le altre due sono rispettivamente date da:

$$\text{(6.1)} \qquad 3\left\{a_{21} - (b_{12} + 2\,u)\right\}x^2 + \left\{3\,(a_{12} - 2\,v) - b_{03}\right\}x\,y + a_{03}\,y^2 = 0,$$

$$\text{(6.2)} \quad 3\,a_{21}\,(b_{12} + 2\,u)\,x^2 + 2\,a_{21}\,b_{03}\,x\,y + \left\{b_{03}\,(a_{12} - 2\,v) - a_{03}\,(b_{12} + 2\,u)\right\}y^2 = 0.$$

Esiste una $T^*_{q,o}$ per cui le direzioni linearizzanti coincidono con le rette caratteristiche, individuata dalle (5.10); scelti i punti base della $T^*_{q,0}$ come punti impropri e come retta unità una delle direzioni d'iperosculazione relative a

(5) F. SPERANZA in [7], introdotta la $T'_{q,o}$ rispetto a cui le direzioni caratteristiche costituiscono la coppia hessiana delle tre direzioni d'iperosculazione distinte da $y = 0$, perviene alla classificazione considerando gli indici della corrispondenza linearizzante γ relativa ad una generica $T_{q,o}$ e della corrispondenza linearizzante γ' relativa a $T'_{q,o}$. Oltre al tipo (1 a) per cui sia γ che γ' sono di indici (1.3), SPERANZA distingue il tipo (1.b) [γ di indici (1.3), γ' di indici (1.2)].

Si noti che esistono ∞^1 $T_{q,\sigma}$ per cui γ è di indici (1.2), soddisfacenti alla:

$$27\,a_{03}\,(b_{12} + 2\,u)^3 - 27\,b_{03}\,(b_{12} + 2\,u)^2\,(a_{12} - 2\,v) + 9\,a_{21}\,b_{03}^2\,(b_{12} + 2\,u) - a_{30}\,b_{03}^3 = 0$$

che per $T'_{q,o}$ si riduce alla: $a_{30}\,b_{03}^3 - 27\,a_{03}\,a_{21}^3 = 0$.

Se le trasformazioni si classificano in relazione alle direzioni d'iperosculazione e linearizzanti, oltre ai casi già noti, si ottiene anche il tipo (3.d), corrispondente a γ, γ' ambedue di indici (1.1) per cui γ' è l'identità.

$T^*_{q,o}$, si ha: $b_{12} = a_{12} = 0$; $3a_{21} - b_{03} + a_{03} = 0$, e la T si scrive:

$$(6.3) \qquad \begin{cases} \bar{x} = x + x\,y + 2c\,x^2\,y + (a - c)\,y^3 + [4] \\ \bar{y} = y \qquad\qquad\qquad\qquad + (a + c)\,y^3 + [4]\,. \end{cases}$$

2) Tipo (2.b): $a_{30} = a_{03} = 0$.

Le direzioni d'iperosculazione e linearizzanti, distinte dalle rette caratteristiche, sono date rispettivamente da:

$$(6.4) \qquad 3\left\{a_{21} - (b_{12} + 2u)\right\}x + \left\{3(a_{12} - 2\,v) - b_{03}\right\}y = 0,$$

$$(6.5) \qquad 3\,a_{21}\,(b_{12} + 2u)x^2 + 2\,a_{21}\,b_{03}\,x\,y + b_{03}\,(a_{12} - 2\,v)\,y^2 = 0.$$

Come nel caso precedente è individuata la $T^*_{q,o}$. Scelto il punto unità in π sulla direzione d'iperosculazione relativa a $T^*_{q,o}$ si ha:

$$(6.6) \qquad \begin{cases} \bar{x} = x + x\,y + a\,x^2\,y + [4] \\ \bar{y} = y \qquad\quad + a\,y^3 \quad + [4]\,. \end{cases}$$

3) Tipo (2.c): $a_{03} = b_{03} = 0$; $a_{30} \neq 0$.

Le direzioni d'iperosculazione e le direzioni linearizzanti distinte dalle rette caratteristiche sono date da:

$$(6.7) \qquad a_{30}\,x^2 + 3\left\{a_{21} - (b_{12} + 2\,u)\right\}x\,y + 3(a_{12} - 2\,v)\,y^2 = 0,$$

$$(6.8) \qquad (b_{12} + 2\,u)(2\,a_{30}\,x + 3\,a_{21}\,y) = 0\,.$$

Vi sono ∞^1 $T_{q,o}$, caratterizzate da: $b_{12} + 2u = 0$, per cui le direzioni linearizzanti sono indeterminate. Fra esse è caratterizzata la $T^*_{q,o}$, individuata da: $a_{12} - 2v = 0$, per cui una delle direzioni d'iperosculazione coincide con la retta caratteristica $x = 0$. Scelta l'ulteriore direzione d'iperosculazione come retta unità e i punti base di $T^*_{q,o}$ come punti impropri, la T si scrive:

$$(6.9) \qquad \begin{cases} \bar{x} = x + x\,y + a\,x^2\,(x - y) + [4] \\ \bar{y} = y \qquad\qquad\qquad\qquad\quad + [4]\,. \end{cases}$$

4) Tipo (3.a): $a_{30} = a_{21} = 0$; $b_{03} \neq 0$.

La $T^*_{q,o}$ individuata dalle (5.10) è l'unica per la quale le direzioni linearizzanti sono indeterminate. Con analoga scelta dei punti impropri e scelta la retta unità nell'unica direzione d'iperosculazione, distinta dalle direzioni caratteristiche, relativa a $T^*_{q,o}$: $b_{03}\,x - a_{03}\,y = 0$, si ha:

$$
\left\{
\begin{aligned}
\bar{x} &= x + x\,y + a\,y^3 + [4] \\
\bar{y} &= y \qquad\quad\;\, + a\,y^3 + [4].
\end{aligned}
\right.
\tag{6.10}
$$

5) Tipo (3.b): $\quad a_{30} = a_{21} = b_{03} = 0;\ a_{03} \neq 0$.

Le direzioni d'iperosculazione e le direzioni linearizzanti sono rispettivamente date da:

$$
y^2 \left\{ -3(b_{12} + 2u)\,x^2 + 3(a_{12} - 2v)\,x\,y + a_{03}\,y^2 \right\} = 0, \tag{6.11}
$$

$$
y^4 \left\{ -a_{03}\,(b_{12} + 2u) \right\} = 0 . \tag{6.12}
$$

Mentre ancora si può caratterizzare la $T^*_{q,o}$, individuata dalle (5.10), essendo essa l'unica $T_{q,o}$ per cui le direzioni linearizzanti sono indeterminate e le direzioni d'iperosculazione coincidono con le rette inflessionali, non è più possibile caratterizzare una retta unità per O allo stesso modo dei casi precedenti.

Si ha ora però una conica Γ invariante definita dalla proiettività tra le rette: $2 + b_{12}\,x - 2\,v\,y = 0$ congiungenti i punti base delle ∞^1 $T_{q,o}$ a direzioni linearizzanti indeterminate (per le quali: $b_{12} + 2u = 0$) e le corrispondenti direzioni d'iperosculazione: $3(a_{12} - 2v)\,x + a_{03}\,y = 0$ distinte dalla direzione caratteristica $y = 0$. La conica Γ ha l'equazione:

$$
3\,(b_{12}\,x - a_{12}\,y + 2)\,x - a_{03}\,y^2 = 0 .
$$

Scelti i punti base di $T^*_{q,o}$ come punti impropri e il punto unità su Γ, si perviene alla forma canonica:

$$
\left\{
\begin{aligned}
\bar{x} &= x + x\,y + y^3 + [4] \\
\bar{y} &= y \qquad\qquad\;\; + [4] .
\end{aligned}
\right.
\tag{6.13}
$$

6) Tipo (3.c): $\quad a_{30} = a_{03} = b_{03} = 0;\ a_{21} \neq 0$.

Le direzioni d'iperosculazione e le direzioni linearizzanti sono date rispettivamente da:

$$
y^2\,x \left\{ (a_{21} - b_{12} - 2u)\,x + (a_{12} - 2v)\,y \right\} = 0, \tag{6.14}
$$

$$
y^2\,x^2 \left\{ a_{21}\,(b_{12} + 2u) \right\} = 0 . \tag{6.15}
$$

La $T^*_{q,o}$ individuata dalle (5.10) è caratterizzata come nel caso precedente, mentre ora la proiettività ivi considerata è una prospettività di asse la retta: $(a_{21} - b_{12})\,x + a_{12}\,y - 2 = 0$. Scelti come al solito i punti impropri e il punto unità sul detto asse, la T si scrive:

$$\text{(6.16)} \qquad \begin{cases} \bar{x} = x + x\,y + x^2\,y + [4] \\ \bar{y} = y \qquad\qquad\qquad + [4] \,. \end{cases}$$

7) Tipo (3.d): $a_{30} = a_{21} = a_{03} = 0$; $b_{03} \neq 0$.

Si ha una prospettività, come nel caso precedente, fra le congiungenti i punti base delle ∞^1 $T_{q,o}$ a direzioni linearizzanti indeterminate, individuate da: $a_{12} - 2v = 0$, e le corrispondenti direzioni d'iperosculazione distinte dalle rette caratteristiche, di asse: $6 + 3\,b_{12}\,x + (b_{03} - 3\,a_{12})\,y = 0$.

Scegliendo il riferimento come in (3.c) si perviene alla forma:

$$\text{(6.17)} \qquad \begin{cases} \bar{x} = x + x\,y \qquad\quad + [4] \\ \bar{y} = y \qquad\quad - y^3 + [4] \,. \end{cases}$$

8) Tipo (4.a): $a_{30} = a_{21} = a_{03} = b_{03} = 0$.

La $T^*_{q,o}$ individuata dalle (5.10) ha direzioni d'iperosculazione indeterminate, cioè approssima la T fino al 3° ordine. Scelti i punti base di $T^*_{q,o}$ come punti impropri, si hanno ∞^1 riferimenti rispetto ai quali T assume la forma canonica:

$$\text{(6.18)} \qquad \begin{cases} \bar{x} = x + x\,y + [4] \\ \bar{y} = y \qquad\quad + [4] \,. \end{cases}$$

7. – Sia ora T una trasformazione di 3ª specie. Scelta la retta $x = 0$ come direzione caratteristica, si ha:

$$\text{(7.1)} \qquad \begin{cases} \bar{x} = \alpha\,x + (1/2)\,(a_{20}\,x^2 + 2\,a_{11}\,x\,y) \qquad\qquad + [3] \\ \bar{y} = \alpha\,y + (1/2)\,(b_{20}\,x^2 + a_{20}\,x\,y + 2\,a_{11}\,y^2) + [3], \end{cases}$$

con $b_{20} \neq 0$ se T non è approssimabile fino al 2° ordine da una proiettività.

Le direzioni linearizzanti relative a T e ad una proiettività tangente (4.2) coincidono (necessariamente con la direzione caratteristica) se: $a_{11} - \alpha\,\mu = 0$; tra esse si ha un'unica proiettività K^*, individuata da: $a_{20} - 2\,\alpha\,\lambda = 0$, per cui le direzioni linearizzanti sono indeterminate.

Scelta la retta r^* che individua K^* come retta impropria, si ha: $a_{20} = a_{11} = 0$. Inoltre, all'elemento inflessionale della retta $\bar{y} = 0$ (che è una retta generica per $\bar{O}$) corrisponde l'E_2: $y = -\{ b_{20}/(2\,\alpha) \} x^2 + [3]$.

Scelto il punto $U(1,1)$ sulla parabola per l'E_2 e per il punto improprio della direzione inflessionale, ed $\bar{U}(1,1)$ come corrispondente di U in K^*, si ha $\alpha = 1$, $b_{20} = -2$.

La T si scrive:

$$
(7.2) \qquad \begin{cases} \bar{x} = x \qquad + \dfrac{1}{3!}(a_{30}\,x^3 + 3\,a_{21}\,x^2\,y + 3\,a_{12}\,x\,y^2 + a_{03}\,y^3) + [4] \\ \bar{y} = y - x^2 + \dfrac{1}{3!}(b_{30}\,x^3 + 3\,b_{21}\,x^2\,y + 3\,b_{12}\,x\,y^2 + b_{03}\,y^3) + [4]. \end{cases}
$$

Essa è di 3ª specie in ogni punto $O + \delta O = (\delta x,\ \delta y)$ dell'intorno del 1º ordine di O se e solo se: $a_{03} = a_{12} = b_{03} = 0$, $b_{12} = 2a_{21}$ e si ha quindi (6):

$$
(7.3) \qquad \begin{cases} \bar{x} = x \qquad + \dfrac{1}{3!}(a_{30}\,x^3 + 3\,a_{21}\,x^2\,y) \qquad + [4] \\ \bar{y} = y - x^2 + \dfrac{1}{3!}(b_{30}\,x^3 + 3\,b_{21}\,x^2\,y + 6\,a_{21}\,x\,y^2) + [4]. \end{cases}
$$

Le $T_{q,o}$ sono individuate da reti di coniche osculatrici, ossia con un E_2 base avente centro in un punto $\Omega\ (0, 1, v)$ di $x = 0$. Indicata con: $1 - u\,x - v\,y = 0$ la tangente in Ω all'E_2, le $T_{q,o}$ si scrivono:

$$
(7.4) \qquad \begin{cases} \bar{x} = \dfrac{x(1 - u\,x - v\,y)}{1 - u\,x - v\,(y + x^2)} = x + v\,x^3 + [4] \\ \bar{y} = \dfrac{y(1 - u\,x - v\,y) - x^2}{1 - u\,x - v\,(y + x^2)} = y - x^2 - u\,x^3 + [4]. \end{cases}
$$

In relazione alla T e ad una $T_{q,o}$ si hanno:

a) la corrispondenza linearizzante γ:

$$
(7.5) \qquad \begin{cases} \varrho\,x' = (a_{30} - 6\,v)\,x^3 + 3\,a_{21}\,x^2\,y \\ \varrho\,y' = (b_{30} + 6\,u)\,x^3 + 3\,b_{21}\,x^2\,y + 6\,a_{21}\,x\,y^2; \end{cases}
$$

b) le direzioni d'iperosculazione:

$$
(7.6) \qquad x^2 \{ (b_{30} + 6\,u)\,x^2 + (3\,b_{21} - a_{30} + 6\,v)\,x\,y + 3\,a_{21}\,y^2) \} = 0;
$$

(6) Cfr. [11], n. 4.

c) le direzioni linearizzanti:

(7.7) $x^2\{[b_{21}(a_{30}-6v)-a_{21}(b_{30}+6u)]x^2+4a_{21}(a_{30}-6v)xy+6a_{21}^2y^2\}=0.$

Si noti che vi sono ∞^1 $T_{q,o}$ per cui le direzioni d'iperosculazione (distinte dalla direzione inflessionale) coincidono. Le tangenti agli E_2 base di tali $T_{q,o}$ inviluppano la conica Γ:

(7.8) $$b_{30}x^2-(a_{30}-3b_{21})xy+3a_{21}y^2+6x=0$$

che è degenere se e solo se $a_{21}=0$.

Supponiamo $a_{21}\neq 0$ (7). Esiste una ed una sola $T^*_{q,o}$ per cui le direzioni linearizzanti coincidono con le direzioni d'iperosculazione. Essa si ha per:

$$b_{21}-a_{30}+6v=0, \qquad b_{30}-(1/3)(b_{21}^2/a_{21})+6u=0.$$

Scelta come retta impropria la tangente all'E_2 base di $T^*_{q,o}$ e come asse x la retta: $a_{30}x+3a_{21}y=0$, retta con cui coincidono le direzioni d'iperosculazione relative a $T^*_{q,o}$ e distinte dalla direzione inflessionale, si ha: $a_{30}=b_{21}=b_{30}=0$.

Scelto inoltre il punto unità su Γ, si ha $a_{21}=-2$ e la T si scrive:

(7.9) $$\begin{cases}\bar{x}=x-x^2y+[4]\\ \bar{y}=y-x^2-2xy^2+[4].\end{cases}$$

8. – Si ottengono casi particolari per $a_{21}=0$.

1) $a_{21}=0$, $b_{21}\neq 0$ (8).

Vi sono ∞^1 $T_{q,o}$, definite da $a_{30}-6v=0$, per cui le direzioni linearizzanti sono indeterminate. Esiste una prospettività fra le tangenti agli E_2 base di tali $T_{q,o}$ e le direzioni d'iperosculazione, distinte dalla direzione inflessionale, di asse la retta:

(8.1) $$b_{30}x+(3b_{21}-a_{30})y+6=0.$$

Scelta tale retta come $y=1$ e come retta impropria la tangente all'E_2 base di una qualsiasi $T_{q,o}$ a direzioni linearizzanti indeterminate, si ha $a_{30}=$

(7) È questo il 1° tipo in [11], n. 6, alla cui classificazione, ottenuta considerando gli indici della corrispondenza linearizzante γ, mi riferirò nel seguito.

(8) È il 2° tipo in [11], n. 7.

$= b_{30} = 0$, $b_{21} = -2$. Vi sono pertanto ∞^1 riferimenti rispetto a cui la T assume la forma canonica:

(8.2)
$$\begin{cases} \bar{x} = x & + [4] \\ \bar{y} = y - x^2 - x^2 y & + [4]\,. \end{cases}$$

2) $a_{21} = b_{21} = 0$ (9).

Le direzioni linearizzanti sono indeterminate. Le direzioni d'iperosculazione distinte dalla retta inflessionale sono date da:

(8.3)
$$(b_{30} + 6\,u)\,x - (a_{30} - 6\,v)\,y = 0\,.$$

Viene messa in evidenza una $T^*_{q,o}$, caratterizzata da $b_{30} + 6\,u = 0$, $a_{30} - 6\,v = 0$, a direzioni d'iperosculazione indeterminate, che approssima cioè la T fino al 3° ordine. Scelta come retta impropria la tangente all'E_2 base di $T^*_{q,o}$, si perviene alla forma:

(8.4)
$$\begin{cases} \bar{x} = x & + [4] \\ \bar{y} = y - x^2 & + [4]\,. \end{cases}$$

Bibliografia.

[1] E. Bompiani, *Sulle trasformazioni puntuali fra piani proiettivi*, Rend. R. Accad. Italia (6) **13** (1942), 837-848.

[2] E. Bompiani, *Tessuti di curve piane e corrispondenze fra piani*, Rend. Accad. Lincei (8) **6** (1949), 7-12.

[3] E. Bompiani, *Sulle corrispondenze puntuali fra spazi proiettivi*, Rend. Accad. Lincei (8) **6** (1949), 145-151.

[4] O. Boruwka, *Sur les correspondances analytiques entre deux plans projéctifs*, Publ. Univ. Masarik-Brno 1926-27.

[5] E. Čech, *Géometrie projective différentielle des correspondances entre deux espaces*, Cas. pro Pest. Mat. Fis. **74**, **75** (1950), 32-48, 123-136.

[6] L. Muracchini, *Sulle trasformazioni puntuali di 2ª e 3ª specie fra piani proiettivi*, Estr. Mem. Acc. Sc. Torino (3) **1** (1953), 25-44.

(9) 3° tipo in [**11**], n. 8.

[7] F. Speranza, *Classificazione delle trasformazioni puntuali di 2^a specie fra piani*, Boll. Un. Mat. Ital. (3) **2** (1956), 210-216.

[8] M. Villa, *Trasformazioni quadratiche osculatrici ad una corrispondenza puntuale fra piani proiettivi*, Rend. R. Accad. Italia (7) **3** (1942), 710-724.

[9] M. Villa, *Direzioni d'osculazione e d'iperosculazione di due trasformazioni puntuali*, Boll. Un. Mat. Ital. (3) **2** (1947), 188-195.

[10] M. Villa, *Progressi recenti nella teoria delle trasformazioni puntuali*, Sem. Mat. Bari **10** (1955), 1-19.

[11] M. Villa, *Classificazione delle trasformazioni puntuali di 3^a specie fra piani*, Boll. Un. Mat. Ital. (3) **2** (1956), 141-149.

Summary.

The Author defines the «linearizzanti» directions and with them gives a geometric meaning for the canonical forms of the different types of the 2^d and 3^d kind point-transformations between two projective planes.

* * *