

ALDO PASQUALI (*)

**L'effetto di un campo magnetico trasversale
sullo strato limite laminare non stazionario
associato ad un piano permeabile. (**)**

In molti problemi di interesse pratico, per esempio nella determinazione della massa virtuale di corpi sottili e nella teoria delle turbine [1], è utile conoscere l'effetto di una perturbazione nella velocità di un fluido sullo strato limite associato con un corpo immerso in esso. Il primo valido contributo alla soluzione di questo problema è dovuto a LIDTHILL [2], il quale ha supposto che la velocità del moto fluido irrotazionale presenti, in condizioni di regime, una piccola componente sinusoidale sovrapposta ad un valor medio non nullo: egli ha studiato il caso di un generico corpo cilindrico con il noto metodo di KARMAN-POHLHAUSEN ed è riuscito ad ottenere numerose informazioni sulle grandezze che caratterizzano lo strato limite. Al lavoro di LIDTHILL hanno fatto seguito le ricerche di altri studiosi; per esempio GIBELLATO [3] ha considerato il problema precedente nel caso di una parete piana, giungendo ad una soluzione numerica delle equazioni che presiedono al fenomeno, mentre STUART [4] ha osservato che nel caso di un piano permeabile è possibile dare una soluzione in forma chiusa. Recentemente SURYAPRAKASARAO ha esteso il problema di STUART alla magnetofluido-dinamica, trascurando in un primo lavoro [5] il campo magnetico indotto, di cui ha invece tenuto conto in una Nota successiva [6], giungendo peraltro a risultati non molto diversi.

In questo lavoro si estende il problema studiato da SURYAPRAKASARAO al caso in cui la perturbazione della velocità del fluido è una generica funzione del tempo. Limitatamente a piccoli valori del numero di REYNOLDS magnetico, che del resto più frequentemente si presentano nella pratica, si discutono

(*) Indirizzo: Istituto Matematico U. DINI, Università, Firenze, Italia.

(**) Ricevuto: 20-III-1965.

le condizioni in cui si può dare una soluzione in forma chiusa delle equazioni che reggono il fenomeno. I risultati ottenuti permettono anche di approfondire lo studio del problema di SURYAPRAKASARAO e possono essere confrontati con i risultati relativi all'analogo problema idrodinamico [7], ai quali si riconducono all'annullarsi del campo magnetico esterno o della conducibilità elettrica del fluido.

La complessità formale di molti dei risultati ottenuti ha suggerito la loro illustrazione mediante numerosi grafici; i calcoli numerici relativi ad essi sono stati eseguiti con l'elaboratore elettronico I.B.M. 1620 del Centro di Calcolo dell'Istituto Matematico U. DINI dell'Università degli Studi di Firenze.

1. - Equazioni e condizioni al contorno.

Si consideri un fluido viscoso, incompressibile, di conduttività elettrica σ , occupante il semispazio $z > 0$ limitato da una parete piana permeabile, infinitamente estesa nelle due direzioni x e y . Sia $\mathbf{v}(P, t)$ il campo di velocità del fluido; la permeabilità del piano $z = 0$ sarà nel seguito schematizzata assumendo la componente v_z di $\mathbf{v}(P, t)$ costante sul piano: $v_z(x, y, 0, t) = v_0 < 0$. Si pensi inoltre presente in tutto lo spazio un campo magnetico costante di induzione $B_0(P, t) = B_0 \mathbf{k}$, dove B_0 è una costante positiva. Com'è noto, l'induzione magnetica \mathbf{B} deve soddisfare all'equazione

$$(1.1) \quad \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \wedge (\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}) + \nu_H \nabla^2 \mathbf{B},$$

in cui $\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k}$, $\nu_H = (4\pi\mu\sigma)^{-1}$ è la viscosità magnetica del fluido e μ la sua permeabilità magnetica. Nella (1.1) il primo termine a destra determina l'accoppiamento fra campo magnetico e campo di velocità; se questo termine risulta trascurabile rispetto a $\nu_H \nabla^2 \mathbf{B}$, il campo magnetico non è praticamente influenzato dal moto del fluido. Questa situazione si presenta quando il numero di REYNOLDS magnetico è molto piccolo ed ha interesse in diversi campi della tecnica, in cui si incontrano basse conduttività ma intensi campi magnetici. Come accennato nell'introduzione, nel seguito assumeremo valida questa ipotesi; supporremo inoltre che siano realizzate le condizioni per poter trascurare il campo elettrico esterno e quello indotto [8]. Le equazioni di MAXWELL sono allora superflue nell'analisi del moto del fluido e $\mathbf{v}(P, t)$ si ottiene dall'equazione di NAVIER-STOKES modificata

$$(1.2) \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{v} + \frac{1}{\rho} \mathbf{J} \wedge \mathbf{B},$$

in cui ρ è la densità del fluido, ν la sua viscosità cinematica e la densità di corrente elettrica \mathbf{J} è data dalla legge di OHM, che per le ipotesi fatte si scrive

$$(1.3) \quad \mathbf{J} = \sigma \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}.$$

È immediato poi concludere che, in questo ordine di approssimazioni, la forza di origine magnetica si riduce a

$$(1.4) \quad (1/\rho) \mathbf{J} \wedge \mathbf{B} \mathbf{i} - (\sigma B_0^2/\rho) v_x \mathbf{i}.$$

Si osservi ora che l'equazione vettoriale (1.2) risulta notevolmente semplificata se si considerano tutte le grandezze funzioni di z e t soltanto, ad eccezione eventualmente della pressione p , e se si ammette che il campo di velocità \mathbf{v} non abbia componenti nella direzione dell'asse y (caso bidimensionale). Nel seguito si accetteranno queste ipotesi che non sono troppo restrittive per gli scopi che questo lavoro si propone di raggiungere.

La velocità $\mathbf{v}(z, t)$ del fluido deve soddisfare all'equazione di continuità, che per i fluidi incompressibili ha la nota forma: $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$; per le ipotesi fatte essa diventa $\partial v_x / \partial z = 0$ che, con la condizione ammessa per v_x sul piano $z = 0$, dà $v_x = v_0$ costante in tutto il fluido.

In assenza di slittamento, sul piano $z = 0$ deve essere verificata la condizione $v_x(0, t) = 0$; inoltre v_x deve anche soddisfare alla relazione $\lim_{z \rightarrow \infty} v_x(z, t) = V_\infty(t)$, dove $V_\infty(t)$ rappresenta la velocità del fluido in assenza della parete solida posta sul piano $z = 0$ (moto irrotazionale).

Data un'opportuna situazione iniziale per v_x , ci proponiamo di ottenere $v_x(z, t)$ negli istanti successivi, quando sia assegnata $V_\infty(t)$ per $t > 0$. Osserviamo che dare $V_\infty(t)$ significa in sostanza assegnare il gradiente di pressione necessario per mantenere il corrispondente moto irrotazionale, cioè, per la (1.2),

$$(1.5) \quad -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{dV_\infty}{dt} + \frac{\sigma V_\infty B_0^2}{\rho},$$

in cui la seconda parte è necessaria per vincere le forze di origine magnetica (cfr. (1.4)). Rendiamo tutte le grandezze adimensionali mediante la trasformazione

$$(1.6) \quad \zeta = z/d_0, \quad \tau = \nu t/(4 d_0^2), \quad U(\tau) = V(\tau)/V_0, \quad u(\zeta, \tau) = v_x/V_0,$$

dove $d_0 = \nu / |v_0|$ è lo spessore dello strato limite nel caso stazionario idrodi-

namico (cfr. [10], p. 231). Allora, nel caso $V_\infty(t) = V_0$ costante e nell'ipotesi di limitarsi a studiare il problema stazionario ($\partial/\partial t = 0$), l'equazione (1.2) si riduce all'equazione differenziale ordinaria

$$(1.7) \quad \left[\frac{d^2}{d\zeta^2} + \frac{d}{d\zeta} - \frac{S}{4} \right] u_s(\zeta) = -\frac{S}{4},$$

che ha la ben nota soluzione $u_s = 1 - e^{-\alpha\zeta}$, dove $\alpha = [1 + (1 + S)^{1/2}]/2$; il parametro S è quattro volte il prodotto del numero di pressione magnetica $S_m = B_0^2/(4\pi\mu_0 v_0^2)$ e del numero di PRANDTL magnetico $P_m = \nu/\nu_H$.

Imponiamo ora alla velocità adimensionale la condizione iniziale $u(\zeta, 0) = u_s(\zeta)$ e assegnamo $U_\infty(\tau) = 1 + U(\tau)$, con $U(\tau)$ nulla per $\tau \leq 0$, continua per $\tau = 0$ e con derivate continua per $\tau > 0$; ciò equivale a considerare il fluido in moto laminare stazionario e uniforme per $\tau < 0$ e soggetto per $\tau > 0$ ad un gradiente di pressione dipendente dal tempo. È facile vedere che, per la (1.2) e per quanto detto sopra, la velocità adimensionale che risponde alle nostre richieste è data da $u(\zeta, \tau) = u_s(\zeta) + u_a(\zeta, \tau)$, con $u_a(\zeta, \tau)$ soluzione del sistema seguente:

$$(1.8) \quad \begin{cases} \left[\frac{\partial}{\partial \tau} - 4 \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} - 4 \frac{\partial}{\partial \zeta} + S \right] u_a(\zeta, \tau) = \left[\frac{d}{d\tau} + S \right] U(\tau), & \text{per } \zeta > 0, \tau > 0 \\ \lim_{\zeta \rightarrow 0^+} u_a(\zeta, \tau) = 0, \quad \lim_{\zeta \rightarrow \infty} u_a(\zeta, \tau) = U(\tau), & \text{per } \tau > 0 \\ \lim_{\tau \rightarrow 0^+} u_a(\zeta, \tau) = 0, & \text{per } \zeta > 0. \end{cases}$$

2. - Soluzione del sistema (1.8).

Supponiamo, per il momento, che $U(\tau)$ sia una funzione trasformabile secondo LAPLACE [9]. La soluzione del sistema (1.8) nello spazio trasformato si trova facilmente:

$$(2.1) \quad \bar{u}_a(\zeta, s) = \bar{U}(s) (1 - e^{-h\zeta}),$$

dove il soprassegno indica la funzione trasformata, s è la variabile complessa che compare nell'integrale di LAPLACE e $h = \{1 + (1 + S + s)^{1/2}\}/2$, con la convenzione di prendere la radice per cui risulta positiva la parte reale di h .

Ricordando che l'antitrasformata dell'unità è la funzione impulsiva unitaria $\mathcal{J}(\tau)$, e che vale la relazione [9]

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{2\sqrt{\pi} e^{-a\sqrt{s}}}{a} \right] = \frac{e^{-a^2/(4\tau)}}{\tau^{3/2}},$$

ben nota nella teoria della propagazione del calore, si ottiene facilmente:

$$(2.2) \quad \mathcal{L}^{-1}[(1 - e^{-\lambda \zeta})] = \mathfrak{J}(\tau) - \frac{\zeta e^{-\zeta/2}}{4\pi^{1/2} \tau^{3/2}} e^{-(1+S)\tau - \frac{\zeta^2}{16\tau}}$$

Tenendo presente che la funzione impulsiva $\mathfrak{J}(\tau)$ si comporta nel prodotto integrale come l'unità nel prodotto ordinario [9], l'antitrasformata della $\bar{u}_a(\zeta, s)$ si ricava dall'applicazione del ben noto teorema del prodotto integrale; a calcoli fatti, si perviene alla seguente espressione:

$$(2.3) \quad u_a(\zeta, \tau) = U(\tau) - \frac{\zeta e^{-\zeta/2}}{4\pi^{1/2}} \int_0^\tau U(\tau - \lambda) \chi(\zeta, \lambda) d\lambda,$$

dove

$$\chi(\zeta, \lambda) = \lambda^{-3/2} e^{-(1+S)\lambda - \frac{\zeta^2}{16\lambda}}.$$

La (2.3) è soluzione dell'equazione (1.8) per $\zeta > 0$ e $\tau > 0$; per il teorema di derivazione sotto il segno di integrale, dato che $\frac{\partial U(\tau - \lambda)}{\partial \tau} = -\frac{\partial U(\tau - \lambda)}{\partial \lambda}$, si ha infatti con una integrazione per parti:

$$(2.4) \quad \frac{\partial}{\partial \tau} \int_0^\tau U(\tau - \lambda) \chi(\zeta, \lambda) d\lambda = - \int_0^\tau \left[(1+S) + \frac{3}{2\lambda} - \frac{\zeta^2}{16\lambda^2} \right] U(\tau - \lambda) \chi(\zeta, \lambda) d\lambda,$$

e con facili calcoli anche

$$(2.5) \quad 4 \left[\frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} + \frac{\partial}{\partial \zeta} \right] u_a(\zeta, \tau) = \frac{\zeta e^{-\zeta/2}}{4\pi^{1/2}} \int_0^\tau \left[1 + \frac{3}{2\lambda} - \frac{\zeta^2}{16\lambda^2} \right] U(\tau - \lambda) \chi(\zeta, \lambda) d\lambda.$$

Servendosi di questi risultati si prova facilmente che la (2.3) soddisfa all'equazione (1.8)₁. Si può allora concludere che resta legittimato il procedimento formale usato.

Esaminiamo ora quali condizioni sono richieste perchè la $u_a(\zeta, \tau)$ data dalla (2.3) soddisfi anche alle condizioni iniziali e al contorno relative al sistema (1.8). Si vede subito intanto che la (2.3) verifica la condizione iniziale se $\lim_{\tau \rightarrow 0^+} U(\tau) = 0$; ricordando la definizione della $U(\tau)$, è sufficiente che essa sia continua per $\tau = 0$, ciò che è nelle nostre ipotesi.

Richiamiamo ora la definizione della funzione dell'errore $\text{erf}(x)$ e della

funzione complementare $\operatorname{erfc}(x)$, che ci serviranno spesso nel seguito:

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt, \quad \operatorname{erfc}(x) = 1 - \operatorname{erf}(x).$$

Se facciamo allora uso del seguente risultato

$$(2.6) \quad \frac{1}{4\pi^{1/2}} \int_0^\tau \lambda^{-3/2} e^{-\alpha + s\lambda - \frac{\zeta^2}{16\lambda}} d\lambda = \\ = \frac{1}{2\zeta} \left[e^{-\alpha\zeta} \operatorname{erfc} \left[\frac{\zeta}{4\tau^{1/2}} - (1 + S)^{1/2} \tau^{1/2} \right] + e^{-\alpha - \alpha\zeta} \operatorname{erfc} \left[\frac{\zeta}{4\tau^{1/2}} + (1 + S)^{1/2} \tau^{1/2} \right] \right],$$

possiamo scrivere la (2.3) in quest'altra forma:

$$u_\alpha(\zeta, \tau) = U(\tau) \left\{ 1 - \frac{e^{-\zeta/2}}{2} \left[e^{-\alpha\zeta} \operatorname{erfc} \left[\frac{\zeta}{4\tau^{1/2}} - (1 + S)^{1/2} \tau^{1/2} \right] + \right. \right. \\ \left. \left. + e^{-\alpha - \alpha\zeta} \operatorname{erfc} \left[\frac{\zeta}{4\tau^{1/2}} + (1 + S)^{1/2} \tau^{1/2} \right] \right] \right\} + \\ + \frac{\zeta e^{-\zeta/2}}{4\pi^{1/2}} \int_0^\tau \lambda^{-3/2} [U(\tau) - U(\tau - \lambda)] e^{-\alpha + s\lambda - \frac{\zeta^2}{16\lambda}} d\lambda.$$

Da qui appare evidente che $u_\alpha(\zeta, \tau)$ soddisfa alla condizione al contorno $\lim_{\zeta \rightarrow 0} u_\alpha(\zeta, \tau) = 0$, se per $\zeta \rightarrow 0$ converge l'integrale al secondo membro. Perchè ciò accada è sufficiente che $U(\tau)$ abbia derivata limitata, perchè allora esiste una costante L tale che $|U(\tau) - U(\tau - \lambda)| < L|\lambda| = L\lambda$; infatti in questo caso abbiamo

$$0 \leq \left| \int_0^\tau \lambda^{-3/2} [U(\tau) - U(\tau - \lambda)] e^{-\alpha + s\lambda - \frac{\zeta^2}{16\lambda}} d\lambda \right| < \\ < L \int_0^\tau \frac{e^{-\alpha + s\lambda}}{\sqrt{\lambda}} d\lambda = \frac{\pi^{1/2} L}{(1 + S)^{1/2}} \operatorname{erf}(\sqrt{(1 + S)\tau}).$$

Per concludere, la funzione $u_\alpha(\zeta, \tau)$ è soluzione del sistema (1.8) se $U(\tau)$ è una funzione continua per $\tau = 0$, con derivata anch'essa continua per $\tau > 0$.

3. - I risultati finali.

Per quanto si è detto alla fine del n. 1, possiamo ora scrivere la velocità $u(\zeta, \tau)$ soluzione del problema da noi esaminato, come segue:

$$(3.1) \quad u(\zeta, \tau) = 1 - e^{-\alpha \zeta} + u_a(\zeta, \tau),$$

dove $u_a(\zeta, \tau)$ è data dalla (2.3).

Trovato dunque il campo della velocità del fluido, vogliamo ora dare le espressioni di due grandezze particolarmente significative per conoscere la situazione fisica in prossimità della parete $z = 0$: esse sono lo sforzo tangenziale (skin friction) e lo spessore di spostamento dello strato limite (displacement thickness).

Lo sforzo tangenziale sul piano $z = 0$ è notoriamente [10] $\theta_1 = \rho \nu \left[\frac{\partial v_z}{\partial z} \right]_{z=0}$; indicando con $\theta_0 = \rho V_0 |v_0|$ lo sforzo nel caso stazionario idrodinamico e con $\theta = \theta_1/\theta_0$ lo sforzo adimensionale, per la (1.6) si ha $\theta = \left[\frac{\partial u(\zeta, \tau)}{\partial \zeta} \right]_{\zeta=0}$. Servendosi della (2.6) con facili calcoli si arriva alla formula finale seguente:

$$(3.2) \quad \theta = \alpha + \frac{U(\tau)}{2} \left[1 + \frac{e^{-(\alpha+s)\tau}}{(\pi \tau)^{1/2}} + (1+S)^{1/2} \operatorname{erf}(\sqrt{(1+S)\tau}) \right] + \\ + \frac{1}{4 \pi^{1/2}} \int_0^\tau \lambda^{-3/2} [U(\tau) - U(\tau - \lambda)] e^{-(\alpha+s)\lambda} d\lambda.$$

Lo spessore di spostamento è definito dalla relazione [10]:

$d = \int_0^\infty \{1 - (v_z/V_\infty)\} dz$, che corrisponde alla formula adimensionale seguente

$$(3.3) \quad \delta = \frac{d}{d_0} = \frac{1}{1 + U(\tau)} \left\{ \frac{1}{\alpha} + U(\tau) \delta_a \right\},$$

dove d_0 è già stato definito al n. 1, e δ_a si ottiene dal calcolo dell'espressione seguente

$$(3.4) \quad \delta_a = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{4 \pi^{1/2} U(\tau)} \int_0^k \zeta e^{-\zeta/2} \int_0^\tau U(\tau - \lambda) \chi(\zeta, \lambda) d\lambda d\zeta.$$

Ammessi leciti l'inversione dell'ordine di integrazione e il passaggio al limite sotto il segno di integrale, poichè con la sostituzione $\gamma = \frac{\zeta + 4\lambda}{4\sqrt{\lambda}}$ si dimostra che vale il risultato

$$(3.5) \quad \int_0^{\infty} \zeta e^{-\left(\frac{\zeta^2}{16\lambda} + \frac{\zeta}{2}\right)} d\zeta = 8 [\lambda - \lambda^{3/2} e^{\lambda} \pi^{1/2} \operatorname{erfc}(\sqrt{\lambda})],$$

dalla (3.4) otteniamo

$$(3.6) \quad \delta_a = \frac{2}{\pi^{1/2} U(\tau)} \int_0^{\tau} U(\tau - \lambda) e^{-s\lambda} [\lambda^{-1/2} e^{-\lambda} - \pi^{1/2} \operatorname{erfc}(\sqrt{\lambda})] d\lambda.$$

Lo spessore dello strato limite è allora ricavato dall'inserimento di questa espressione nella (3.3).

Dall'applicazione del teorema della media si ha:

$$0 \leq |\delta| \leq \left| \frac{1}{1 + U(\tau)} \right| \left| \left[\frac{1}{\alpha} + e^{-s\bar{\tau}} \int_0^{\bar{\tau}} U(\tau - \lambda) [\lambda^{-1/2} e^{-\lambda} - \pi^{1/2} \operatorname{erfc}(\sqrt{\lambda})] d\lambda \right] \right|,$$

dove $\bar{\tau}$ è un opportuno valore appartenente all'intervallo $(0, \tau)$; possiamo perciò concludere che lo spessore di spostamento diminuisce al crescere del campo magnetico.

Come applicazione dei risultati precedenti, studiamo ora due casi particolari in cui la funzione $U(\tau)$ soddisfa alle condizioni richieste al n. 2.

4. - Campo di velocità accelerato.

Nel caso di un fluido che si muove con velocità costante per $\tau \leq 0$ ed è sottoposto ad una accelerazione costante A per $\tau > 0$, possiamo scrivere $U_{\infty}(\tau) = 1 + \eta(\tau) A \tau$, dove $\eta(\tau)$ è la funzione gradino unitario così definita:

$$(4.1) \quad \eta(\tau - \tau_0) = \begin{cases} 0 & \text{per } \tau \leq \tau_0 \\ 1 & \text{per } \tau > \tau_0. \end{cases}$$

Sostituendo allora $U(\tau) = \eta(\tau) A \tau$ nella (2.3), il campo della velocità $u(\zeta, \tau)$

si ottiene dalla (3.1); a calcoli fatti abbiamo:

$$u(\zeta, \tau) = 1 - e^{-\alpha \zeta} + A \left\{ \tau + \frac{1}{8} \left[\left[\frac{\zeta}{(1+S)^{1/2}} - 4\tau \right] e^{-\alpha \zeta} \operatorname{erfc} \left[\frac{\zeta}{4\tau^{1/2}} - (1+S)^{1/2} \tau^{1/2} \right] - \right. \right. \\ \left. \left. - \left[\frac{\zeta}{(1+S)^{1/2}} + 4\tau \right] e^{-\alpha \zeta} \operatorname{erfc} \left[\frac{\zeta}{4\tau^{1/2}} + (1+S)^{1/2} \tau^{1/2} \right] \right] \right\}. \quad (4.2)$$

In Fig. 1 è illustrato l'andamento della velocità in funzione della distanza dal piano $\zeta = 0$ ad un istante assegnato, per diversi valori del parametro magnetico S .

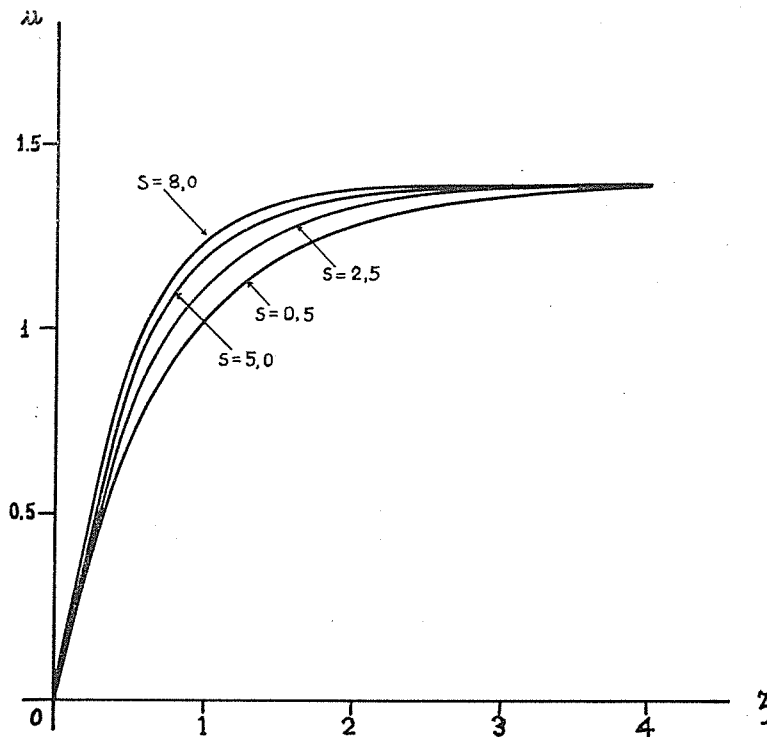


Fig. 1. - Campo di velocità accelerato: $\tau = 0,1$; $A = 4$.

Dalla (4.2) si ricava che, terminata la fase transitoria, la velocità $u(\zeta, \tau)$, per tempi grandi, è data al generico istante τ dal termine $(1 + A \tau) (1 - e^{-\alpha \zeta})$, corrispondente ad un moto fluido stazionario con velocità $V_{\infty} = V_0 (1 + A \tau)$ pensata costante (moto « quasistazionario » [2]) e del termine $\left\{ A / (4(1+S)^{1/2}) \right\} \zeta e^{-\alpha \zeta}$

indipendente dal tempo. La presenza di questa parte proporzionale ad A si può spiegare col fatto che la stessa accelerazione produce un effetto maggiore sul moto lento del fluido vicino alla parete piana $\zeta = 0$ piuttosto che sugli strati più distanti e più veloci [2]. È interessante notare che il campo magnetico riduce questo fenomeno, tendendo a riportare la velocità a quella « quasistazionaria ».

Lo sforzo sul piano è dato, per la (3.2), dalla formula seguente:

$$(4.3) \quad \theta = \alpha + \frac{A}{2} \left\{ \tau + \frac{\operatorname{erf}(\sqrt{(1+S)\tau})}{2(1+S)^{1/2}} + \frac{\tau^{1/2} e^{-\alpha+s\tau}}{\pi^{1/2}} + \tau (1+S)^{1/2} \operatorname{erf}(\sqrt{(1+S)\tau}) \right\},$$

che per tempi grandi diventa $\theta_1 \sim \alpha \{ 1 + A [\tau + 1/(4\alpha(1+S)^{1/2})] \}$; lo sforzo risulta dunque in anticipo rispetto alla velocità del fluido a grande distanza dal piano $\zeta = 0$ e questo anticipo diminuisce con il crescere del campo magnetico. Osserviamo ora che dalla (3.2) si ottiene per derivazione

$$(4.4) \quad \frac{\partial \theta}{\partial S} = \frac{1}{4(1+S)^{1/2}} + \frac{1}{4\pi^{1/2}} \int_0^\tau \lambda^{-1/2} U(\tau - \lambda) e^{-\alpha+s\lambda} d\lambda;$$

questa funzione, per $U(\tau) = \eta(\tau) A \tau$, è sempre positiva, perciò lo sforzo sul piano è una funzione crescente del campo magnetico.

Dalla (3.3) e (3.6), servendosi dei risultati riportati in Appendice, si ottiene lo spessore dello strato limite:

$$(4.5) \quad \delta = \frac{1}{1+A\tau} \left\{ \frac{1}{\alpha} + \frac{A}{(1+S)^{1/2}} \left[\frac{1+4S}{2\pi^{1/2}(1+S)^{3/2}} \tau^{1/2} e^{-\alpha+s\tau} - \frac{\tau^{3/2} e^{-\alpha+s\tau}}{\pi^{1/2}(1+S)^{1/2}} + \right. \right. \\ \left. \left. + (1+S)^{1/2} \tau^2 e^{-s\tau} \operatorname{erfc}(\sqrt{\tau}) + 2\tau \operatorname{erf}(\sqrt{(1+S)\tau}) - \frac{1+4S}{4(1+S)^2} \operatorname{erf}(\sqrt{(1+S)\tau}) - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{2}{S} \tau [(1+S)^{1/2}(1 - e^{-s\tau} \operatorname{erfc}(\sqrt{\tau})) - \operatorname{erf}(\sqrt{(1+S)\tau})] + \right. \right. \\ \left. \left. + S(1+S)^{1/2} \int_0^\tau \lambda^2 e^{-s\lambda} \operatorname{erfc}(\sqrt{\lambda}) d\lambda \right] \right\},$$

che si riduce alla formula relativa al caso idrodinamico [7] per S tendente a zero. Tenendo presente che vale la disuguaglianza

$$0 \leq \int_0^\tau \lambda^2 e^{-s\lambda} \operatorname{erfc}(\sqrt{\lambda}) d\lambda < 2/S^3,$$

si dimostra facilmente che lo spessore dello strato limite tende ad assumere nuovamente il valore stazionario iniziale $1/\alpha$.

In Fig. 2 il δ è rappresentato in funzione del tempo τ per diversi valori del parametro magnetico S . Dalla presenza di un valore minimo per δ si desume che

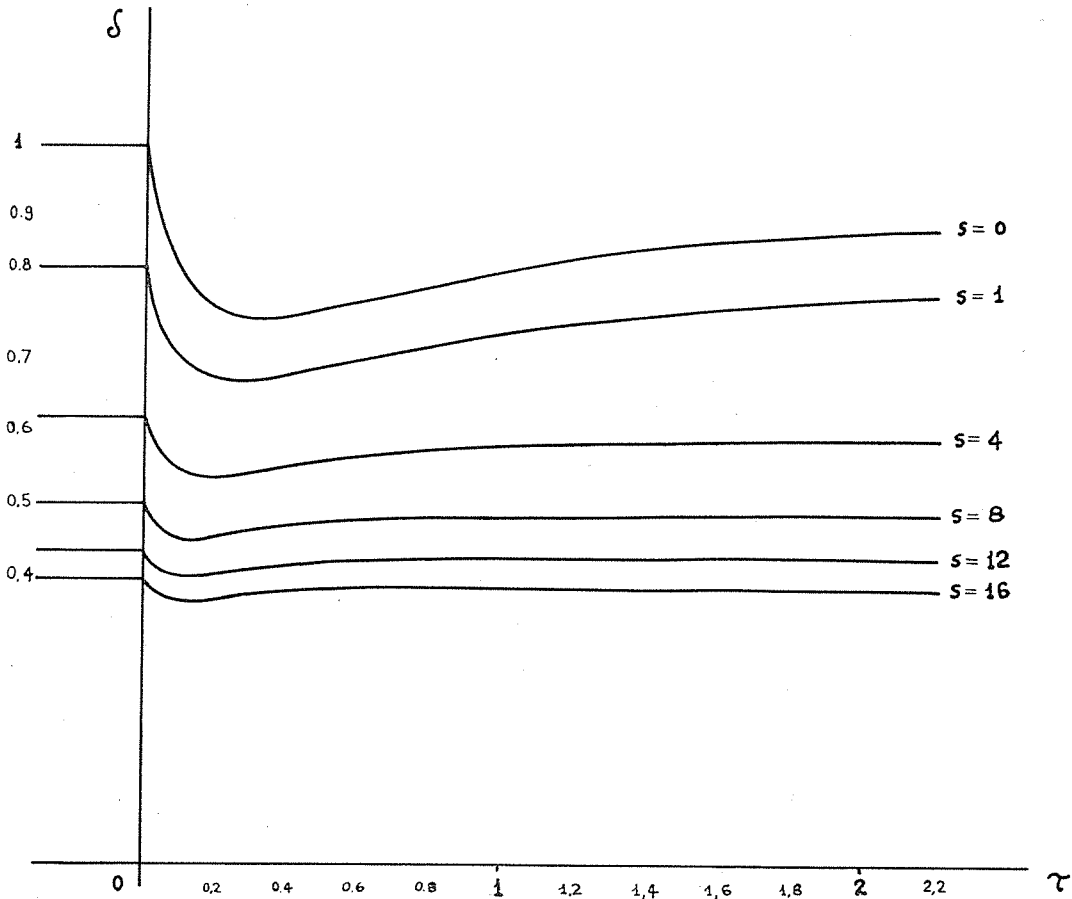


Fig. 2. - Spessore dello strato limite: $A = 4$.

inizialmente il fluido risponde al gradiente di pressione come un fluido ideale; perciò tutti gli strati subiscono lo stesso incremento di velocità $A \tau$. In questa fase iniziale si ha perciò $u(\zeta, \tau) \sim 1 - e^{-\alpha \zeta} + A \tau$ e lo spessore corrispondente $\delta \sim 1/\{\alpha(1 + A\tau)\}$ è una funzione decrescente di τ ; in uno stadio successivo del moto la presenza della parete si fa sentire, a causa della viscosità, sugli strati più distanti dal piano $\zeta = 0$, riportando δ al valore stazionario iniziale. Si os-

servi anche che il campo magnetico riduce notevolmente questo fenomeno e tende a ristabilire rapidamente la situazione stazionaria.

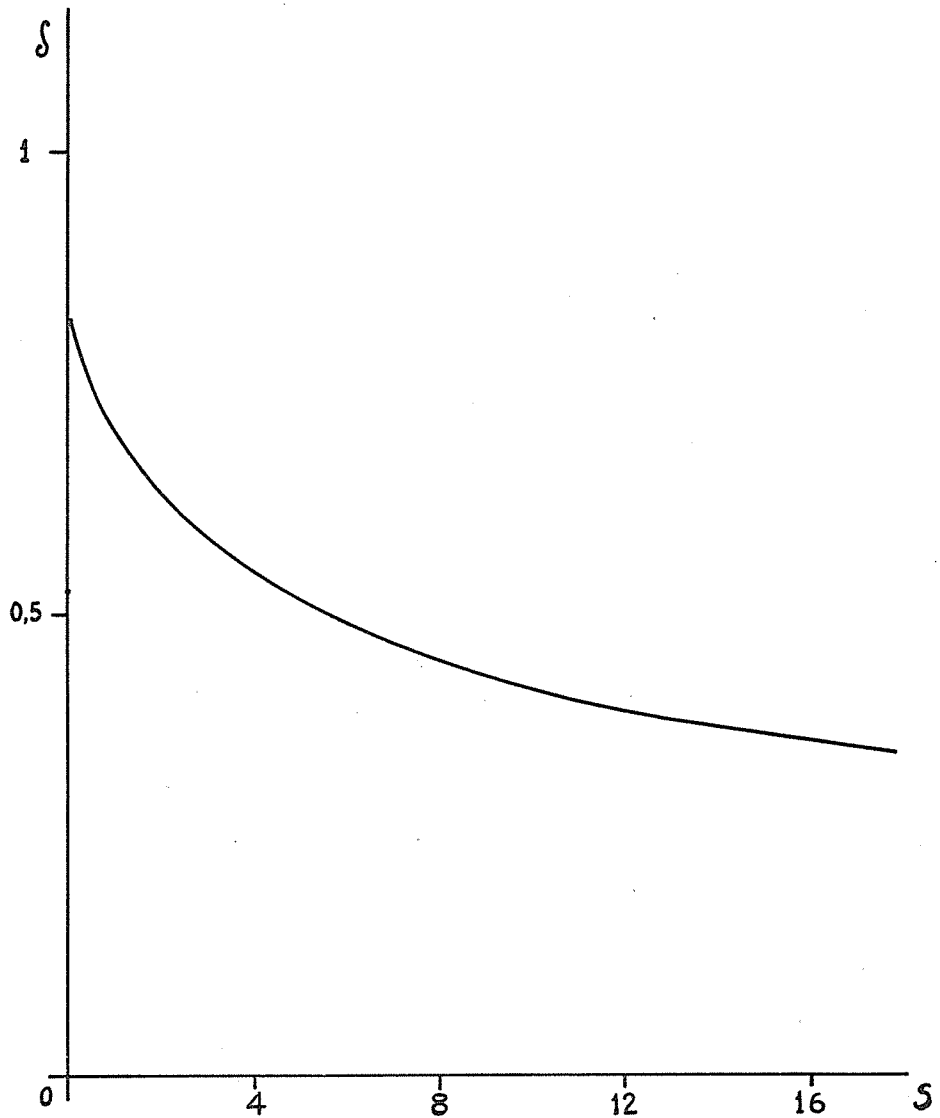


Fig. 3. - Spessore dello strato limite in funzione del parametro magnetico S :
 $\tau = 0,1$; $A = 4$.

La Fig. 3 infine mostra che lo spessore dello strato limite diminuisce al crescere del campo magnetico, in accordo con i risultati di Fig. 1.

4. - Campo di velocità oscillatorio.

Una forma particolarmente interessante per la $U_{\infty}(\tau)$ è la seguente (1):

$$U_{\infty}(\tau) = 1 - i\varepsilon \eta(\tau) e^{i\Omega\tau},$$

corrispondente al caso di una perturbazione sinusoidale che si sovrappone per $\tau > 0$ ad un moto fluido con velocità costante. La velocità assume la forma seguente:

$$(5.1) \quad u(\zeta, \tau) = 1 - e^{-\alpha\zeta} - i\varepsilon \eta(\tau) \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left[e^{-h\zeta} \operatorname{erfc} \left[\frac{\zeta}{4\tau^{1/2}} - (1+S+i\Omega)^{1/2} \tau^{1/2} \right] + e^{-h\zeta} \operatorname{erfc} \left[\frac{\zeta}{4\tau^{1/2}} + (1+S+i\Omega)^{1/2} \tau^{1/2} \right] \right] \right\},$$

dove $h = \{1 + (1 + S + i\Omega)^{1/2}\}/2$ e si è scelta la radice per cui $\operatorname{Re} [1 + S + i\Omega]^{1/2} > 0$. Per frequenze molto piccole, trascurando i termini dell'ordine di Ω^2 e delle potenze superiori di Ω , si ottiene:

$$u(\zeta, \tau) \sim 1 - e^{-\alpha\zeta} - i\varepsilon \eta(\tau) e^{i\Omega\tau} \left\{ 1 - \left[\frac{1}{2} - \frac{i\varphi\Omega}{8(1+S)^{1/2}} \right] e^{-\zeta x} \operatorname{erfc} \left[\frac{\zeta}{4\tau^{1/2}} - (1+S)^{1/2} \tau^{1/2} \right] - \left[\frac{1}{2} + \frac{i\varphi\Omega}{8(1+S)^{1/2}} \right] e^{-\zeta(1-\alpha)} \operatorname{erfc} \left[\frac{\zeta}{4\tau^{1/2}} + (1+S)^{1/2} \tau^{1/2} \right] - \frac{i\Omega\tau^{1/2}}{2\tau^{1/2}(1+S)^{1/2}} e^{-(1+S)\tau - \frac{\zeta}{2} - \frac{\zeta^2}{16\tau}} \right\},$$

che per i tempi grandi diventa

$$(5.2) \quad u(\zeta, \tau) \cong (1 - e^{-\alpha\zeta}) U_{\infty}(\tau) + \frac{\varepsilon\Omega e^{i\Omega\tau}}{4(1+S)^{1/2}} \zeta e^{-\alpha\zeta};$$

$u(\zeta, \tau)$ consiste dunque delle parte « quasistazionaria » [2] e di una parte proporzionale all'accelerazione, com'era già stato trovato partendo dall'ipotesi semplificativa che il moto fluido irrotazionale avesse la forma quasistazionaria $V_{\infty}(\tau) = V_0(1 + \varepsilon e^{i\Omega\tau})$ per $\tau \in (-\infty, +\infty)$ [5], [3].

Ritorniamo ora al caso generale rappresentato dalla (5.1), cercando di interpretarne, per quanto è possibile, il significato. Poniamo innanzitutto $(1 + S +$

(1) Vale naturalmente qui e nel seguito la consueta ipotesi che la sola parte reale ha significato fisico.

$+i\Omega)^{1/2} = a + ib$; tenendo presente la convenzione fatta all'inizio del para-
grafo, si arriva facilmente a scrivere

$$(5.3) \quad a = (1/\sqrt{2}) \{ [(1+S)^2 + \Omega^2]^{1/2} + (1+S) \}^{1/2},$$

$$(5.4) \quad b = (1/\sqrt{2}) \{ [(1+S)^2 + \Omega^2]^{1/2} - (1+S) \}^{1/2},$$

da cui si ricava immediatamente la relazione $b^2 - a^2 = -(1+S)$, che ci servirà nel seguito.

Si consideri poi la seguente uguaglianza:

$$(5.5) \quad \operatorname{erf}(x_0 + iy_0) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left\{ \int_0^{x_0} e^{-x^2} dx + e^{-x_0^2} \int_0^{y_0} e^{y^2} \sin(2x_0 y) dy + i e^{-x_0^2} \int_0^{y_0} e^{y^2} \cos(2x_0 y) dy \right\};$$

essa fornisce la scomposizione della funzione $\operatorname{erf}(z)$ dell'argomento complesso $z = x + iy$ nella parte reale e nella parte immaginaria. Se dunque poniamo

$$(5.6) \quad \operatorname{erf} \left\{ \left[\frac{\zeta}{4\tau^{1/2}} \mp \tau^{1/2} a \right] \mp i\tau^{1/2} b \right\} = A^\mp + iB^\mp,$$

dove a e b sono sempre dati dalle (5.3) e (5.4), si ha per la (5.5):

$$(5.7) \quad A^\mp = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left\{ \int_0^{g^\mp} e^{-x^2} dx \mp e^{-\omega^\mp y^2} \int_0^{b y^\mp} e^{y^2} \sin(2g^\mp y) dy \right\},$$

$$(5.8) \quad B^\mp = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-\omega^\mp y^2} \int_0^{b y^\mp} e^{y^2} \cos(2g^\mp y) dy,$$

dove si è posto $g^\mp = \left\{ \zeta/(4\tau^{1/2}) \right\} \pm \tau^{1/2} a$.

Servendosi ora delle formule precedenti si ottiene la parte reale di $u(\zeta, \tau)$:

$$(5.9) \quad u(\zeta, \tau) = 1 - e^{-\alpha\zeta} + \varepsilon \eta(\tau) \sin(\Omega\tau) - \varepsilon \eta(\tau) e^{-\zeta/2(1+\alpha)} \Gamma_1 \sin(\Omega\tau - (\zeta/2)b - \gamma_1) - \\ - \varepsilon \eta(\tau) e^{-\zeta/2(1-\alpha)} \Gamma_2 \sin(\Omega\tau + (\zeta/2)b - \gamma_2),$$

dove si è posto per brevità

$$(5.10) \quad \begin{cases} \Gamma_1(\zeta, \Omega, S, \tau) = \frac{1}{2} \{ (B^-)^2 + (1 - A^-)^2 \}^{1/2}, & \gamma_1(\zeta, \Omega, S, \tau) = \operatorname{tg}^{-1} \frac{B^-}{1 - A^-}, \\ \Gamma_2(\zeta, \Omega, S, \tau) = \frac{1}{2} \{ (B^+)^2 + (1 - A^+)^2 \}^{1/2}, & \gamma_2(\zeta, \Omega, S, \tau) = \operatorname{tg}^{-1} \frac{1 - B^+}{A^+}. \end{cases}$$

Il calcolo di $u(\zeta, \tau)$, necessario per conoscerne il comportamento in dipendenza di tutti i parametri, sarebbe estremamente laborioso; è tuttavia possibile fare sulla $u(\zeta, \tau)$ alcune interessanti considerazioni.

Quando il parametro magnetico S è molto grande ($1 + S \gg \Omega$), dalla (5.3) e dalla (5.4) si ha: $a \cong (1 + S)^{1/2}$ e $b \sim 0$; introducendo le nuove espressioni di A^\mp e B^\mp nella (5.10), la velocità $u(\zeta, \tau)$ si riduce alla forma seguente:

$$u(\zeta, \tau) \cong 1 - e^{-\alpha \zeta} + \varepsilon \eta(\tau) \sin(\Omega \tau) \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left[e^{-\alpha \zeta} \operatorname{erfc} \left[\frac{\zeta}{4 \tau^{1/2}} - (1 + S)^{1/2} \tau^{1/2} \right] + e^{-\zeta(1-\alpha)} \operatorname{erfc} \left[\frac{\zeta}{4 \tau^{1/2}} + (1 + S)^{1/2} \tau^{1/2} \right] \right] \right\}.$$

Gli strati fluidi paralleli al piano $\zeta = 0$ oscillano dunque in fase con $U_\infty(\tau)$, con ampiezza variabile nel tempo e con la distanza dal piano $\zeta = 0$. La velocità del generico strato assume ai tempi grandi la forma quasistazionaria $(1 - e^{-\alpha \zeta})(1 + \varepsilon \sin(\Omega \tau))$ in accordo con un risultato ottenuto per altra via da SURYAPRAKASARAO [5].

Si considerino ora le seguenti disuguaglianze

$$0 \leq \left| e^{-\omega^\mp} \int_0^{b\tau^\mp} e^{y^2} \frac{\sin\{2g^\mp y\}}{\cos\{y\}} dy \right| \leq e^{-\zeta \left(\frac{\zeta}{16\tau^\mp} \mp \frac{a}{2} \right)} e^{-\alpha + s\tau} b \sqrt{\tau},$$

per le quali si ha $\lim_{\tau \rightarrow \infty} A^\mp = \mp 1$ e $\lim_{\tau \rightarrow \infty} B^\mp = 0$; per la (5.10) è allora evidente che per $\tau \rightarrow \infty$ valgono i risultati seguenti:

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \Gamma_1 = 1, \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} \gamma_1 = 0, \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} \Gamma_2 = 0, \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} \gamma_2 = 0;$$

perciò ai tempi grandi la (5.9) si riduce all'espressione:

$$(5.11) \quad u(\zeta, \tau) \sim (1 - e^{-\alpha \zeta}) + \varepsilon \sin(\Omega \tau) - \varepsilon e^{-(\zeta/2)(1+\alpha)} \sin(\Omega \tau - (\zeta/2)b).$$

I primi due termini corrispondono alla risposta che darebbe alla perturbazione sinusoidale un fluido ideale; il terzo termine, dovuto alla presenza della viscosità, si può pensare come un'onda viscosa [10] di lunghezza d'onda $4\pi/b$, sensibile praticamente in uno strato prossimo al piano $\zeta = 0$ avente uno spessore dell'ordine di $2d_0/(1 + a)$. Uno strato fluido ad una quota ζ oscilla con un ritardo di fase $(\zeta/2)b$ rispetto a $U_\infty(\tau)$; ricordando la dipendenza di a e b da S e Ω , si giunge alla conclusione che lo spessore entro cui è sensibile l'onda vi-

scosa diminuisce al crescere del campo magnetico e della frequenza Ω . La lunghezza d'onda $4\pi/b$ diminuisce al crescere di Ω , mentre diventa assai grande per campi magnetici intensi; nel qual caso, come si è già visto, gli strati fluidi oscillano praticamente in fase con $U_\omega(\tau)$: l'interazione delle forze magnetiche e di quelle viscosse tende a compensare lo sfasamento degli strati.

Per frequenze elevate ($\Omega \gg 1 + S$) dalle (5.3), (5.4) si ricava $a \cong b \cong \cong \Omega^{1/2}/\sqrt{2}$, praticamente indipendenti dal campo magnetico; ma per le (5.7), (5.8) e (5.9) la velocità $u(\zeta, \tau)$ dipende dal campo magnetico attraverso a e b , dunque ad alte frequenze il moto del fluido non è influenzato dal campo magnetico: si può pensare che le fluttuazioni della velocità sono così rapide che le forze magnetiche non fanno in tempo ad agire, per l'inerzia degli strati fluidi. La (5.11) mostra poi che, in regime « quasistazionario », per $\Omega \gg 1 + S$, la velocità del fluido fluttua intorno al suo profilo iniziale in fase con $U_\omega(\tau)$, comportandosi come un fluido ideale, esternamente ad uno strato di spessore $d \sim \sqrt{\nu/\omega}$, con $\omega = (v_0^2/(4\nu))\Omega$. L'interpretazione fisica di questo fatto è ben nota [2]: a frequenze assai elevate le forze di origine viscosa non agiscono abbastanza rapidamente da vincere le fluttuazioni imposte dal gradiente di pressione esternamente allo strato di spessore $\sqrt{\nu/\omega}$ prossimo alla parete.

Lo sforzo sul piano $\zeta = 0$ si ottiene dalla (3.2) servendosi del risultato seguente:

$$\int_0^\tau \lambda^{-3/2} (1 - e^{-i\Omega\lambda}) e^{-\alpha + s\lambda} d\lambda = 2 [\tau^{-1/2} e^{-\alpha + s + i\Omega\tau} + \pi^{1/2} (1 + S + i\Omega)^{1/2} \operatorname{erf}(\sqrt{(1 + S + i\Omega)\tau}) - \pi^{1/2} (1 + S)^{1/2} \operatorname{erf}(\sqrt{(1 + S)\tau})];$$

lo sforzo complesso è dato da

$$(5.12) \quad \theta = \alpha - \frac{1}{2} i \varepsilon \eta(\tau) \left\{ e^{i\Omega\tau} + \frac{e^{-(1+s)\tau}}{(\pi\tau)^{1/2}} + (1 + S + i\Omega)^{1/2} e^{i\Omega\tau} \operatorname{erf}(\sqrt{(1 + S + i\Omega)\tau}) \right\}.$$

Se A e B sono la parte reale e immaginaria di $\operatorname{erf}(\sqrt{(1 + S + i\Omega)\tau})$, per la (5.5) e la (5.12) lo sforzo effettivo è dato dalla formula seguente:

$$(5.13) \quad \theta = \alpha + \frac{1}{2} \varepsilon \eta(\tau) \Phi(\Omega, S, \tau) \sin[\Omega\tau + \varphi(\Omega, S, \tau)],$$

dove

$$(5.14) \quad \Phi(\Omega, S, \tau) = \{ [1 + aA - bB]^2 + [aB + bA]^2 \}^{1/2},$$

$$(5.15) \quad \varphi(\Omega, S, \tau) = \operatorname{tg}^{-1} \frac{aB + bA}{1 + aA - bB}.$$

Dunque allo sforzo preesistente, dovuto al moto stazionario del fluido, si sovrappone per $\tau > 0$ uno sforzo oscillante, generalmente in anticipo rispetto alla perturbazione imposta dal gradiente di pressione.

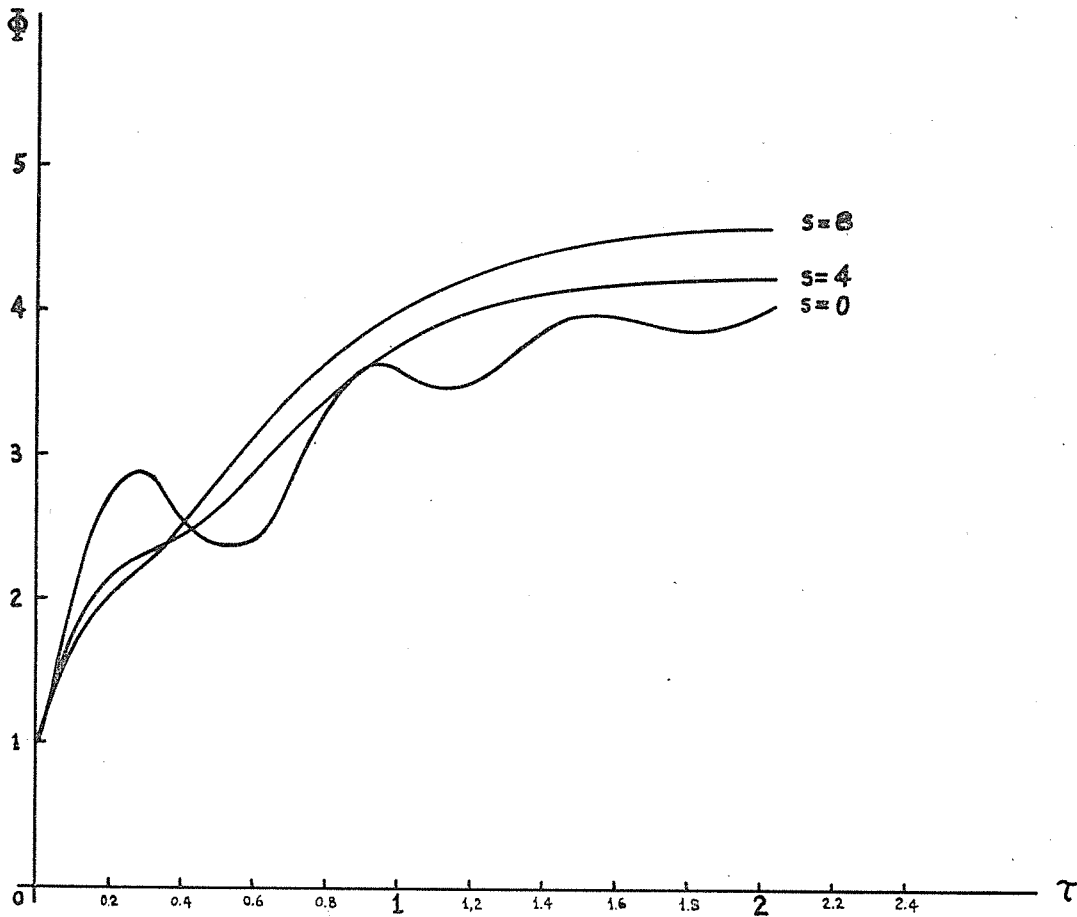


Fig. 4. - Ampiezza Φ in funzione di τ : $\Omega = 10$; $\varepsilon = 1$.

Si osservi ora che sono valide le seguenti disuguaglianze:

$$(5.16) \quad 0 \leq \left| e^{-a^2 \tau} \int_0^{b\sqrt{\tau}} e^{y^2} \frac{\cos}{\sin} \left\{ 2a \sqrt{\tau} y \right\} dy \right| \leq e^{-(b^2 - a^2)\tau} b \sqrt{\tau} = e^{-\alpha + s\tau} b \sqrt{\tau},$$

per le quali è facile concludere che $\lim_{\tau \rightarrow \infty} A = 1$ e $\lim_{\tau \rightarrow \infty} B = 0$; perciò in condizioni

stazionarie l'ampiezza e lo sfasamento della parte variabile dello sforzo sono date da

$$(5.17) \quad \begin{cases} \Phi(\Omega, S) = \{1 + [(1+S)^2 + \Omega^2]^{\frac{1}{2}} + \sqrt{2} [(1+S)^2 + \Omega^2]^{\frac{1}{2}} + (1+S)^{\frac{1}{2}}\}^{\frac{1}{2}} \\ \varphi(\Omega, S) = \text{tg}^{-1} \frac{\{[(1+S)^2 + \Omega^2]^{\frac{1}{2}} - (1+S)\}^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2} + \{[(1+S)^2 + \Omega^2]^{\frac{1}{2}} + (1+S)\}^{\frac{1}{2}}} \end{cases}$$

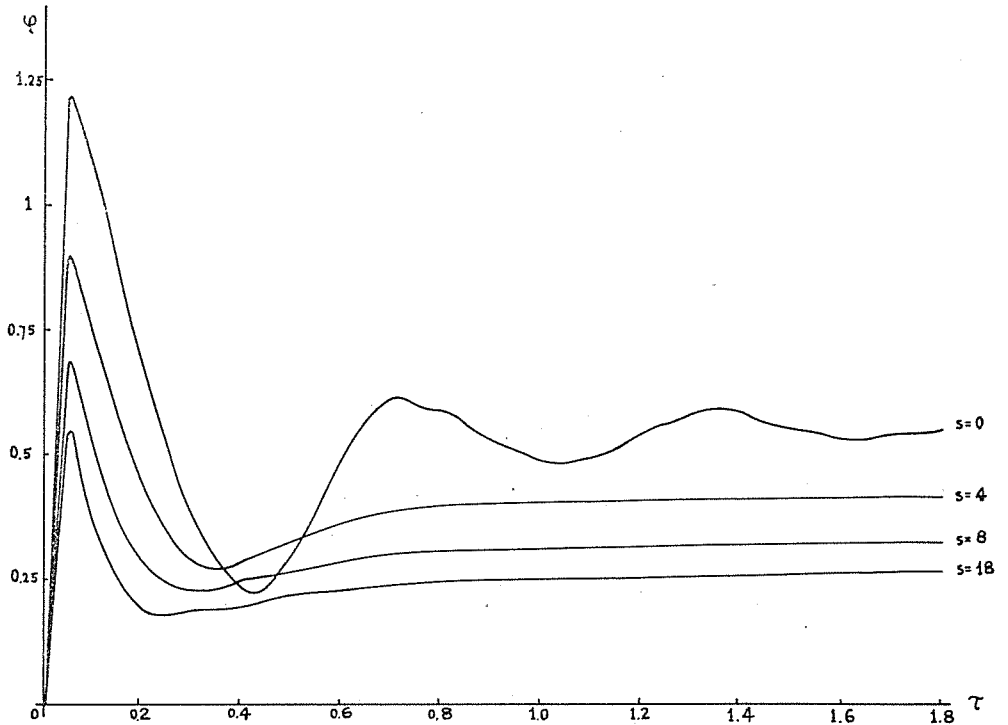


Fig. 5. - Fase φ in funzione di τ : $\Omega = 10$, $\varepsilon = 1$.

Per campi magnetici intensi ($1 + S \gg \Omega$) gli sforzi sul piano $\zeta = 0$ sono praticamente in fase con $U_{\omega}(\tau)$, mentre per frequenze elevate ($\Omega \gg 1 + S$) le (5.17) si riducono alle seguenti

$$(5.18) \quad \Phi(\Omega) \sim \{1 + \Omega + (2\Omega)^{\frac{1}{2}}\}^{\frac{1}{2}}, \quad \varphi(\Omega) \sim \text{tg}^{-1} \frac{\Omega^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2} + \Omega^{\frac{1}{2}}};$$

dunque in questo caso la parte dello sforzo dipendente dal tempo non è influenzata dal campo magnetico.

Le Figg. 4 e 5 mostrano come variano nel tempo l'ampiezza Φ e il ritardo di fase φ , dati dalle (5.14) e (5.15), per diversi valori del parametro magnetico.

È interessante notare come le oscillazioni, che Φ e φ presentano in assenza di campo magnetico ($S = 0$), vengono smorzate al crescere di questo. La Fig. 5 mostra anche che nella fase iniziale della perturbazione lo sforzo anticipa no-

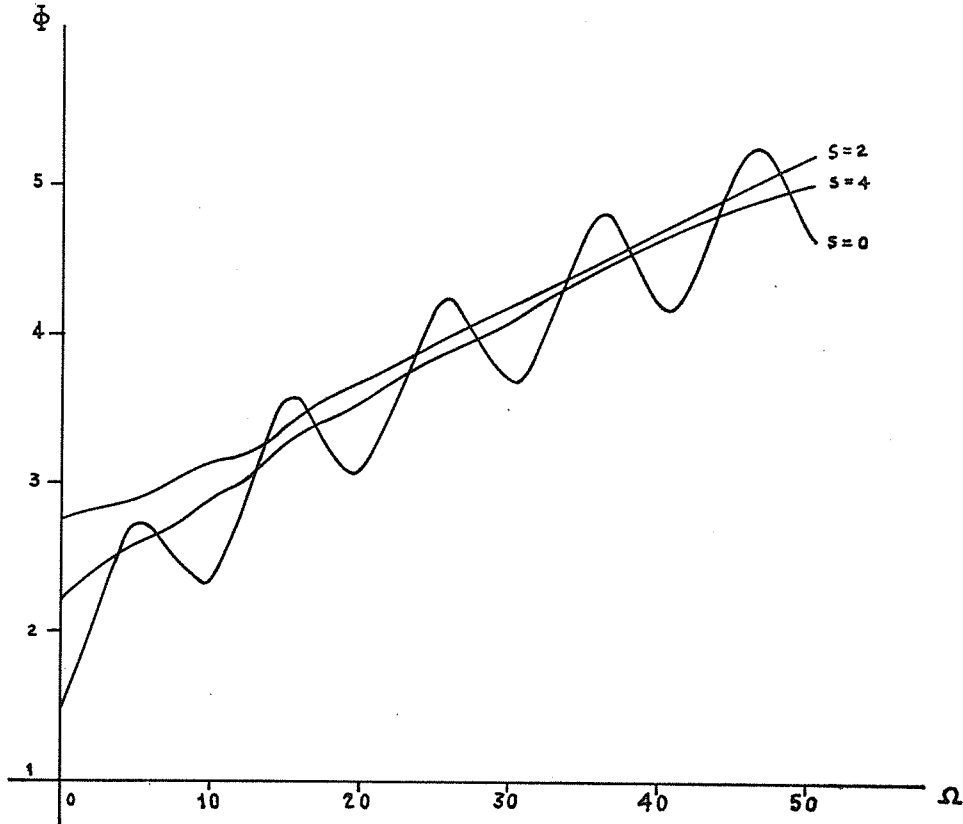


Fig. 6. - Ampiezza in funzione di Ω : $\tau = 0,6$; $\varepsilon = 1$.

tevolmente la velocità $U_{\infty}(\tau)$ del moto irrotazionale e quindi il corrispondente gradiente di pressione, per stabilizzarsi poi intorno ad un valore costante. Questo anticipo iniziale diminuisce al crescere del campo magnetico e quanto maggiore è questo tanto più rapidamente viene raggiunto il valore stazionario della fase. L'effetto stabilizzante del campo magnetico è ben visibile anche nelle Figg. 6 e 7, che mostrano rispettivamente l'ampiezza Φ e il ritardo di fase φ in funzione della frequenza Ω della perturbazione. Da queste figure e ancor più chiaramente dalle Figg. 6' e 7', relative al comportamento di Φ e φ per τ grande,

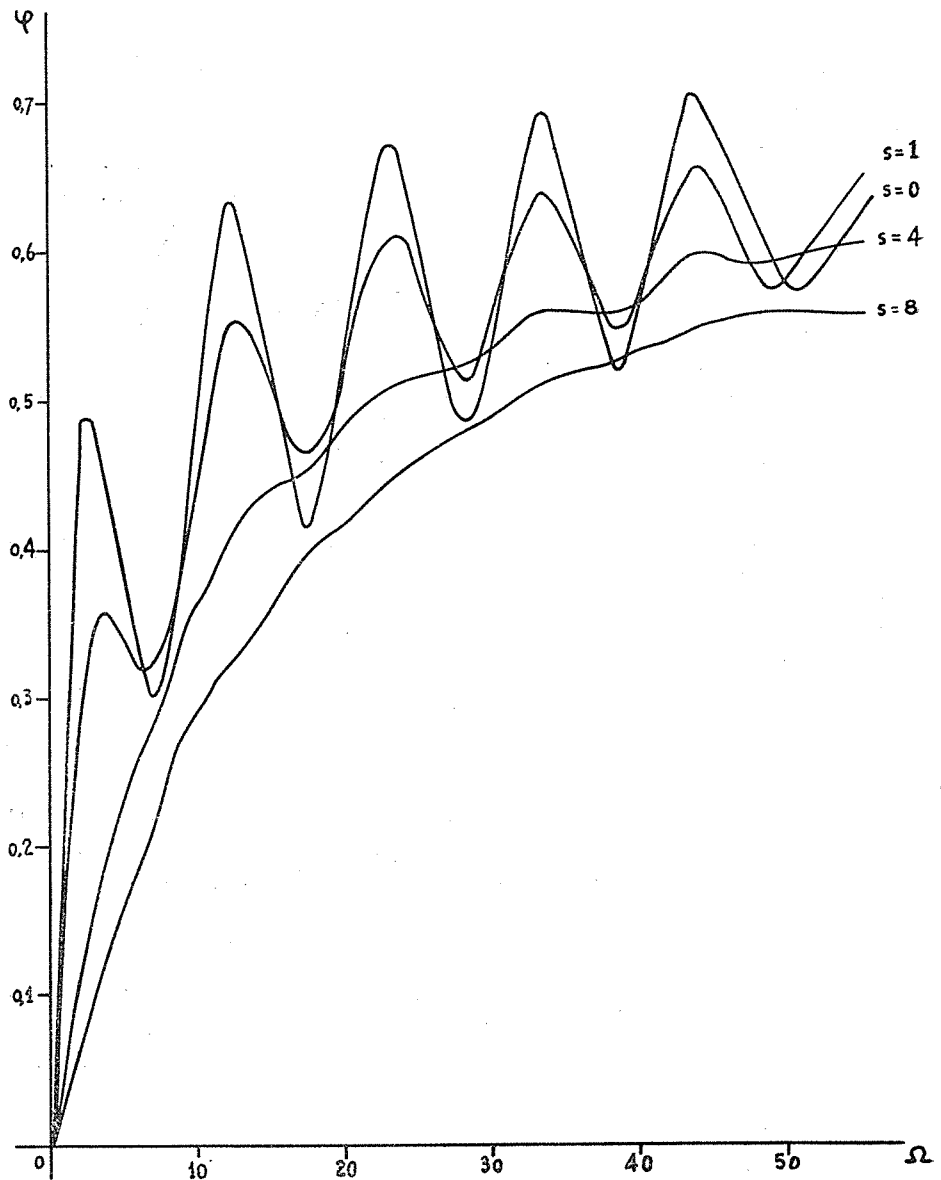


Fig. 7. - Fase in funzione di Ω : $\tau = 0,6$; $\varepsilon = 1$.

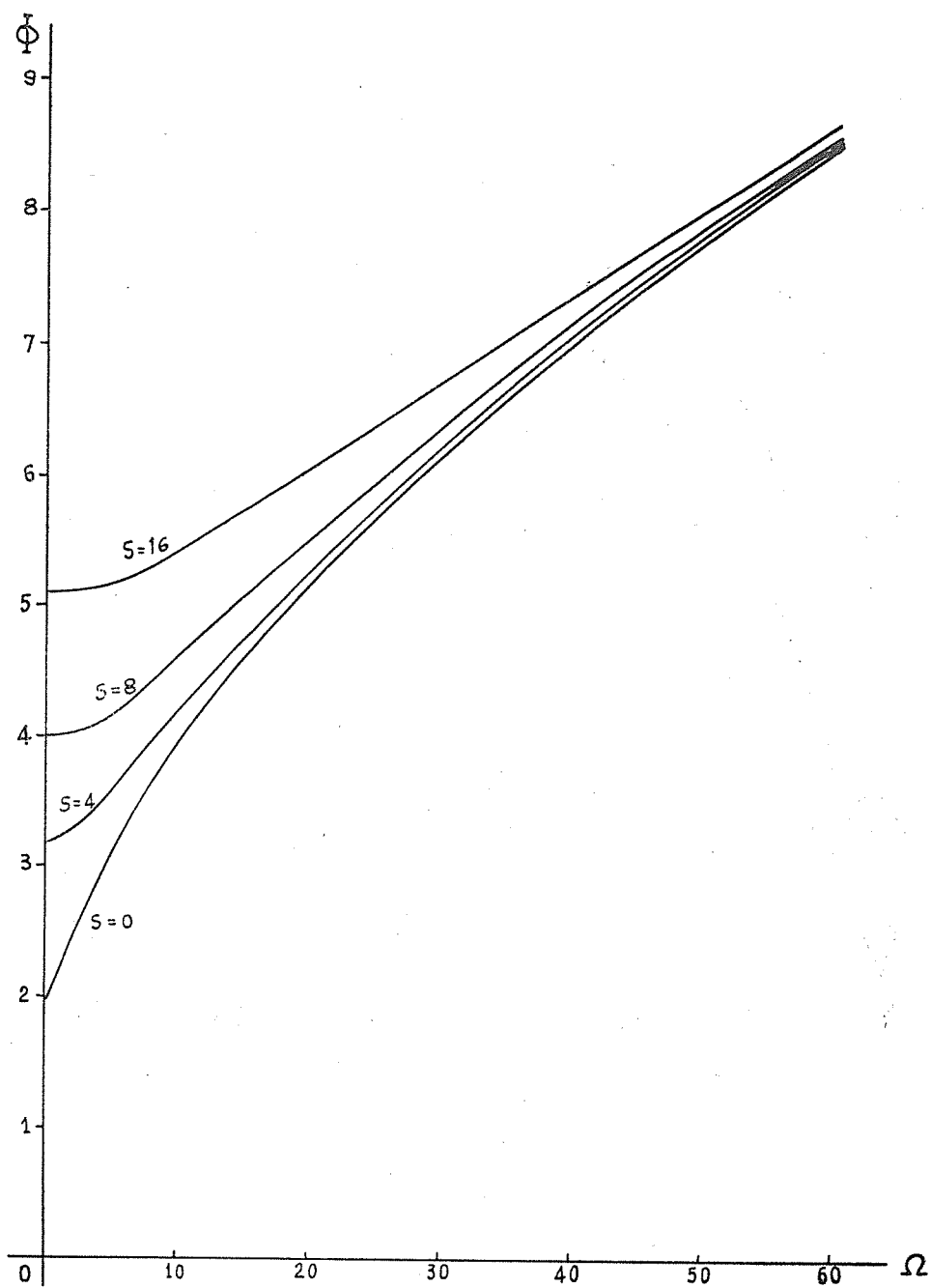


Fig. 6'. - Ampiezza Φ in funzione di Ω per tempi grandi: $\varepsilon = 1$.

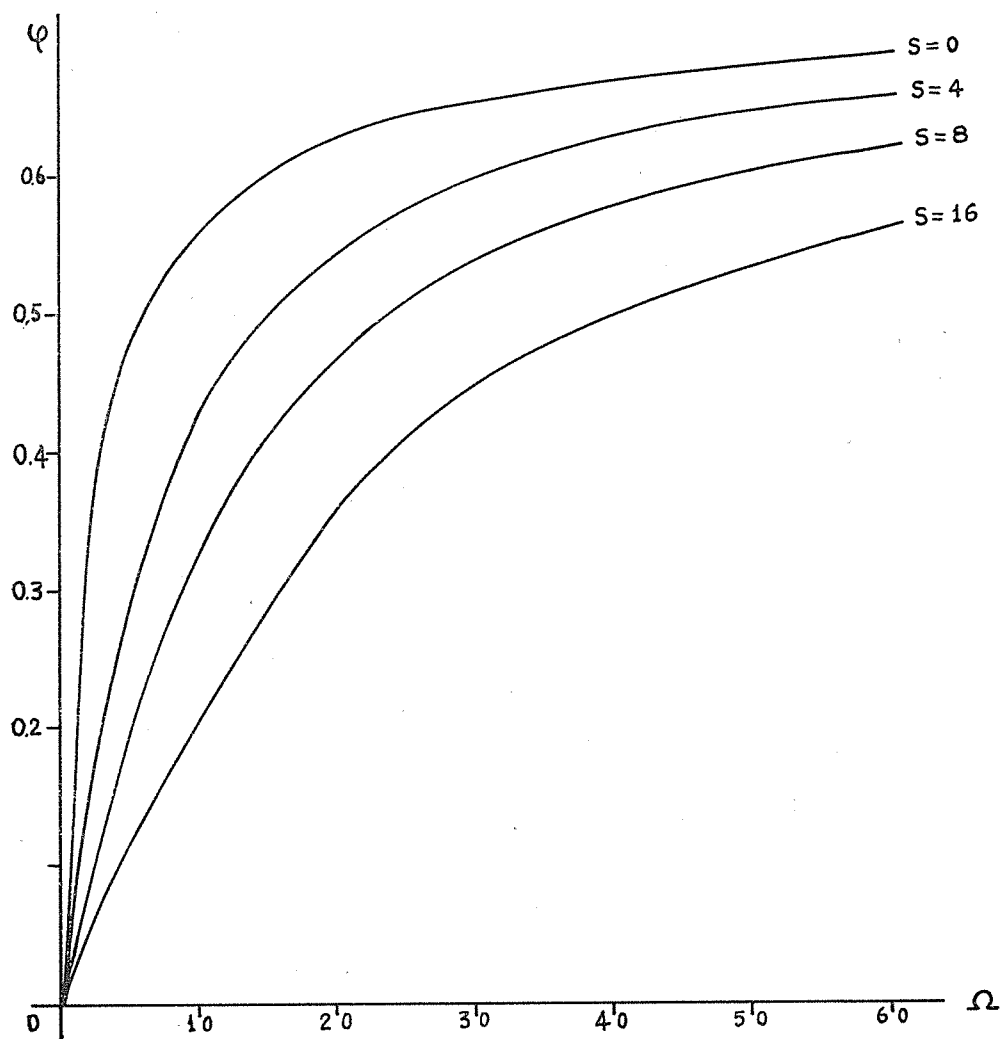


Fig. 7'. - Fase φ in funzione di Ω per tempi grandi: $\varepsilon = 1$.

appare evidente come al crescere della frequenza tutte le curve convergono verso un andamento comune: ciò è in accordo con il fatto che l'effetto del campo magnetico è sempre meno sensibile al crescere della frequenza.

Appendice.

Riportiamo alcuni risultati che sono serviti nel testo:

$$\begin{aligned}
 \text{a)} \quad & \int_0^{\tau} \lambda^{-1/2} e^{-(1+S)\lambda} d\lambda = \frac{\pi^{1/2}}{(1+S)^{1/2}} \operatorname{erf}(\sqrt{(1+S)\tau}), \\
 \text{b)} \quad & \int_0^{\tau} e^{-s\lambda} \operatorname{erfc}(\sqrt{\lambda}) d\lambda = \frac{1}{S(1+S)^{1/2}} \{(1+S)^{1/2}(1 - e^{-s\tau} \operatorname{erfc}(\sqrt{\tau})) - \operatorname{erf}(\sqrt{(1+S)\tau})\}, \\
 \text{c)} \quad & \int_0^{\tau} \lambda^{1/2} e^{-(1+S)\lambda} d\lambda = \frac{\pi^{1/2}}{2(1+S)^{3/2}} \operatorname{erf}(\sqrt{(1+S)\tau}) - \frac{\tau^{1/2}}{1+S} e^{-(1+S)\tau}, \\
 \text{d)} \quad & \int_0^{\tau} \lambda e^{-s\lambda} \operatorname{erfc}(\sqrt{\lambda}) d\lambda = \frac{\tau^2}{2} e^{-s\tau} \operatorname{erfc}(\sqrt{\tau}) - \frac{\tau^{3/2} e^{-(1+S)\tau}}{2\pi^{1/2}(1+S)} + \\
 & + \frac{3}{8} \frac{\operatorname{erf}(\sqrt{(1+S)\tau})}{(1+S)^{5/2}} - \frac{3}{4} \frac{\tau^{1/2} e^{-(1+S)\tau}}{\pi^{1/2}(1+S)^2} + \frac{S}{2} \int_0^{\tau} \lambda^2 e^{-s\lambda} \operatorname{erfc}(\sqrt{\lambda}) d\lambda.
 \end{aligned}$$

Bibliografia.

- [1] K. STEWARTSON, *The theory of unsteady laminar layers*, Ad. Appl. Mech. 6 (1960), 1-37.
- [2] M. J. LIGHTHILL, *The response of laminar skin friction and heat transfer to fluctuations in the stream velocity*, Proc. Roy. Soc. London. (Ser. A.) 224 (1954), 1-23.
- [3] J. T. STUART, *A solution of the Navier-Stokes equations illustrating the response of skin friction and temperature of an infinite plate thermometer to fluctuations in the stream velocity*, Proc. Roy. Soc. London (Ser. A.) 231 (1955), 116-130.
- [4] S. GIBELLATO, *Strato limite attorno ad una lastra piana investita da un fluido incompressibile dotato di una velocità che è somma di una parte costante e di una parte alternata*, Atti Accad. Sci. Torino, Cl. Sci. Fis. Mat. Natur., 89 (1955), 180-192.
- [5] U. SURYAPRAKASARAO, *The response of laminar skin friction, temperature and heat transfer to fluctuations in the stream velocity in the presence of a transverse magnetic field. I*, Z. Angew. Math. Mech. 42 (1962), 133-141; *II*, Z. Angew. Math. Mech. 43 (1963), 127-133.

- [7] J. WATSON, *A solution of the Navier-Stokes equations illustrating the response of a laminar boundary layer to a given change in the external stream velocity*, Quart. J. Mech. Appl. Math. **11** (1958), 302-325.
- [8] S. I. PAI, *Magnetogasdynamics and plasma dynamics*, Springer Verlag, Wien 1962.
- [9] A. GHIZZETTI, *Calcolo simbolico*, Zanichelli, Bologna 1943.
- [10] H. SCHLICHTING, *Boundary layer theory*, Pergamon Press, Oxford 1955.
- [11] S. GOLDSTEIN, *Lectures in fluid mechanics*, Interscience Publ., London 1960.

S u m m a r y .

It is examined both from the analytical and numerical point of view the influence of a transverse magnetic field on the unsteady laminar boundary layer of an electrically conducting fluid, which flows past an infinite porous flat plate.

* * *