

E. BOMPIANI (*)

Calotte superficiali del quinto ordine nello spazio proiettivo tridimensionale. (**)

1. - Oggetto della ricerca.

La geometria proiettiva-differenziale delle superficie nello spazio proiettivo 3-dimensionale equivale notoriamente ⁽¹⁾ allo studio delle proprietà invarianti del sistema di equazioni a derivate parziali (completamente integrabile)

$$\begin{cases} x_{uu} = \theta_u x_u + \beta x_v + \nu_1 x \\ x_{vv} = \gamma x_u + \theta_v x_v + \nu_2 x \end{cases} \quad (2)$$

rispetto alle trasformazioni:

$$x = \varrho(u, v) \bar{x}, \quad \bar{u} = \varphi(u), \quad \bar{v} = \psi(v)$$

in un dominio (u, v) in cui $\varrho(u, v) \neq 0$ e $\varphi_u \neq 0$, $\psi_v \neq 0$.

Due quaterne di soluzioni $x^i(u, v)$ del sistema, per ciascuna delle quali il $\text{Det}(x, x_u, x_v, x_{uv}) \neq 0$, danno due superficie proiettivamente equivalenti.

(*) Indirizzo: Via Verona 22, Roma, Italia.

(**) Ricevuto: 17-IX-1966.

(1) Si vedano, per esempio, i seguenti trattati classici: G. FUBINI e E. ČEĀ, *Geometria proiettiva-differenziale*, t. I (1926), t. II (1927), N. Zanichelli, Bologna. G. FUBINI et E. ČEĀ, *Introduction à la Géométrie projective différentielle des surfaces*, Gauthier-Villars, Paris 1931. G. BOL, *Projektive Differentialgeometrie*, Bd. 1 (1950), Bd. 2 (1954), Vandenhoeck Rupprecht, Göttingen.

(2) Gli indici u, v (in basso) indicano derivazioni rispetto ad u, v .

Quando sia fissata una scelta del fattore di proporzionalità $\varrho(u, v)$ i punti $x, x_{uv}, x_{\bar{u}\bar{v}}$, comunque si varino φ e ψ , sono allineati: essi definiscono una *normale proiettiva* relativa alla scelta di $\varrho(u, v)$ nel punto $x(u, v)$ della superficie.

Com'è pure notissimo si può in più modi fare una scelta intrinseca di ϱ : se, per esempio, $\beta \neq 0, \gamma \neq 0$, nel dominio considerato la scelta $\varrho = (\beta\gamma)^{-1}$ dà luogo alla *normale proiettiva di Fubini* in x . La congruenza delle normali di FUBINI ha la proprietà (caratteristica) di essere *coniugata* alla superficie, cioè è tale che le sue sviluppabili segano sulla superficie un doppio sistema coniugato.

Ma si possono definire in altri modi rette invarianti collegate ad un punto x della superficie ⁽³⁾: il fatto essenziale è che queste rette invarianti implicano la conoscenza di $x(u, v)$ e delle derivate d'ordine ≤ 4 ; cioè che tutte queste normali dipendono dalla *calotta del 4° ordine* σ^4 di centro x (e non da una calotta di ordine inferiore).

Con ciò non si è però ancora risolto il problema di associare un *riferimento invariante* al punto x della superficie (cioè un tetraedro e un punto unità): il che appare desiderabile se si vuole poi applicare alla superficie il metodo del riferimento mobile di E. CARTAN senza introdurre in esso parametri inessenziali.

A questo scopo invece di seguire il procedimento formale che conduce alle varie normalizzazioni ho dato ⁽⁴⁾ un procedimento geometrico diretto (i cui risultati verranno riassunti qui appresso) che conduce ad un ben determinato riferimento ⁽⁵⁾: esso dipende pure dalla calotta σ^4 e viceversa una σ^4 è determinata da un riferimento e da due *invarianti proiettivi finiti*: se $s \geq 5$ ogni $\sigma^s \supset \sigma^4$ è individuata assegnando ancora $\{s(s+3)/2\} - 14$ invarianti.

In questa Nota riprendo questo riferimento e dò le relazioni relative al passaggio da un punto ad uno infinitamente vicino; cioè al passaggio da σ^4 a σ^5 : il che equivale ad una costruzione in termini finiti di σ^5 ⁽⁶⁾.

⁽³⁾ Se ne veda, per esempio, in BOL (cfr. loc. cit. in ⁽¹⁾), § 82) un'esposizione sistematica.

⁽⁴⁾ E. BOMPIANI, *Costruzioni di elementi superficiali a partire da elementi curvilinei*, Atti, Accad. Naz. Lincei, Rend. (4) 25 (1937), 149-154. E. BOMPIANI, *Gli analoghi proiettivi dei teoremi di Meusnier e di Eulero*, Rend. Sem. Mat. Univ. Roma (continuati poi coi Rend. Mat. e Appl.) (4) 2 (1938), 3-24.

⁽⁵⁾ Questo è stato poi utilizzato da EN. BORTOLOTTI, *Quadriche di Moutard e fascio canonico*, Atti. Accad. Naz. Lincei, Rend. (4) 25 (1937), 149-154.

⁽⁶⁾ Ritengo opportuno, per comodità del lettore, riportare la definizione di elemento differenziale (o anche calotta, se di dimensione > 1) di dato ordine, come son venuto precisandola negli ultimi lavori.

Questa nozione può darsi in una qualsiasi varietà differenziabile V_n di dimensione n e di classe di differenzialità $\geq s$. Sia O un suo punto, U un aperto contenente O , e sia

Dò poi alcuni esempi spontanei di insiemi di σ^5 che sono pseudo-calotte e infine mostro come la determinazione di un riferimento invariante in ogni punto di una superficie determini su questa s -tessuti (s arbitrario) di curve proiettivamente invarianti.

2. - Un riferimento canonico.

Riassumo nei punti essenziali il procedimento che mi ha condotto al riferimento canonico già indicato, distinguendo le nozioni pertinenti alle calotte superficiali dei vari ordini (≤ 4) di centro O .

Nozioni dipendenti da σ^2 .

1) *Tangenti asintotiche*: tangenti alla sezione di σ^2 (o di una superficie che la contenga) col piano tangente in O . Supporremo queste tangenti reali e distinte e a contatto 3-punto con ogni superficie per σ^2 .

Nozioni dipendenti da σ^3 .

2) *Elementi differenziali del 2° ordine E^2* di centro O appartenenti alla sezione di σ^3 col piano tangente in O (7).

3) *Tangenti di Darboux*: tangenti in O che hanno con gli E^2 ora detti invariante = 1 (8).

dato un sistema ammissibile di coordinate in U , che si possono supporre nulle in O . Si considerino $n - m$ equazioni in esse, risolubili rispetto ad m delle coordinate (che diremo dipendenti) espresse in funzione delle altre (con funzioni di classe C^s); queste rappresentano una V_m per O . Due tali V_m hanno in O contatto d'ordine s se coincidono ivi, per le due V_m , le derivate d'ordine $\leq s$ delle coordinate dipendenti rispetto alle rimanenti.

La relazione di contatto di ordine s fissato è riflessiva, simmetrica e transitiva, cioè è una *relazione d'equivalenza*. Questa determina nella totalità delle V_m di classe C^s passanti per O una ripartizione in classi *d'equivalenza* (insieme quoziente rispetto alle relazioni dette); una di queste classi è l'*elemento differenziale* (o calotta per $m > 1$) di centro O che s'indicherà con E^s per $m = 1$ o σ_m^s per $m > 1$. È ovvio che l'elemento differenziale è un *ente geometrico* secondo la definizione di O. VEBLEN e J. A. C. WHITEHEAD. Quando m , come nella trattazione seguente ($m = 2$), conservi sempre lo stesso valore si può scrivere σ^s invece di σ_m^s .

(7) Dipendono pure da σ^3 gli E^2 delle asintotiche in O .

(8) Questa definizione delle tangenti di DARBOUX, che consente di definirle senza uscire dal piano tangente (e non come si fa di solito ricorrendo allo spazio), dipende dal fatto seguente: *in uno stesso piano due E^2 con lo stesso centro e una retta per questo hanno un invariante proiettivo finito* (cfr. la mia Nota: *Gli invarianti proiettivi nella teoria delle superficie*, Atti. Accad. Naz. Lincei, Rend. (6) 24 (1936), 323-332.

4) *Quadriche di Darboux*: $\supset \sigma^2$ e la cui intersezione con σ^3 tocca le tangenti di DARBOUX: esse formano *fascio*.

5) *Polarità di Darboux*: fra la stella di rette per O e il piano tangente rigato determinato dalle quadriche del fascio di DRABOUX.

6) *Corrispondenza fra le tangenti in O e rette di un piano assegnato ($\neq O$)*: data una tangente, fra le ∞^2 coniche per gli $\infty^1 E^3$ piani per essa ve ne sono ∞^1 (una per ogni E^3) tangenti al piano dato e i loro punti di contatto appartengono ad una retta incidente la tangente coniugata alla data. Al variare della tangente questa retta involuppa una quartica con tre punti doppi, di cui uno solo reale se O è iperbolico.

Nozioni dipendenti da σ^4 .

7) *Normale proiettiva* ⁽⁹⁾: è l'unica retta tale che gli E^4 segati su σ^4 dai piani per essa e per le tangenti di DARBOUX appartengono a coniche (per O e) per uno *stesso* punto della retta. Questo è il *punto improprio* della normale proiettiva.

8) *Piano improprio*: è quello contenente le tangenti in questo punto improprio alle coniche dette.

9) *Punto unità*: si consideri sul piano improprio il punto doppio reale di cui in 6) e la sua congiungente con O ; questa taglia la quadrica di DARBOUX tangente al piano improprio (nel punto improprio della normale proiettiva) in un punto ($\neq O$) che si prende come punto unità.

Col riferimento ora individuato (al quale sempre mi riferirò nel seguito) che indicherò con \mathfrak{R} la rappresentazione di σ^4 è, nelle ipotesi fatte,

$$z = xy + \frac{1}{3}(x^3 + y^3) + (px + qy)(x^3 + y^3) + [5],$$

ove p, q sono *invarianti* di σ^4 . Il loro significato (come birapporto) è immediato se si considera l'uno o l'altro E^3 della sezione piana tangente e la conica che lo contiene e passa per il punto improprio dell'altra tangente asintotica.

⁽⁹⁾ Questa *non* è la normale proiettiva di FUBINI, ma una delle tante rette invarianti per il punto (e non situate nel piano tangente).

Essa è indicata, nel lavoro di EN. BORTOLOTTI citato in ⁽⁵⁾, come *retta b*; questa e le altre rette invarianti note sono indicate alle pp. 35-37 del Bd. 2 citato di BOL (cfr. loc. cit. in ⁽¹⁾).

È ben determinata la F^3 : $z = xy + (x^3 + y^3)/3$; è l'unica $F^3 \supset \sigma^3$ e appartenente al fascio determinato dalle superficie cubiche spezzate come segue: quadrica di DARBOUX tangente al piano improprio insieme a questo piano; terna di piani per le tangenti di DARBOUX e per la normale proiettiva.

Le tangenti all'intersezione di F^3 con σ^4 sono quelle di DARBOUX e la retta $px + qy = 0$, $z = 0$ che può dirsi *tangente canonica* ⁽¹⁰⁾.

Questa è indeterminata se $p = q = 0$ (σ^4 ad invarianti nulli) e viceversa; essa coincide con la tangente reale di DARBOUX se $p = q$ (σ^4 ad invarianti uguali).

Assegnato il riferimento e una tangente in O vi sono $\infty^1 \sigma^4$ per cui essa è canonica (per $\bar{p} = cp$, $\bar{q} = cq$ qualunque sia c); queste σ^4 formano una classe d'equivalenza (nel sistema delle $\infty^2 \sigma^4$ con quel riferimento), cioè una *pseudocalotta* ⁽¹¹⁾.

3. - Spostamento del riferimento adottato su σ^5 .

Supponiamo ora data una calotta σ^5 :

$$(3.1) \quad z = xy + \frac{1}{3}(x^3 + y^3) + (px + qy)(x^3 + y^3) + \Phi_5(x, y) + [6]$$

con

$$(3.2) \quad \Phi_5(x, y) \equiv a_{50}x^5 + 5a_{41}x^4y + 10a_{32}x^3y^2 + \\ + 10a_{23}x^2y^3 + 5a_{14}xy^4 + a_{05}y^5.$$

Preso un punto $O'(\varepsilon_0, \eta_0, 0)$ appartenente a $\sigma^1(\varepsilon_0, \eta_0)$ infinitesimi e considerata la calotta $\sigma'^4 \subset \sigma^5$ con centro O' , determiniamo il riferimento canonico \mathcal{R}' relativo a σ'^4 . Nelle coordinate (x', y', z') di \mathcal{R}' la rappresentazione di σ'^4 è del tipo:

$$(3.3) \quad z' = x'y' + \frac{1}{3}(x'^3 + y'^3) + (p'x' + q'y')(x'^3 + y'^3) + [5]$$

⁽¹⁰⁾ Questa è la coniugata dell'ordinaria tangente canonica (cfr. EN. BORTOLOTTI, loc. cit. in ⁽⁵⁾, pp. 163-164.

⁽¹¹⁾ Per la nozione di *pseudoelemento differenziale*, e in particolare di *pseudocalotta*, cfr. « E. BOMPIANI, *Nuovi enti geometrici: pseudo-elementi differenziali*, Rend. Sem. Mat. Fis. Milano 33 (1963), 236-255 ».

con $p' = p + \delta p$, $q' = q + \delta q$ (δp , δq dipendenti da ε_0 , η_0).

Le formule per il passaggio da \mathfrak{R}' ad \mathfrak{R} sono del tipo

$$(3.4) \quad x = \frac{\varepsilon_0 + x' + \varepsilon}{1 - \tau}, \quad y = \frac{\eta_0 + y' + \eta}{1 - \tau}, \quad z = \frac{z' + \zeta}{1 - \tau},$$

con ε , η , ζ , τ forme di 1° grado a coefficienti infinitesimi in x' , y' , z' , cioè

$$(3.5) \quad \begin{cases} \varepsilon = \varepsilon_1 x' + \varepsilon_2 y' + \varepsilon_3 z', & \eta = \eta_1 x' + \eta_2 y' + \eta_3 z' \\ \zeta = \zeta_1 x' + \zeta_2 y' + \zeta_3 z', & \tau = \tau_1 x' + \tau_2 y' + \tau_3 z'. \end{cases}$$

Trascurando infinitesimi di ordine > 1 , alle (3.4) si possono sostituire le

$$(3.6) \quad x = \varepsilon_0 + x' + \varepsilon + \tau x', \quad y = \eta_0 + y' + \eta + \tau y', \quad z = z' + \zeta + \tau z'.$$

Per esprimere che $\sigma^4 \subset \sigma^5$ bisogna riscrivere la (3.1) sostituendovi per x , y , z le (3.6) e inoltre sostituire a z' l'espressione (3.3): l'equazione in x' , y' cui si giunge dev'essere un'identità (in x' , y') fino ai termini del 4° ordine inclusi.

L'effettivo calcolo, che non è il caso di riportare, fatto gradualmente per i termini dei successivi ordini dà

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= -9 p \varepsilon_0 - 6 q \eta_0, & \varepsilon_2 &= -\eta_0, \\ \varepsilon_3 &= 3 p \eta_0 + 9 p q \varepsilon_0 - 9 q^2 \eta_0 + 5(a_{14} - 4 a_{41})\varepsilon_0 + 5(a_{05} - 4 a_{32})\eta_0, \\ \eta_1 &= -\varepsilon_0, & \eta_2 &= -6 p \varepsilon_0 - 9 q \eta_0, \\ \eta_3 &= 3 q \varepsilon_0 - 9 p^2 \varepsilon_0 + 9 p q \eta_0 + 5(a_{50} - 4 a_{23})\varepsilon_0 + 5(a_{41} - 4 a_{14})\eta_0, \\ \zeta_1 &= \eta_0, & \zeta_2 &= \varepsilon_0, & \zeta_3 &= -15(p\varepsilon_0 + 9\eta_0), \\ \tau_1 &= \eta_0 - 6 q \varepsilon_0 + 9 p^2 \varepsilon_0 - 9 p q \eta_0 - 5(a_{50} - 4 a_{23})\varepsilon_0 - 5(a_{41} - 4 a_{14})\eta_0, \\ \tau_2 &= \varepsilon_0 - 6 p \eta_0 + 9 q^2 \eta_0 - 9 p q \varepsilon_0 - 5(a_{14} - 4 a_{41})\varepsilon_0 - 5(a_{05} - 4 a_{32})\eta_0, \\ \tau_3 &= 3(p \varepsilon_0 + q \eta_0) - 30(a_{32} \varepsilon_0 + a_{23} \eta_0), \\ \delta p &= \frac{2}{3} \eta_0 - 4 q \varepsilon_0 - 9 p^2 \varepsilon_0 - 6 p q \eta_0 + \frac{10}{3} (a_{50} + 2 a_{23})\varepsilon_0 + \frac{10}{3} (a_{41} + 2 a_{14})\eta_0, \\ \delta q &= \frac{2}{3} \varepsilon_0 - 4 p \eta_0 - 6 p q \varepsilon_0 - 9 q^2 \eta_0 + \frac{10}{3} (a_{14} + 2 a_{41})\varepsilon_0 + \frac{10}{3} (a_{05} + 2 a_{32})\eta_0. \end{aligned}$$

Queste relazioni determinano completamente sia il riferimento \mathfrak{R}' sia le variazioni δp , δq in funzione di \mathfrak{R} , degli *invarianti* p , q , a_{ik} di σ^5 e di ε_0 , η_0 come appunto deve essere.

In particolare se ci si sposta da O ad $O_1(s_1, 0, 0)$ con s_1 infinitesimo sulla $y = z = 0$ il riferimento \mathfrak{R}' è legato ad \mathfrak{R} dalle relazioni (in coordinate omogenee)

$$(3.7) \quad \begin{cases} x = x' + s_1(t' - 9 p x' + \varepsilon_3' z') \\ y = y' + s_1(-x' - 6 p y' + \eta_3' z') \\ z = z' + s_1(y' - 15 p z') \\ t = t' + s_1 \{ (3 q + \eta_3') x' + (\varepsilon_3' - 1) y' + 3(10 a_{32} - p) z' \}, \end{cases}$$

con

$$(3.8) \quad \varepsilon_3^1 = 9 p q + 5(a_{14} - 4 a_{41}), \quad \eta_3^1 = 3 q - 9 p^2 + 5(a_{30} - 4 a_{23})$$

e in conseguenza, indicati con gli apici 1 i valori dei parametri relativi allo spostamento eseguito,

$$(3.9) \quad \tau_1^1 = -3 q - \eta_3^1, \quad \tau_2^1 = 1 - \varepsilon_3^1, \quad \tau_3^1 = 3(p - 10 a_{32}).$$

Analogamente il riferimento \mathfrak{R}_2 relativo ad $O_2(0, s_2, 0)$ è legato ad \mathfrak{R} dalle relazioni (in coordinate omogenee)

$$(3.10) \quad \begin{cases} x = x' + s_2(-6 q x' - y' + \varepsilon_2^3 z') \\ y = y' + s_2(t' - 9 q y' + \eta_3^2 z') \\ z = z' + s_2(x' - 15 q z') \\ t = t' + s_2 \{ (\eta_3^2 - 1) x' + (3 q + \varepsilon_3^2) y' + 3(10 a_{23} - q) z' \}, \end{cases}$$

con (usando gli apici 2 per il secondo spostamento):

$$(3.11) \quad \begin{cases} \varepsilon_3^2 = 3 p - 9 q^2 + 5(a_{05} - 4 a_{32}), & \eta_3^2 = 9 p q + 5 a_{41} - 4 a_{14} \\ \tau_1^2 = 1 - \eta_3^2, & \tau_2^2 = -3 p - \varepsilon_3^2, & \tau_3^2 = 3(q - 10 a_{23}). \end{cases}$$

Le variazioni subite dagli invarianti p, q passando da O ad O_1 sono (per le ultime (3.6), per $\varepsilon_0 = s_1, \eta_0 = 0$)

$$(3.12) \quad \begin{cases} p_1 = \frac{\delta p}{s_1} = -4q - 9p^2 + \frac{10}{3}(a_{50} + 2a_{23}) \\ q_1 = \frac{\delta q}{s_1} = \frac{2}{3} - 6pq + \frac{10}{3}(a_{14} + 2a_{41}), \end{cases}$$

e analogamente (per $\varepsilon_0 = 0, \eta_0 = s_2$)

$$(3.13) \quad \begin{cases} p_2 = \frac{\delta p}{s_2} = \frac{2}{3} - 6pq + \frac{10}{3}(a_{41} + 2a_{14}) \\ q_2 = \frac{\delta q}{s_2} = -4p - 9q^2 + \frac{10}{3}(a_{05} + 2a_{32}), \end{cases}$$

sicchè anche

$$\delta p = p_1 \varepsilon_0 + q_1 \eta_0, \quad \delta q = p_2 \varepsilon_0 + q_2 \eta_0.$$

4. - Determinazione in termini finiti di σ^5 .

Le (3.7) mostrano che data σ^4 (cioè dati il riferimento \mathcal{R} e gli invarianti p, q relativi ad O) il riferimento \mathcal{R}_1 è determinato da $\eta'_3, \varepsilon'_3, a_{32}$, cioè anche per le (3.8) da

$$a_{50} - 4a_{23}, \quad a_{14} - 4a_{41}, \quad a_{32}$$

e così \mathcal{R}_2 da

$$a_{05} - 4a_{32}, \quad a_{41} - 4a_{14}, \quad a_{23}$$

e queste grandezze determinano $\varphi_5(x, y)$. Si può anche osservare che in conseguenza delle (3.9), (3.11), la calotta σ^5 è determinata (data σ^4) dalla conoscenza dei piani impropri relativi ad $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$ costruiti per i punti O_1, O_2 prossimi ad O sulle tangenti asintotiche. Per ridurre la costruzione di σ^5 a termini finiti basta considerare su ciascuna faccia di \mathcal{R} le rette caratteristiche relative agli involuipi delle facce omologhe quando si faccia variare O sulle asintotiche per esso.

Al variare di O sull'asintotica tangente ad $y = 0$ le rette caratteristiche sono

$$\text{su } x = 0: \quad \varepsilon_3^1 z + 1 = 0,$$

$$\text{su } y = 0: \quad \eta_3^1 z - x = 0,$$

$$\text{su } t = 0: \quad (3q + \eta_3^1)x + (\varepsilon_3^1 - 1)y + 3(10a_{32} - p)z = 0$$

e analogamente per l'altra asintotica. Tali rette determinano σ^5 .

La calotta σ^5 è determinata dal riferimento \mathfrak{R} relativo al centro O , dagli invarianti p, q e inoltre dalle rette caratteristiche, sulle facce di \mathfrak{R} diverse dal piano tangente, che si ottengono variando O (quindi \mathfrak{R}) sulle asintotiche per esso.

Alle rette caratteristiche per lo spostamento da O ad O_1 possono sostituirsi i seguenti punti caratteristici sugli spigoli di \mathfrak{R} (cioè del suo tetraedro) ⁽¹²⁾:

$$x = y = 0, \quad z = -1, \quad t = \varepsilon_3^1; \quad y = t = 0, \quad x = \eta_3^1, \quad z = 1;$$

$$x = t = 0, \quad z = \varepsilon_3^1 - 1, \quad y = 3(10a_{32} - p)$$

e per lo spostamento da O ad O_2

$$x = y = 0, \quad z = -1, \quad t = \eta_3^2; \quad x = t = 0, \quad y = \varepsilon_3^2, \quad z = 1;$$

$$y = t = 0, \quad x = 3(10a_{23} - q), \quad z = \eta_3^2 - 1.$$

La calotta σ^4 e questi 6 punti caratteristici sugli spigoli di \mathfrak{R} determinano σ^5 .

La prima terna determina, a norma delle (3.8), $a_{14} - 4a_{41}$, $a_{50} - 4a_{23}$, a_{32} , la seconda $a_{41} - 4a_{14}$, $a_{05} - 4a_{32}$, a_{23} .

5. - Alcune pseudocalotte del 5° ordine.

Si consideri una calotta σ^5 , il riferimento \mathfrak{R} definito come sopra dalla sua σ^4 e le rette caratteristiche, per uno spostamento eseguito da O sopra una asintotica, sulle tre facce di \mathfrak{R} passanti per il vertice del tetraedro opposto al piano tangente.

⁽¹²⁾ I punti delle terne seguenti sono scelti in modo che ciascuna terna abbia un punto su ciascuno spigolo non appartenente al piano tangente.

Tutte le calotte σ^5 che danno luogo agli stessi elementi (\mathcal{R} e le dette caratteristiche) formano una *classe d'equivalenza*, consistente di ∞^3 σ^5 queste costituiscono una *pseudocalotta* e vi sono ∞^3 di tali pseudocalotte.

Un'altra ripartizione delle ∞^6 $\sigma^5 \supset \sigma^4$ assegnata in classi d'equivalenza o pseudocalotte si ottiene considerando le rette caratteristiche relative ad uno spostamento infinitesimo di O sull'altra asintotica.

Un altro tipo di pseudocalotta (per una σ^4 assegnata) si ha considerando le $\sigma^5 \supset \sigma^4$ per le quali non solo le tre caratteristiche prima considerate ma anche le variazioni degli invarianti p, q (cioè in sostanza p_1, q_1) per uno spostamento di O sulla prima asintotica sono le stesse. Poichè, a norma delle (3.12), p_1 e q_1 dipendono da $a_{50} + 2a_{23}, a_{14} + 2a_{41}$, le condizioni precedenti determinano tutti i coefficienti di σ^5 meno a_{05} .

Le calotte in esame sono dunque del tipo

$$z = xy + \frac{1}{3}(x^3 + y^3) + (px + qy)(x^3 + y^3) + x\varphi_4(x, y) + a_{05}y^5 + [6],$$

ove $\varphi_4(x, y)$ è una forma assegnata di 4° grado e a_{05} è variabile ad arbitrio.

Le ∞^1 σ^5 così ottenute formano una *pseudocalotta*; e vi sono ∞^5 di tali pseudocalotte determinate da σ^4 .

Per dare altri esempi di pseudocalotte consideriamo la normale (com'è stata qui definita) in O e quella in $O'(\varepsilon_0, \eta_0, 0)$.

Affinchè queste due normali s'incidano occorre e basta che sia

$$\varepsilon_3 \eta_0 = \eta_3 \varepsilon_0$$

cioè, riferendosi alle (3.6),

$$[3p - 9q^2 + 5(a_{05} - 4a_{32})]\eta_0^2 - [3q - 9p^2 + 5(a_{50} - 4a_{23})]\varepsilon_0^2 = 25(a_{41} - a_{14})\varepsilon_0 \eta_0.$$

Questa equazione, omogenea in ε_0, η_0 , definisce due tangenti per O che si possono chiamare *tangenti di curvatura* rispetto al sistema di normali scelte.

Sono condizioni geometriche le seguenti:

1°) le tangenti di curvatura dividono armonicamente le tangenti asintotiche; dev'essere

$$(5.1) \quad a_{41} = a_{14};$$

2°) le tangenti di curvatura coincidono con le tangenti asintotiche;

dev'essere

$$(5.2) \quad 5(a_{50} - 4 a_{23}) = 9 p^2 - 3 q, \quad 5(a_{05} - 4 a_{32}) = 9 q^2 - 3 p;$$

3°) le tangenti di curvatura sono indeterminate; devono essere soddisfatte insieme le (5.1) e le (5.2).

Le $\infty^4 \sigma^5$ con le stesse tangenti di curvatura già costituiscono una *pseudocalotta*; così pure gli insieme più particolari, contenuti in questa pseudocalotta e soddisfacenti alla condizione 1°) o 2°) sono pseudocalotte; e tale è anche l'insieme delle $\infty^3 \sigma^5$ soddisfacenti alla condizione 3°).

6. - Calotte σ^5 cubiche.

Esaminiamo le superficie algebriche d'ordine minimo che si possono far passare per una calotta assegnata.

È già noto che per una calotta (generica) σ^3 non si può far passare in generale una quadrica: sicchè formano un insieme particolare le *calotte (quadriche)* per cui invece ciò è possibile ⁽¹³⁾.

Poichè è evidente che ogni σ^3 appartiene ad F^3 (superficie cubiche) cerchiamo le $F^3 \supset \sigma^4$ assegnata:

$$z = xy + \frac{1}{3}(x^3 + y^3) + (px + qy)(x^3 + y^3) + [5].$$

Sia

$$z = xy + (l_1 x + l_2 y)z + \varphi_3(x, y) + lz^2 + \varphi_2(x, y)z + \varphi_1(x, y)z^2 + \varphi_0 z^3$$

l'equazione di una F^3 (la cui σ^2 di centro O coincide con la $\sigma^2 \subset \sigma^4$), con $\varphi_s(s, y)$ forma di grado s .

Affinchè essa contenga σ^4 dev'essere

$$\frac{1}{3}(x^3 + y^3) \equiv l_1 x^2 y + l_2 x y^2 + \varphi_3(x, y),$$

$$(px + qy)(x^3 + y^3) \equiv \frac{1}{3}(l_1 x + l_2 y)(x^3 + y^3) + \{lxy + \varphi_2(x, y)\}xy,$$

⁽¹³⁾ C. LONGO, *Le rette di una superficie cubica*, Boll. Un. Mat. Ital. (3) 2 (1947), 23-24.

cioè

$$l_1 = 3p, \quad l_2 = 3q,$$

$$\varphi_3(x, y) \equiv \frac{1}{3}(x^3 + y^3) - 3(px + qy)xy, \quad \varphi_2(x, y) \equiv -lxy,$$

quindi le $F^3 \supset \sigma^4$ sono:

$$z = xy + 3(px + qy)(z - xy) + \frac{1}{3}(x^3 + y^3) + l(z - xy)z + \varphi_1(x, y)z^2 + \varphi_0 z^3,$$

con $l, \varphi_0, \varphi_1(x, y)$ arbitrarie; quindi vi sono $\infty^4 F^3 \supset \sigma^4$.

Cerchiamo allora se si possano condurre F^3 per una σ^5 :

$$z = xy + \frac{1}{3}(x^3 + y^3) + (px + qy)(x^3 + y^3) + \Phi_5(x, y) + [6]$$

con $\Phi_5(x, y)$ forma del 5° ordine. Si trova che dev'essere

$$\Phi_5(x, y) \equiv (px + qy)^2(x^3 + y^3) + \frac{1}{3}lxy(x^3 + y^3) + \varphi_1(x, y)x^2y^2.$$

Ora questa non è una forma generale del 5° ordine perchè i coefficienti di x^5, y^5 sono p^2 e q^2 già determinati da σ^4 , e i coefficienti di x^4y e di xy^4 sono uguali ($= 2pq + \frac{1}{3}l$). Quindi:

Data una σ^4 vi sono soltanto ∞^3 (e non ∞^6) σ^5 appartenenti ad F^3 che la contengano: per ogni tale σ^5 vi sono $\infty^1 F^3$.

Queste particolari calotte potranno dirsi *cubiche*.

7. - Tessuti di curve proiettivamente invarianti sopra una superficie.

Il fatto di avere definito in un punto (centro di una generica calotta σ^4) un riferimento proiettivamente invariante porta notevoli conseguenze.

Si consideri la rappresentazione di una superficie riferita ad un tale riferimento:

$$z = xy + \frac{1}{3}(x^3 + y^3) + (px + qy)(x^3 + y^3) + \Phi_5(x, y) + \Phi_6(x, y) + \dots$$

Qualunque superficie (algebraica) si consideri rappresentata dall'uguagliare z allo sviluppo a secondo membro *troncato in un punto qualsiasi* è legata in modo proiettivamente invariante alla superficie data.

Sia questa superficie algebrica una F^{s-1} (l'ultima forma che figura nel suo sviluppo è Φ_{s-1}).

L'intersezione di F^{s-1} con la superficie data presenta nell'origine del riferimento un punto s -plo, quindi definisce in modo proiettivamente invariante in quel punto un gruppo di s tangenti. Al variare del punto sulla superficie e considerando le curve tangenti in ciascun punto a quelle rette si ha un *s-tessuto proiettivamente definito*.

S'intende che questi s -tessuti (al variare di s) potranno non essere tutti distinti: già per $s = 4$ si ha il 3-tessuto costituito dalle linee di DARBOUX e dal tessuto delle linee coniugate a quelle canoniche.

S u n t o .

Significato geometrico degli invarianti proiettivi di una calotta superficiale del 5° ordine nello spazio ordinario.

S u m m a r y .

Geometric interpretation of the projective invariants of a 5th order surface cap in the ordinary space.

* * *

