

ANTONIO CARLO GARIBALDI (*)

Complemento ad una Nota sulle vibrazioni
di un sistema non lineare a due gradi di libertà. (**)

1. - Nel lavoro «Vibrazioni forzate di particolari sistemi non lineari, in due gradi di libertà», pubblicato in questa Rivista nel vol. 4° della 2ª serie, sono incorso in una svista su cui intendo ora fermarmi brevemente.

Precisamente ho studiato col metodo di CARTWRIGHT [1] (¹), accanto ad altre equazioni differenziali, la seguente:

$$(1) \quad \ddot{x} + \dot{x} + \varepsilon \left(\alpha \frac{d^2}{dt^2} - \beta \right) \left(\frac{x^3}{3} - x \right) = \varepsilon E \cos(\omega t + \varphi), \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0,$$

ottenendo risultati rigorosamente giustificati. La (1) era stata introdotta costruendo un esempio meccanico di oscillatore non lineare del terzo ordine che generalizza l'oscillatore di VAN DER POL. Per un banale errore di segno ho dato l'equazione nella forma (1) invece che nell'altra:

$$(2) \quad \ddot{x} + \dot{x} + \varepsilon \left(\alpha \frac{d^2}{dt^2} + \beta \right) \left(\frac{x^3}{3} - x \right) = \varepsilon E \cos(\omega t + \varphi), \quad \alpha > \beta > 0.$$

Lo studio della (2) è perfettamente simile a quello da me sviluppato per la (1), ma ritengo utile indicare qui i risultati completi e interpretarli dal punto di vista fisico.

(*) Indirizzo: Istituto Matematico dell'Università, Genova, Italia.

(**) Ricevuto: 10-XII-1966.

(¹) I numeri in [] si riferiscono alla Bibliografia finale.

2. - Se si cercano le soluzioni della (2) aventi la forma

$$(3) \quad x(t) = z + r \sin t + \varepsilon X(t) + O(\varepsilon^2),$$

si perviene, come ho mostrato dettagliatamente in [2], a determinare i valori delle costanti z , r , φ , che corrispondono a soluzioni periodiche, a meno dei termini $O(\varepsilon^2)$, attraverso lo studio dei punti singolari del sistema autonomo:

$$(4) \quad \begin{cases} \frac{dz}{d\tau} = 2\beta z \left(1 - \frac{r^2}{2} - \frac{z^2}{3}\right) \\ \frac{dr}{d\tau} = (\alpha - \beta) r \left(1 - \frac{r^2}{4} - z^2\right) - E \sin \varphi, & \alpha > \beta > 0, & \sigma = \frac{1 - \omega}{\varepsilon} \\ \frac{d\varphi}{d\tau} = 2\sigma - \frac{E}{r} \cos \varphi. \end{cases}$$

Per la loro stabilità va considerato il sistema alle variazioni associato a (4):

$$(5) \quad \begin{cases} \frac{d\zeta}{d\tau} = 2\beta \zeta \left(1 - \frac{r_0^2}{2} - z_0^2\right) - 2\beta r_0 z_0 \varrho \\ \frac{d\varrho}{d\tau} = (\alpha - \beta) \left\{ \varrho \left(1 - \frac{3r_0^2}{4} - z_0^2\right) - 2r_0 z_0 \zeta \right\} - E \cos \varphi_0 \cdot \psi \\ \frac{d\psi}{d\tau} = \frac{E}{r_0^2} \cos \varphi_0 \cdot \varrho + \frac{E}{r_0} \sin \varphi_0 \cdot \psi, \end{cases}$$

dove z_0 , r_0 , φ_0 sono i valori corrispondenti ad un punto singolare.

Il sistema (4) ammette punti singolari con $z = 0$ (che ho chiamato di 1ª specie) se:

$$(9) \quad \begin{cases} (\alpha - \beta) r \left(1 - \frac{r^2}{4}\right) = E \sin \varphi \\ 2\sigma = \frac{E}{r} \cos \varphi. \end{cases}$$

Eliminando φ si ha per r l'equazione

$$(7) \quad \left[(\alpha - \beta)^2 \left(1 - \frac{r^2}{4}\right)^2 + 4\sigma^2 \right] r^2 = E^2.$$

Poniamo:

$$(8) \quad x = \frac{2\sigma}{\alpha - \beta}, \quad y = \frac{r^2}{4}, \quad F^2 = \frac{E^2}{(\alpha - \beta)^2}.$$

La (7) viene allora a rappresentare nel piano x, y un sistema di ∞^1 cubiche, al variare del parametro $F \geq 0$, rappresentato dall'equazione

$$(9) \quad F^2 = 4y [x^2 + (1 - y)^2],$$

che è stata studiata da vari Autori [1]. Per ogni valore di x avremo così al più tre valori di y che corrispondono a punti singolari con $z = 0$, $r = \sqrt{4y}$, φ dato dalle (6). Questi punti hanno un esponente caratteristico $\mu_1 = \beta(2 - r_0^2)$ ed altri due che verificano l'equazione

$$\mu^2 - A_1\mu + A_2 = 0,$$

con

$$A_1 = (\alpha - \beta)(2 - r_0^2), \quad A_2 = 4\sigma^2 + (\alpha - \beta)^2 \left(1 - \frac{r_0^2}{4}\right) \left(1 - \frac{3r_0^2}{4}\right).$$

Pertanto le condizioni di stabilità sono:

$$(10) \quad \begin{cases} 1 - 2y < 0 \\ x^2 + (1 - y)(1 - 3y) > 0. \end{cases}$$

Risultano stabili i punti che nel piano x, y stanno sopra la retta

$$(11) \quad y = \frac{1}{2},$$

e sono esterni all'ellisse

$$(12) \quad x^2 + 3y^2 - 4y + 1 = 0.$$

Il sistema (4) ha inoltre punti singolari con $z \neq 0$ (di 2^a specie) dati da

$$(13) \quad \begin{cases} 1 - \frac{z^2}{3} - \frac{r^2}{2} = 0 \\ (\alpha - \beta) r \left(1 - \frac{r^2}{4} - z^2\right) = E \sin \varphi \\ 2 \sigma r = E \cos \varphi. \end{cases}$$

Si ha ora per r l'equazione

$$r^2 \left[(\alpha - \beta)^2 \left(-2 + \frac{5}{4} r^2 \right)^2 + 4\sigma^2 \right] = E^2,$$

mentre risulta

$$z^2 = 3 \left(1 - \frac{r^2}{2} \right).$$

Fatte le posizioni (8), ci si riduce allo studio del sistema di cubiche

$$(14) \quad F^2 = 4y [x^2 + (5y - 2)^2],$$

di cui però vanno presi soltanto i punti ubicati sotto la retta (11). Il sistema di cubiche (14) è analogo al sistema (9). L'equazione caratteristica per la stabilità di questi punti singolari è

$$(15) \quad \mu^3 - A_1 \mu^2 + A_2 \mu - A_3 = 0,$$

con

$$\left\{ \begin{array}{l} A_1 = 2\alpha (r_0^2 - 2) \\ A_2 = 4\sigma^2 + (\alpha - \beta)^2 \left(\frac{3}{4} r_0^2 - 2 \right) \left(\frac{5}{4} r_0^2 - 2 \right) + 2\beta(\alpha - \beta)(r_0^2 - 2)(5r_0^2 - 4) \\ A_3 = 2\beta (r_0^2 - 2) \left\{ 4\sigma^2 + (\alpha - \beta)^2 \left(\frac{5}{4} r_0^2 - 2 \right) \left(\frac{15}{4} r_0^2 - 2 \right) \right\}. \end{array} \right.$$

L'equazione (15) è di terzo grado, irriducibile se $\sigma \neq 0$; si devono quindi applicare le condizioni di ROUTH-HURWITZ:

$$A_1 < 0, \quad A_3 < 0, \quad A_1 A_2 - A_3 < 0,$$

che assicurano che le tre radici sono tutte a parte reale negativa. Fatti i calcoli, si ottengono le seguenti condizioni di stabilità:

$$(16) \quad \left\{ \begin{array}{l} 4y - 2 < 0, \\ x^2 + (5y - 2)(15y - 2) > 0, \\ (\alpha - \beta)^2 x^2 + (\alpha - \beta)(5y - 2)[3(\alpha - 5\beta)y - 2(\alpha - \beta)] + \\ \quad + 16\alpha\beta(2y - 1)(5y - 1) > 0. \end{array} \right.$$

La prima condizione riproduce la limitazione per l'esistenza di questi punti singolari e non dà quindi nulla di nuovo. La seconda condizione consente di affermare che sono sicuramente instabili i punti interni all'ellisse di equazione

$$(17) \quad x^2 + 75y^2 - 40y + 4 = 0.$$

Per discutere la terza condizione poniamo $\alpha/\beta = \lambda$ e consideriamo l'equazione

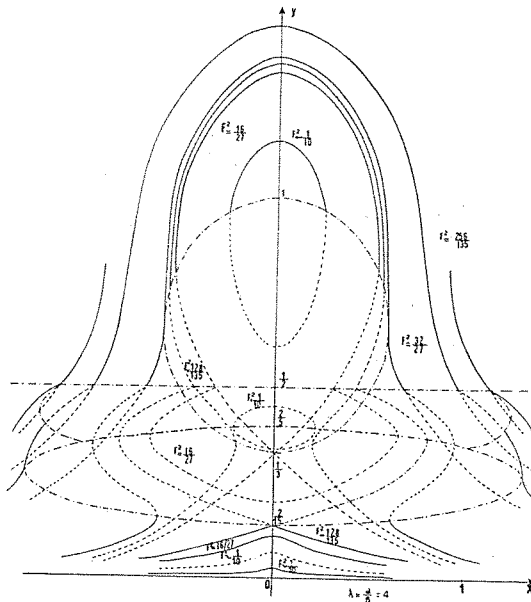


Fig. 1.

$$(18) \quad (\lambda - 1)^2 x^2 + 5y^2 (3\lambda^2 + 14\lambda + 15) - 8y (2\lambda^2 + 7\lambda + 5) + 4(\lambda + 1)^2 = 0,$$

che rappresenta il luogo dei punti per cui $A_1 A_2 - A_3 = 0$. Risulta $\lambda > 1$; la (18) rappresenta nel piano x, y ancora una ellisse, che taglia sempre la retta $y = \frac{1}{2}$ e la precedente ellisse (17). Si giunge così finalmente alla seguente conclusione: sono stabili i punti singolari di seconda specie corrispondenti agli archi delle curve (14) esterni alle due ellissi (17) e (18) e naturalmente ubicati sotto la retta $y = \frac{1}{2}$.

I punti singolari di seconda specie si presentano a coppie, simmetriche rispetto a z : infatti ad ogni valore di y ottenuto dalle (14) in cui si siano fissati x ed F' si deve associare un valore di φ dato dalle (13) e due valori di z dati da

$$(19) \quad z = \pm \sqrt{3(1 - 2y)}.$$

In definitiva si ha quindi un massimo di nove punti singolari. I sistemi di curve sono riprodotti in Fig. 1: gli archi stabili sono a tratto continuo; un diverso tratteggio distingue i contorni delle zone di stabilità dagli archi instabili.

Risulta così caratterizzato il comportamento « in piccolo » del sistema: scelti i parametri x ed F , che corrispondono rispettivamente al « detuning » ed alla forza esterna, se le condizioni iniziali $z(0)$, $r(0)$, $\varphi(0)$ sono sufficientemente vicine ad un punto singolare stabile (z_0, r_0, φ_0) , dopo una fase transiente, il sistema si metterà ad oscillare secondo la vibrazione definita appunto da (z_0, r_0, φ_0) .

3. - Si può ora cercare di ottenere qualche risultato « in grande » cioè relativo al comportamento globale del sistema quando si fa variare uno dei parametri fondamentali tenendo fisso l'altro: per esempio facciamo variare x tra $-\infty$ e $+\infty$, per F assegnato. Se $F^2 < 32/135$ le curve (14) sono spezzate in due parti: il ramo inferiore rappresenta per ogni x una oscillazione stabile con y piccolo (tendente a zero al crescere di x), mentre la z corrispondente per la (19) risulta vicina al valore $\sqrt{3}$ o $-\sqrt{3}$ (a seconda che si parta inizialmente dal semipiano $z > 0$ o da quello $z < 0$). Per gli stessi valori di F anche le curve (9) sono spezzate: questa volta si presenta una oscillazione stabile in corrispondenza del ramo superiore, quindi per $z = 0$ ed $y \gg \frac{1}{2}$. Tale oscillazione esiste solo per piccoli valori di x e scompare quando la curva (9) incontra l'ellisse (10). Se dunque si parte con $|x|$ grande, nell'intorno del punto singolare stabile con $z \neq 0$, facendo variare x , il sistema manterrà questo tipo di oscillazione. Se invece si parte con $|x|$ piccolo, nell'intorno del punto singolare stabile con $z = 0$, il sistema oscillerà secondo la corrispondente vibrazione solo finché $|x|$ non è troppo grande: ci domandiamo cosa avviene quando il punto singolare stabile con $z = 0$ scompare. Poiché siamo ormai nel piano $z = 0$, è da escludere la possibilità che il sistema salti alla vibrazione stabile con $z \neq 0$, che pure esiste: infatti, la prima delle (4) assicura che se z è zero per un certo valore di τ , resta indefinitamente nulla. Perciò il sistema dovrà mettersi ad oscillare secondo una oscillazione di combinazione, rappresentata da un ciclo limite nel piano $z = 0$. Che tale ciclo limite esista effettivamente, è subito provato. Notiamo infatti che al sistema (4) appartiene evidentemente la classe di soluzioni $z \equiv 0$, r e φ che verificano il sistema ridotto:

$$(20) \quad \begin{cases} \frac{dr}{d\tau} = (\alpha - \beta) r \left(1 - \frac{r^2}{4}\right) - E \sin\varphi \\ \frac{d\varphi}{d\tau} = 2\sigma - \frac{E}{r} \cos\varphi \end{cases} \quad \alpha > \beta > 0.$$

I punti singolari di (20), che è sostanzialmente il sistema di ANDRONOV e WITT associato all'equazione di VAN DER POL, sono quelli che abbiamo testè chiamato punti di prima specie del sistema (4). Nella situazione ora considerata, nel piano $z = 0$ allo sparire del punto singolare stabile resta un nodo (o fuoco) instabile, sul ramo inferiore della curva (9). Attorno a questo punto possiamo costruire un cerchio da cui le traiettorie possono soltanto uscire. D'altra parte, esiste un cerchio di raggio abbastanza grande e centro nell'origine da cui, essendo $\frac{dr}{d\tau} < 0$ per la prima delle (20), le traiettorie non possono uscire. Tanto basta per applicare il classico principio dell'anello e concludere con l'esistenza di un ciclo. Esso risulta stabile rispetto alle traiettorie di (4) per cui $z = 0$, ma non appare facile dimostrare che tale risulti anche rispetto alle altre per cui $z \neq 0$.

Va anzi osservato in generale che nello studio di (4) possiamo servirci dei risultati ottenuti per il sistema (20) da vari Autori (segnatamente in questo ordine di idee da CARTWRIGHT [1] e da STOKER [3]) per affermare l'esistenza o la non esistenza di cicli limite nel piano $z = 0$. Però la stabilità di questi cicli dipende nel nostro caso da due esponenti caratteristici non nulli, essendo essi cicli di un sistema in tre dimensioni. Lo studio del solo sistema (20) dà sfortunatamente notizie su un solo esponente caratteristico e quindi l'analisi di tali casi va completata.

Notiamo pure espressamente che la nostra equazione (2) differisce essenzialmente dall'equazione di VAN DER POL per questa coesistenza ora sottolineata di due tipi di vibrazioni stabili.

Un'altra osservazione utile è la seguente: per $F^2 \geq \frac{1}{2}$ i due sistemi di curve (9) e (14) si incontrano nei punti della retta $y = \frac{1}{2}$ per i quali

$$(21) \quad x^2 = \frac{2F^2 - 1}{4}.$$

Se si fissa dunque un valore grande di F ($F^2 \gg \frac{1}{2}$) e si fa decrescere x da valori grandi, si può avere il seguente fenomeno: i punti singolari di seconda specie tendono a diventare punti di prima specie attraverso la retta $y = \frac{1}{2}$. Infatti, per $y = \frac{1}{2}$ la z , per la (19), si annulla e tale resta indefinitamente per l'osservazione già fatta. Si ha così un'oscillazione stabile con $z \neq 0$ che al decrescere di $|x|$ passa ad oscillazione stabile con $z = 0$; la transizione avviene solo in questo senso perchè, arrivati ad un certo punto singolare nel piano $z = 0$, si deve restare in esso. Perciò quando $|x|$, dopo esser passato per 0, riprende a crescere, il sistema proseguirà l'oscillazione stabile con una oscillazione di combinazione nel piano $z = 0$. Se ne prova l'esistenza con un ragionamento analogo a quello fatto nel caso $F^2 < 32/135$, ma resta naturalmente aperto il problema di dimostrarne rigorosamente la stabilità.

Per i valori « intermedi » di F , in cui sono possibili molti punti singolari, è ancora più difficile caratterizzare da questo punto di vista il comportamento del sistema; si può sospettare uno « jump » da vibrazioni con $z \neq 0$ a vibrazioni con $z = 0$, ma restiamo nel campo delle congetture.

4. - Termino osservando che, se si fa $E = 0$ in (4), si ottiene il sistema:

$$(22) \quad \begin{cases} \frac{dz}{d\tau} = 2\beta z \left(1 - \frac{r^2}{2} - \frac{z^2}{3}\right) \\ \frac{dr}{d\tau} = (\alpha - \beta) r \left(1 - \frac{r^2}{4} - z^2\right) & \alpha > \beta > 0, \quad \sigma = \frac{1 - \omega}{\varepsilon} \\ \frac{d\varphi}{d\tau} = 2\sigma \end{cases}$$

Esso regola le vibrazioni libere in cui si sopprime la sollecitazione esterna $e(t) = \varepsilon E \cos(\omega t + \varphi)$. Il periodo di tali vibrazioni libere è incognito e diffe-

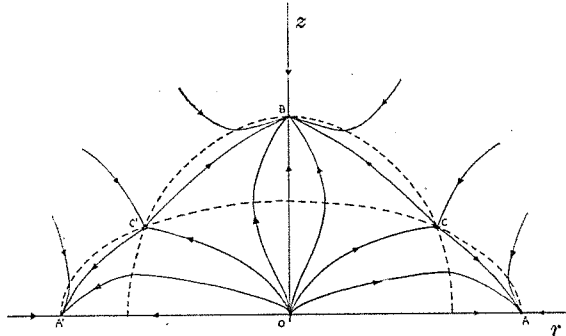


Fig. 2.

risce da 2π , al primo ordine in ε , per il termine $2\pi\sigma$. Dovendo essere $\sigma = 0$ nei punti singolari di (22), si avrà ⁽²⁾ $T = 2\pi + O(\varepsilon^2)$. Lo studio di (22) si riduce la

⁽²⁾ Si tenga presente che, in generale, il periodo delle oscillazioni libere presenta la forma seguente: $T = 2\pi + 2\pi \varepsilon \sigma + O(\varepsilon^2)$

sistema ausiliario, nelle variabili r, z ,

$$(23) \quad \begin{cases} \frac{dr}{d\tau} = (\alpha - \beta) r \left(1 - \frac{r^2}{4} - z^2\right) \\ \frac{dz}{d\tau} = 2\beta z \left(1 - \frac{r^2}{2} - \frac{z^2}{3}\right) \end{cases} \quad \alpha > \beta > 0,$$

che presenta l'origine nodo instabile, i nodi stabili A, A' dati da $(0, \pm 2)$ e B, B' dati da $(\pm \sqrt{3}, 0)$, e i colli C, C', D, D' dati da $(\pm \sqrt{\frac{8}{5}}, \pm \sqrt{\frac{3}{5}})$. Vedasi la Figura 2.

Tornando ora a (22), si conclude che i punti $O(0, 0)$ e B, B' dati da $(\pm \sqrt{3}, 0)$ sono posizioni di equilibrio, la prima instabile e le altre due stabili. I punti A, A' danno luogo ora al ciclo stabile rappresentato in coordinate cilindriche da

$$z = 0, \quad r = 2, \quad \varphi \text{ arbitrario},$$

mentre i punti C e D corrispondono ai cicli instabili:

$$z = \pm \sqrt{\frac{8}{5}}, \quad r = \sqrt{\frac{3}{5}}, \quad \varphi \text{ arbitrario}.$$

Bibliografia.

- [1] M. L. CARTWRIGHT, *Forced oscillations in non linear systems in Contributions to the theory of non linear oscillations* (I), Princeton 1950.
- [2] A. C. GARIBALDI, *Vibrazioni forzate di particolari sistemi non lineari, in due gradi di libertà*, Riv. Mat. Univ. Parma (2) 4 (1963), 167-189.
- [3] J. J. STOKER, *Non linear vibrations*, Interscience, New York 1950.

* * *

