Riv. Mat. Univ. Parma (2) 7 (1966), 315-323

BIANCA MANFREDI (*)

Studio dell'andamento della soluzione di un problema di Meccanica non lineare. (**)

Introduzione.

1. - Continuo qui un mio precedente lavoro [5] relativo al Problema differenziale, d'ordine due, di Meccanica non lineare, individuato dal sistema

$$\text{(D)} \qquad \begin{cases} \ddot{x}(t) + f(x(t),\ \dot{x}(t)) + g(x(t)) = \varphi(t) & (0 \leqslant t < +\infty) \\ x(0) = a, \qquad \dot{x}(0) = b, \end{cases}$$

dove:

$x(t)$ è la funzione incognita, $\dot{x}(t)$ e $\ddot{x}(t)$ sono le derivate temporali prima e seconda di $x(t)$;

$f(u,\ v)$ è una data funzione reale e univoca in tutto il piano cartesiano $(u,\ v)$, e ivi limitata, continua e lipschitziana;

$g(u)$ è una data funzione reale e univoca in $(-\infty,\ +\infty)$, ivi crescente, continua e lipschitziana, con $g(-\infty) = -\infty$, $g(0) = 0$, $g(+\infty) = +\infty$;

$\varphi(t)$ è una data funzione reale e univoca in $(0,\ +\infty)$, ivi limitata, continua e lipschitziana;

a e b, infine, sono numeri (reali) prefissati (qualsiasi).

2. - In [5] ho dimostrato che «il precedente sistema differenziale (D) ha una soluzione ed una sola, ed ho indicato un procedimento di approssimazioni successive verso tale soluzione».

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università, Parma, Italia.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del Gruppo di Ricerca n. 40 del Comitato per la Matematica del C.N.R., per l'anno 1965-66. — Ricevuto il 20-XI-1965.

Ciò è stato conseguito brevemente così: 1°) Ho sostituito a tutto l'intervallo temporale $(0, +\infty)$ un intervallo parziale limitato $(0, T)$, con T intero positivo comunque grande; poi, in corrispondenza ad ogni intero $i = 2, 3, 4, \dots$ ho considerato il numero $l_i = 1/i!$ ed ho chiamato σ_i l'insieme dei punti $r\, l_i$ $(r = 0, 1, 2, \dots)$, in numero finito, che appartengono a $(0, T)$. Ne risulta

$$\sigma_2 \subset \sigma_3 \subset \sigma_4 \subset \dots \subset \sigma_i \subset \dots \text{ (proprietà d'inclusività)}, \qquad \lim_{i \to +\infty} \sigma_i = (0, T)_{\mathrm{raz}}.$$

2°) In ognuno di questi insiemi σ_i ho sostituito al sistema differenziale (D) il sistema, analogo, alle differenze finite:

$$(\underset{i}{\Delta}) \qquad \begin{cases} \underset{(i)}{\Delta^2} x_i(t) + f\big(x_i(t - l_i),\ \underset{(i)}{\Delta} x_i(t - l_i)\big) + g\big(x_i(t - 2l_i)\big) = \varphi(t) \qquad (t \in \sigma_i) \\ x_i(0) = a, \qquad \underset{(i)}{\Delta} x_i(l_i) = b\,, \end{cases}$$

che ha, manifestamente, una soluzione $x_i(t)$ ed una sola, ottenuta passo passo algebricamente a partire dai valori iniziali. 3°) Ho dimostrato che la successione di funzioni

$$x_2(t),\ t \in \sigma_2; \quad x_3(t),\ t \in \sigma_3; \quad \dots; \quad x_i(t),\ t \in \sigma_i; \quad \dots$$

ha una determinata funzione limite: $x_\infty(t)$, $t \in (0, T)_{\mathrm{raz}}$. 4°) Tale funzione limite viene completata per continuità in tutto $(0, T)$, e poi viene prolungata in tutto $(0, +\infty)$ col passaggio al limite per $T \to +\infty$. Provo finalmente che la funzione $x(t)$, $t \in (0, +\infty)$, così ottenuta, è proprio soluzione del sistema differenziale (D) ed è l'unica soluzione di tale sistema. 5°) Ne discende chiaramente quale sia il procedimento di approssimazioni successive per ottenere questa unica soluzione $x(t)$ del Problema differenziale (D).

3. – Nel presente lavoro studio l'andamento della soluzione del Problema differenziale (D).

1°) Provo, per la soluzione $x(t)$ e le sue derivate temporali prima e seconda, che *la dipendenza dal punto iniziale* (a, b) *è continua, e ciò uniformemente rispetto a* $t \in (0, T)$ (il che, manifestamente, ha interesse per la valutazione degli errori nel calcolo approssimato della soluzione stessa).

2°) Dimostro che la soluzione $x(t)$ e le sue derivate temporali prima e seconda, sono *limitate in tutto* $(0, +\infty,)$ se la data funzione $f(u, v)$ soddisfa le ulteriori ipotesi (essendo δ e v^* costanti positive)

$$\text{(A)} \qquad \sup_{v < -v^*} f(u, v) + \delta \leqslant \inf_{t \geq 0} \varphi(t), \qquad \sup_{t \geq 0} \varphi(t) \leqslant \inf_{v \geq v^*} f(u, v) - \delta.$$

3º) Infine, provo che la soluzione (e, conseguentemente, le sue derivate temporali prima e seconda) è *oscillante senza limite per* $t \to +\infty$, se la data funzione $\varphi(t)$ è oscillante senza limite per $t \to +\infty$.

Se l'ipotesi che la data funzione $\varphi(t)$ sia oscillante senza limite per $t \to +\infty$ viene ulteriormente precisata affermando che $\varphi(t)$ sia periodica, la soluzione $x(t)$, che è pure oscillante senza limite per $t \to +\infty$, può non essere periodica.

A completamento di ciò, in un successivo lavoro proverò *una condizione per l'esistenza di soluzioni periodiche.*

§ 1. – Su la dipendenza dal punto iniziale (a, b) della soluzione e delle sue derivate temporali prima e seconda.

1.1. - Premessa.

In questo primo § la soluzione del Problema differenziale (D) e le sue derivate temporali prima e seconda saranno indicate (per maggiore chiarezza) rispettivamente con

$$x(t;\ a,\ b), \qquad \dot{x}(t;\ a,\ b), \qquad \ddot{x}(t;\ a,\ b).$$

Essendo poi $\psi(t;\ a,\ b)$ una generica funzione dipendente, oltre che dal tempo, dal punto iniziale $(a,\ b)$, richiamo la seguente

Definizione. Si dice che per la funzione $\psi(t;\ a,\ b)$ *la dipendenza dal punto iniziale* $(a,\ b)$ *è continua, e ciò uniformemente rispetto a* $t \in (0,\ T)$ (con $0 < T < +\infty$), se, preso ad arbitrio un $\varepsilon > 0$, esiste un $\delta_\varepsilon > 0$, indipendente da t, tale che

$$(1) \qquad \left| \psi(t;\ a',\ b') - \psi(t;\ a,\ b) \right| < \varepsilon \quad \text{per} \quad \begin{cases} |\,a' - a\,| < \delta_\varepsilon, \quad |\,b' - b\,| < \delta_\varepsilon, \\ t \in (0,\ T)\,. \end{cases}$$

1.2. - Teorema.

Per la soluzione $x(t;\ a,\ b)$ *e le sue derivate* $\dot{x}(t;\ a,\ b)$, $\ddot{x}(t;\ a,\ b)$ *la dipendenza dal punto iniziale* $(a,\ b)$ *è continua, e ciò uniformemente rispetto a* $t \in (0,\ T)$.

Dimostrazione.

1°) Basterà provare il teorema per $t \in (0, T)_{\mathrm{raz}}$. Ne discende allora (in virtù dei Lemmi II e III di [5]) che è sufficiente dimostrare quanto segue:

Considerato un qualunque insieme $\sigma_i \in (0, T)_{\mathrm{raz}}$ e detta $x_i(t;\ a,\ b)$ $(t \in \sigma_i)$ la soluzione del sistema $(\underset{i}{\Delta})$ [cfr. Introduzione, n. 2], le funzioni

$$(2) \qquad x_i(t;\ a,\ b), \qquad \underset{(i)}{\Delta}\, x_i(t;\ a,\ b), \qquad \underset{(i)}{\Delta^2}\, x_i(t;\ a,\ b)$$

sono delle $\psi(t;\ a,\ b)$ soddisfacenti la (1), essendo δ_ε *indipendente* da i e da $t \in \sigma_i$ [anzichè da $t \in (0, T)$].

Tale affermazione basterà poi che sia provata per le prime due funzioni di (2), in quanto la validità per la terza funzione consegue subito dall'equazione del sistema $(\underset{i}{\Delta})$.

2°) Provo dunque che $x_i(t;\ a,\ b)$, $\underset{(i)}{\Delta}\, x_i(t;\ a,\ b)$ sono delle funzioni $\psi(t;\ a,\ b)$ soddisfacenti la (1), essendo δ_ε *indipendente* da i e da $t \in \sigma_i$ [anzichè da $t \in (0, T)$].

A tale scopo, scrivo l'equazione del sistema $(\underset{i}{\Delta})$ nella forma:

$$(3) \qquad \underset{(i)}{\Delta}\, x_i(t;\ a,\ b) = \underset{(i)}{\Delta}\, x_i(t - l_i;\ a,\ b) - l_i\, F_i(t;\ a,\ b),$$

dove si è posto

$$F_i(t;\ a,\ b) = f\big(x_i(t - l_i;\ a,\ b),\ \underset{(i)}{\Delta}\, x_i(t - l_i;\ a,\ b)\big) + g\big(x_i(t - 2l_i;\ a,\ b)\big) - \varphi(t).$$

Se poniamo

$$X_i(t) = x_i(t;\ a',\ b') - x_i(t;\ a,\ b),$$

da (3) abbiamo

$$\underset{(i)}{\Delta} X_i(t) = \underset{(i)}{\Delta} X_i(t - l_i) - l_i \{ F_i(t;\ a',\ b') - F_i(t;\ a,\ b) \},$$

da cui

$$(4) \qquad | \underset{(i)}{\Delta} X_i(t) | \leq | \underset{(i)}{\Delta} X_i(t - l_i) | + l_i \,| F_i(t;\ a',\ b') - F_i(t;\ a,\ b) | .$$

Poichè le funzioni $f(u, v)$, $g(u)$ sono lipschitziane (di costanti lipschitziane λ, μ rispettivamente, e si può supporre, senza restrizione, $\mu > 1$), si ha

$$|F_i(t;\ a',\ b') - F_i(t;\ a,\ b)| \leqslant \lambda\{|X_i(t-l_i)| + |\underset{(i)}{\Delta X_i}(t-l_i)|\} + \mu\,|X_i(t-2l_i)|,$$

ed anche [1]

$$|F_i(t;\ a',\ b') - F_i(t;\ a,\ b)| \leqslant (1+l_i)\lambda\cdot|\underset{(i)}{\Delta X_i}(t-\iota_i)| + (\lambda+\mu)\,|X_i(t-2l_i)|,$$

cioè [2], ponendo brevemente $\lambda + \mu = \beta$,

$$|F_i(t;\ a',\ b') - F_i(t;\ a,\ b)| \leqslant (1+l_i)\lambda\cdot|\underset{(i)}{\Delta X_i}(t-l_i)| + \beta\,|a'-a| + \beta\,l_i\sum_{\varrho=1}^{n_i-2}|\underset{(i)}{\Delta X_i}(\varrho l_i)|.$$

Allora da (4), ponendo per brevità $1 + l_i\,(1+l_i)\lambda = \alpha_i$, discende

$$(4')\qquad |\underset{(i)}{\Delta X_i}(t)| \leqslant \alpha_i\,|\underset{(i)}{\Delta X_i}(t-l_i)| + l_i\,\beta\,|a'-a| + \beta\,l_i^2\sum_{\varrho=1}^{n_i-2}|\underset{(i)}{\Delta X_i}(\varrho l_i)|,$$

cioè *una relazione simile alla* (7) *di* [**5**]. Pertanto, posto

$$(5)\qquad \max\{\beta\,|a'-a|,\ |b'-b|\} = d,$$

tenendo presente che è $|\underset{(i)}{\Delta X_i}(l_i)| = |b'-b|$, e notando che, senza restrizione, si può supporre $\alpha_i + l_i < 1 + \beta\,l_i$, risulta (in analogia con la (8) di [**5**])

$$(6)\qquad |\underset{(i)}{\Delta X_i}(t)| \leqslant (1+\beta\,l_i)^{n_i-1}\,d,$$

e quindi

$$(6')\qquad |X_i(t)| \leqslant |X_i(t-l_i)| + l_i\,(1+\beta\,l_i)^{n_i-1}\,d.$$

Ne segue [3]

$$|X_i(t)| \leqslant |a'-a| + [(1+\beta\,l_i)^{n_i}-1]\cdot(d/\beta) \leqslant \{1 + [(1+\beta\,l_i)^{n_i}-1]\}\cdot(d/\beta),$$

cioè (essendo $\beta > 1$)

---

(1) Come nell'annotazione (7) di [5], risulta infatti:

$$|X_i(t-l_i)| + |\underset{(i)}{\Delta X_i}(t-l_i)| \equiv \{|X_i(t-l_i)| - |X_i(t-2l_i)|\} + |X_i(t-2l_i)| + $$
$$+ |\underset{(i)}{\Delta X_i}(t-l_i)| \leqslant (1+l_i)\,|\underset{(i)}{\Delta X_i}(t-l_i)| + |X_i(t-2l_i)|.$$

(2) Si tenga presente che, essendo $t = n_i\,l_i$, risulta:

$$X_i(t-2l_i) \equiv \sum_{\varrho=1}^{n_i-2}\{X_i(\varrho l_i) - X_i((\varrho-1)l_i)\} + X_i(0).$$

(3) Basta sommare membro a membro le n_i relazioni ottenute sostituendo in (6′) alla t successivamente $l_i,\ 2l_i,\ \dots,\ n_i\,l_i$, ridurre quindi i termini simili, ed infine, calcolare la somma di n_i termini di una progressione geometrica di ragione $1 + \beta\,l_i$.

$$(7) \qquad | X_i(t) | \leqslant (1 + \beta\, l_i)^{n_i} \cdot d .$$

Essendo poi: $(1 + \beta\, l_i)^{n_i - 1} < (1 + \beta\, l_i)^{n_i} = [(1 + \beta\, l_i)^{1/(\beta l_i)}]^{\beta t} < e^{\beta t} \leqslant e^{\beta T}$, da (7) e (6) risulta infine

$$| X_i(t) | < e^{\beta T} d, \qquad | \underset{(i)}{\Delta} X_i(t) | < e^{\beta T} d,$$

ossia

$$(8) \quad | x_i(t;\, a',\, b') - x_i(t;\, a,\, b) | < e^{\beta T} d, \qquad | \underset{(i)}{\Delta}\, x_i(t;\, a',\, b') - \underset{(i)}{\Delta}\, x_i(t;\, a,\, b) | < e^{\beta T} d.$$

Volendo, quindi, che $x_i(t;\, a,\, b)$, $\underset{(i)}{\Delta}\, x_i(t;\, a,\, b)$ siano delle funzioni $\psi(t;\, a,\, b)$ soddisfacenti la (1), con δ_ε indipendente da i e da $t \in \sigma_i$, basterà [tenendo presente la (5)] prendere $\delta_\varepsilon = d = e^{-\beta T}\, \varepsilon$.

§ 2. – Limitazione in $(0, +\infty)$ della soluzione e delle sue derivate temporali prima e seconda.

Teorema. *La soluzione $x(t)$ del Problema differenziale* (D) *e le sue derivate $\dot{x}(t)$, $\ddot{x}(t)$ sono limitate in* $(0, +\infty)$, *se la data funzione $f(u, v)$ soddisfa alle ulteriori ipotesi* (A) *dell'Introduzione*.

Dimostrazione.

1) Provo *la limitazione di $x(t)$ e $\dot{x}(t)$ in* $(0, +\infty)$. A tale scopo, considero la funzione ausiliaria

$$(9) \qquad H(x,\, \dot{x}) = G(x) + \tfrac{1}{2}\, \dot{x}^2 + h(x) \cdot k(\dot{x}) + c\,,$$

dove: $G(x) = \int_0^x g(u)\, du$ è una funzione non negativa; $h(x)$ è una arbitraria funzione, nulla per $x = 0$, derivabile con derivata continua, tale che

$$(10) \quad 0 \leqslant v^* \,| h(x) | \leqslant G(x), \qquad \lim_{|x| \to \infty} h(x) \cdot \operatorname{sgn} x = +\infty, \qquad 0 < v^*\, h'(x) < \eta\,,$$

valendo in $(10)_1$ le uguaglianze solo per $x = 0$, ed essendo $0 < \eta < \delta$ [cfr. (A)]; per $k(\dot{x})$ abbiamo

$$k(\dot{x}) = \dot{x} \quad \text{se } | \dot{x} | < v^*, \qquad k(\dot{x}) \cdot \operatorname{sgn} \dot{x} = v^* \quad \text{se } | \dot{x} | \geqslant v^*;$$

infine c è una costante positiva (4).

(4) Il procedimento qui seguito è analogo a quello recentemente usato da W. MÜLLER in [6]. La costante c qui introdotta garantisce la positività della funzione $H(x, \dot{x})$ anche nell'origine del piano delle fasi: questa condizione è verosimilmente non essenziale [cfr. la relazione (*) che segue nel testo].

La funzione $H(x, \dot{x})$ è allora sempre positiva e tende a $+\infty$ per $|x| + |\dot{x}| \to +\infty$. Inoltre, essendo $x(t)$ soluzione dell'equazione differenziale $(\mathrm{D})_1$, risulta:

$$\dot{H} \equiv \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = \dot{x}\,\{\varphi(t) - f(x, \dot{x}) + h'(x)\,k(\dot{x})\} + h(x)\,k'(\dot{x})\,\{\varphi(t) - f(x, \dot{x}) - g(x)\}\,.$$

Ora, per $|\dot{x}| \geqslant v^*$ è $k'(\dot{x}) \equiv 0$ e per qualunque valore di $x(t)$, dalle ipotesi (A) dell'Introduzione, segue: $\dot{H} \leqslant -v^*(\delta - \eta)$, dove $0 < v^*(\delta - \eta)$. D'altra parte, per $|\dot{x}| < v^*$ i termini di $\dot{H}$ dipendenti da $\dot{x}$ sono tutti limitati [in particolare $k'(\dot{x}) = 1$], ed in virtù di $(10)_2$ si ha $\dot{H} \to -\infty$ per $|x| + |\dot{x}| \to \infty$. Esiste allora una costante positiva R, e quindi una funzione positiva $H_1(x, \dot{x})$ indipendente da t, in modo che sia:

$$(*) \qquad \dot{H} \leqslant -H_1(x, \dot{x}) < 0 \qquad \text{per } x^2 + \dot{x}^2 \geqslant R^2\,.$$

L'esistenza della funzione H, sempre positiva, tendente all'infinito per $|x| + |\dot{x}| \to \infty$ e la cui derivata soddisfa la relazione $(*)$, è sufficiente (cfr., ad esempio, Teorema 2.4.1′ di [7]) ad assicurare in $(0, +\infty)$ la limitazione, anzi l'uniforme limitazione, della soluzione $x(t)$ del problema (D) e della sua derivata prima $\dot{x}(t)$.

2°) *La limitazione di $\ddot{x}(t)$ in $(0, +\infty)$* discende subito dall'equazione differenziale figurante in (D), sempre tenendo presente le ipotesi fatte sulle funzioni $f(u, v)$, $g(u)$, $\varphi(t)$ e, inoltre, le limitazioni ora provate per $x(t)$ e $\dot{x}(t)$.

§ 3. – Caso di oscillatorietà senza limite per $t \to +\infty$ della soluzione e delle sue derivate temporali prima e seconda.

3.1. - Premessa.

Definizioni. Una funzione $\psi(t)$, $t \in (0, +\infty)$, si dirà *monotona per* $t \to +\infty$, quando esiste un $T > 0$ tale che $\psi(t)$ risulti monotona in $(T, +\infty)$; in caso contrario si dirà che tale funzione è *oscillante per* $t \to +\infty$.

Per fissare le idee, osservo che le funzioni monotone per $t \to +\infty$ hanno sempre limite (finito od infinito); mentre le funzioni oscillanti per $t \to +\infty$ possono avere limite (finito od infinito) oppure no (di quest'ultimo tipo sono, ad esempio, le funzioni periodiche).

3.2. - Teorema.

La soluzione $x(t)$ è oscillante senza limite per $t \to +\infty$ [e conseguentemente sono tali le derivate $\dot{x}(t)$ e $\ddot{x}(t)$], se la data funzione $\varphi(t)$ è oscillante senza limite per $t \to +\infty$.

Dimostrazione. Ragiono per assurdo.

1°) Abbia $x(t)$ limite L finito quando $t \to +\infty$. Scrivo allora l'equazione differenziale figurante nel sistema (D) nella forma:

$$\Delta_h^2 x(t) + f\big(x(t), \Delta_h x(t)\big) + g\big(x(t)\big) = \varphi(t) + \eta_t(h), \tag{11}$$

dove $\eta_t(h)$ è, *per ogni* $t \in (0, +\infty)$, un opportuno infinitesimo con h (h non nullo). Per $t \to +\infty$, le funzioni $\Delta_h x(t)$, $\Delta_h^2 x(t)$ tendono necessariamente a zero (essendo L finito) e, dalla (11) segue

$$f(L, 0) + g(L) = \lim_{t \to +\infty} \{\varphi(t) + \eta_t(h)\},$$

onde, indicando brevemente con Λ il primo membro, preso ad arbitrio un $\varepsilon > 0$, esisterà un T_h (con $0 < T_h < +\infty$) tale che

$$-\varepsilon < \varphi(t) + \eta_t(h) - \Lambda < \varepsilon \qquad \text{per} \quad t > T_h,$$

ed anche

$$-\{\varepsilon + |\eta_t(h)|\} < \varphi(t) - \Lambda < \varepsilon + |\eta_t(h)| \qquad \text{per} \quad t > T_h. \tag{12}$$

D'altra parte, essendo $\lim_{h \to 0} \eta_t(h) = 0$ per $t \in (0, +\infty)$, in corrispondenza al precedente $\varepsilon > 0$, esisterà un $\delta_t > 0$ tale che $|\eta_t(h)| < \varepsilon$ per $0 < |h| < \delta_t$, ed allora dalla (12) segue

$$-2\varepsilon < \varphi(t) - \Lambda < 2\varepsilon \qquad \text{per} \quad t > T_h, \tag{12'}$$

ossia $\varphi(t)$ avrebbe, per $t \to +\infty$, limite (dato da Λ), contrariamente all'ipotesi.

2°) Abbia $x(t)$ limite L infinito quando $t \to +\infty$. Se, ad esempio, è $L = +\infty$, dall'equazione differenziale, figurante nel sistema (D), segue $\ddot{x}(t) \xrightarrow[(t \to +\infty)]{} -\infty$, e quindi $\dot{x}(t) \xrightarrow[(t \to +\infty)]{} -\infty$. Ma ciò è in contrasto con il fatto che se $L = +\infty$ esiste un t^* tale che sia $\dot{x}(t) \geqslant 0$ per $t \geqslant t^*$.

O s s e r v a z i o n e I. Se la data funzione $\varphi(t)$ ha limite per $t \to +\infty$ [e può essere monotona o oscillante ([5]) per $t \to +\infty$], la soluzione $x(t)$ può avere pure limite per $t \to +\infty$ o non avere limite per $t \to +\infty$. Inoltre, nel caso che $x(t)$ abbia il limite L finito per $t \to +\infty$, il limite di $\varphi(t)$ esiste ed è $f(L, 0) + g(L)$ [cfr. (12')].

O s s e r v a z i o n e II. Se la data funzione $\varphi(t)$ è oscillante senza limite per $t \to +\infty$ e, precisamente, è una funzione p e r i o d i c a, la soluzione $x(t)$, che è pure oscillante senza limite per $t \to +\infty$, può essere non periodica.

In un successivo lavoro sarà provata l'esistenza di soluzioni periodiche nelle ipotesi di una $f(u, v)$ soddisfacente le (A), di una $\varphi(t)$ periodica e di convenienti condizioni iniziali.

Bibliografia.

[1] L. CESARI, *Asymptotic behavior and stability problems in ordinary differential equations*, Springer, Berlin 1963.

[2] D. GRAFFI, *Forced oscillations for several on linear circuits*, Ann. of Math. (2) 54 (1951), 262-271.

[3] D. GRAFFI, *Sulle oscillazioni forzate nella Meccanica non lineare*, Riv. Mat. Univ. Parma 3 (1952), 317-326.

[4] B. MANFREDI, *Su la risoluzione di alcuni sistemi della Meccanica non lineare mediante il metodo delle differenze finite*, Riv. Mat. Univ. Parma (2) 1 (1960), 123-148.

[5] B. MANFREDI, *Esistenza e unicità della soluzione di un problema di Meccanica non lineare*, Riv. Mat. Univ. Parma (2) 5 (1964), 13-40.

[6] W. MÜLLER, *Über die Beschränktheit der Lösungen eines Systems von Differentialgleichungen zweiter Ordnung*, Math. Nachr. 32 (1966), 41-47.

[7] R. REISSIG, G. SANSONE *und* R. CONTI, *Qualitative Theorie nichtlinearer Differentialgleichungen*, Cremonese, Roma 1963.

[8] J. J. STOKER, *Non linear vibrations in Mechanical and electrical systems*, Interscience, New York 1950.

S u m m a r y .

A theorem regarding to the existence and uniqueness of the solution in $(0, +\infty)$ *of a nonlinear problem* (D) *(see Introduction) has been proved recently in* [5] *by a new method of successive approximations.*

Here are demonstrated three theorems concerning the behavior of the unique solution $x(t)$ *of nonlinear problem* (D):

a) *the continuity of* $x(t)$, $\dot{x}(t)$, $\ddot{x}(t)$ *with respect to the initial vector, uniformly for* $t \in (0, T)$ $(0 < T < +\infty)$;

b) *the boundedness of* $x(t)$, $\dot{x}(t)$, $\ddot{x}(t)$ *in* $(0, +\infty)$, *if the conditions* (A) *are satisfied;*

c) *the oscillatory without limit of* $x(t)$ *for* $t \to +\infty$, *if the external perturbation is oscillating without limit for* $t \to +\infty$ *(as an instance, periodic).*

([5]) Ad esempio, è oscillante (con limite zero)per $t \to +\infty$ la funzione e^{-t} sen t.

* * *