Riv. Mat. Univ. Parma (2) 8 (1967), 221-233

EDGARDO CARRA e LUIGI TANZI CATTABIANCHI (*)

Sulle definizioni di alcune funzioni elementari notevoli del Calcolo delle differenze finite. (**)

1. - Introduzione.

1.1. – In un recente lavoro di G. VAROLI (1), considerata la *funzione esponenziale di passo h e base $e^{\alpha}_{(\alpha h)}$*, così definita:

$$e^{\alpha x}_{(\alpha h)} = (1 + \alpha h)^{x/h}, \tag{1.1}$$

sono state definite le *funzioni circolari seno, coseno, tangente, di passo h* (2). Per tali funzioni sono state poi dedotte proprietà e relazioni analoghe a quelle che si hanno per le corrispondenti funzioni circolari, alle quali esse tendono per $h \to 0$.

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università, Parma, Italia.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei Gruppi di Ricerca Matematica del Consiglio Nazionale delle Ricerche. — Ricevuto: 21-III-1967.

(1) G. VAROLI, *Sulle funzioni esponenziale e circolari, di passo h, nel Calcolo delle differenze finite*, Riv. Mat. Univ. Parma (2) 5 (1964), 201-210.

(2) Queste funzioni, indicate dal VAROLI rispettivamente con $\mathrm{sen}_{(h)} x$, $\cos_{(h)} x$, $\mathrm{tg}_{(h)} x$, sono state così definite (cfr. loc. cit. in (1), p. 205):

$$\mathrm{sen}_{(h)}\, x = \frac{1}{2i}\left(e^{ix}_{(ih)} - e^{-ix}_{(-ih)}\right) = \frac{1}{2i}\left\{(1 + ih)^{x/h} - (1 - ih)^{x/h}\right\},$$

$$\cos_{(h)}\, x = \tfrac{1}{2}\left(e^{ix}_{(ih)} + e^{-ix}_{(-ih)}\right) = \tfrac{1}{2}\left\{(1 + ih)^{x/h} + (1 - ih)^{x/h}\right\},$$

$$\mathrm{tg}_{(h)}\, x = \frac{\mathrm{sen}_{(h)}\, x}{\cos_{(h)}\, x} = \frac{1}{i}\,\frac{(1 + ih)^{x/h} - (1 - ih)^{x/h}}{(1 + ih)^{x/h} + (1 - ih)^{x/h}}.$$

Osserviamo qui che, ai fini di certe applicazioni nel campo delle differenze finite, risulta conveniente definire le *funzioni circolari di passo h* in altra forma, e precisamente come segue ([3]):

$$\text{sen}_h\, x = \frac{1}{2i}(e_{ih}^{ix} - e_{ih}^{-ix}) = \frac{1}{2i}\left\{(1+ih)^{x/h} - (1+ih)^{-x/h}\right\}, \tag{1.2}$$

$$\cos_h x = \tfrac{1}{2}(e_{ih}^{ix} + e_{ih}^{-ix}) = \tfrac{1}{2}\left\{(1+ih)^{x/h} + (1+ih)^{-x/h}\right\}, \tag{1.3}$$

$$\text{tg}_h\, x = \frac{\text{sen}_h\, x}{\cos_h x} = \frac{1}{i}\,\frac{(1+ih)^{x/h} - (1+ih)^{-x/h}}{(1+ih)^{x/h} + (1+ih)^{-x/h}}. \tag{1.4}$$

Anche con le definizioni qui poste risulta, evidentemente, che per $h \to 0$ le funzioni (1.2), (1.3), (1.4) tendono, rispettivamente, alle funzioni circolari sen x, cos x, tg x.

Per queste funzioni si deducono proprietà e relazioni corrispondenti a quelle che legano le ordinarie funzioni circolari (si veda n. 2).

Analogamente si definiscono poi (n. 3) le *funzioni iperboliche di passo h* ([4]) e si accenna ad alcune proprietà di tali funzioni.

1.2. – In un recente lavoro di G. BATTIONI ([5]) è stata presa in considerazione un'altra funzione notevole del Calcolo delle differenze finite, e precisamente una funzione che generalizza il prodotto

$$x^{n|h} = x(x-h)(x-2h)\dots(x-(n-1)h), \tag{1.5}$$

(*potenza della x, di esponente n e passo h*) al caso di un esponente α qualsiasi. Tale funzione, denominata *potenza della x, di esponente α e passo h*, e indicata col simbolo $x^{\alpha|h}$, è stata definita nel modo seguente ([6]):

$$x^{\alpha|h} = \frac{\dfrac{x}{h}\,!}{\left(\dfrac{x}{h} - \alpha\right)!}\, h^{\alpha}, \tag{1.6}$$

dove $z! = \Gamma(z+1)$.

([3]) Useremo il simbolo $e_{\alpha h}^{\alpha x}$ anzichè $e_{(\alpha h)}^{\alpha x}$.

([4]) Anche queste definizioni sono date in modo diverso da quelle proposte da G. VAROLI (cfr. loc. cit. in ([1]), pag. 210).

([5]) G. BATTIONI, *Su la nozione di «potenza» nel Calcolo delle differenze finite*, Riv. Mat. Univ. Parma (2) 4 (1963), 293-299.

([6]) Cfr. loc. cit. in ([5]), p. 294, (4).

Osserviamo che, *per considerazioni nel campo reale*, allo scopo di distinguere i due casi $h > 0$, $h < 0$, e anche in vista di applicazioni a certe equazioni alle differenze finite (di cui ci occuperemo in un successivo lavoro) e qualora si vogliano considerare, nel campo reale, le corrispondenti equazioni differenziali limite per $h \to 0$, è conveniente definire la *potenza della x, di esponente α e passo h* (per la quale useremo ancora il simbolo $x^{\alpha|h}$), distinguendo i due casi $h > 0$ e $h < 0$, nel modo seguente:

$$(1.7) \qquad x^{\alpha|h} = \begin{cases} \dfrac{\dfrac{x}{h}\,!}{\left(\dfrac{x}{h} - \alpha\right)!}\, h^{\alpha} & \text{per } h > 0 \qquad (1.7)' \\[2ex] \dfrac{\left(-\dfrac{x}{h} + \alpha - 1\right)!}{\left(-\dfrac{x}{h} - 1\right)!}\,(-h)^{\alpha} & \text{per } h < 0 \qquad (1.7)''. \end{cases}$$

Nel caso particolare $\alpha = n$ le due espressioni $(1.7)'$ e $(1.7)''$ coincidono (si veda n. **4.1**).

Per $x > 0$, tenuto conto dei due casi $h > 0$, $h < 0$, si mostra (n. **4.2**) che è

$$(1.8) \qquad \lim_{h \to 0} x^{\alpha|h} = x^{\alpha},$$

in analogia con quanto si ha da (1.5) per $h \to 0$.

2. - Funzioni circolari di passo h. Proprietà.

2.1. – In analogia completa con quanto si ha per le ordinarie funzioni circolari, si verifica facilmente che per le funzioni (1.2), (1.3), (1.4) valgono le formule seguenti:

$$(2.1) \qquad \operatorname{sen}_h^2 x + \cos_h^2 x = 1 \quad (^7);$$

$$(2.2) \qquad \operatorname{sen}_h(-x) = -\operatorname{sen}_h x, \qquad \cos_h(-x) = \cos_h x, \qquad \operatorname{tg}_h(-x) = -\operatorname{tg}_h x;$$

(7) Con le definizioni di $\operatorname{sen}_{(h)} x$, $\cos_{(h)} x$ riportate in (2), anzichè la (2.1) vale invece la relazione seguente [cfr. loc. cit. in (1), pag. 206, (18)]

$$\operatorname{sen}_{(h)}^2 x + \cos_{(h)}^2 x = (1 + h^2)^{x/h}.$$

$$
(2.3) \qquad \begin{cases} \operatorname{sen}_h (x \pm y) = \operatorname{sen}_h x \cdot \cos_h y \pm \cos_h x \cdot \operatorname{sen}_h y \\[2ex] \cos_h (x \pm y) = \cos_h x \cdot \cos_h y \mp \operatorname{sen}_h x \cdot \operatorname{sen}_h y \\[2ex] \operatorname{tg}_h (x \pm y) = \dfrac{\operatorname{tg}_h x \pm \operatorname{tg}_h y}{1 \mp \operatorname{tg}_h x \cdot \operatorname{tg}_h y} \end{cases}
$$

(*formule di addizione e sottrazione*);

$$
(2.4) \qquad \begin{cases} \operatorname{sen}_h p + \operatorname{sen}_h q = 2 \operatorname{sen}_h \dfrac{p+q}{2} \cos_h \dfrac{p-q}{2} \\[2ex] \operatorname{sen}_h p - \operatorname{sen}_h q = 2 \cos_h \dfrac{p+q}{2} \operatorname{sen}_h \dfrac{p-q}{2} \\[2ex] \cos_h p + \cos_h q = 2 \cos_h \dfrac{p+q}{2} \cos_h \dfrac{p-q}{2} \\[2ex] \cos_h p - \cos_h q = -2 \operatorname{sen}_h \dfrac{p+q}{2} \operatorname{sen}_h \dfrac{p-q}{2} \end{cases}
$$

(*formule di prostaferesi*).

Dalle (2.3) si deduce:

$$
(2.5) \qquad \begin{cases} \operatorname{sen}_h 2x = 2 \operatorname{sen}_h x \cdot \cos_h x \\[2ex] \cos_h 2x = \cos_h^2 x - \operatorname{sen}_h^2 x \\[2ex] \operatorname{tg}_h 2x = \dfrac{2 \operatorname{tg}_h x}{1 - \operatorname{tg}_h^2 x} \end{cases}
$$

(*formule di duplicazione*).

Indicando con $D_{x,h}$ l'operatore di formazione del rapporto incrementale, definito da

$$
(2.6) \qquad D_{x,h}\, f(x) = \frac{1}{h}\{f(x+h) - f(x)\},
$$

si ottiene, applicando tale operatore rispettivamente alle funzioni (1.2), (1.3), (1.4),

$$
(2.7) \qquad D_{x,h} \operatorname{sen}_h x = \frac{1}{\sqrt{1+ih}} \cos_h\left(x + \frac{h}{2}\right),
$$

$$\mathrm{D}_{x,h} \cos_h x = -\frac{1}{\sqrt{1+ih}} \operatorname{sen}_h\left(x + \frac{h}{2}\right), \tag{2.8}$$

$$\mathrm{D}_{x,h} \operatorname{tg}_h x = \frac{2+ih}{2+i2h} \frac{1}{\cos_h x \cdot \cos_h(x+h)} \quad (^8)\,. \tag{2.9}$$

Se in queste si passa al limite per $h \to 0$ si ha, rispettivamente,

$$\mathrm{D}_x \operatorname{sen} x = \cos x, \qquad \mathrm{D}_x \cos x = -\operatorname{sen} x, \qquad \mathrm{D}_x \operatorname{tg} x = 1/\cos^2 x.$$

2.2. – Dalle definizioni (1.2) e (1.3) risulta subito

$$\cos_h x + i \operatorname{sen}_h x = (1 + ih)^{x/h} = e_{ih}^{ix}, \tag{2.10}$$

analoga alla *formula di Eulero* per le funzioni circolari (alla quale tende per $h \to 0$). Da (2.10) risulta poi

$$(\cos_h x + i \operatorname{sen}_h x)^n = (1 + ih)^{nx/h}, \tag{2.11}$$

e anche, ponendo in (2.10) $n\,x$ al posto di x,

$$\cos_h n\,x + i \operatorname{sen}_h n\,x = (1 + ih)^{nx/h}. \tag{2.12}$$

Dal confronto di (2.11) e (2.12) segue

$$(\cos_h x + i \operatorname{sen}_h x)^n = \cos_h n\,x + i \operatorname{sen}_h n\,x \tag{2.13}$$

(*formula di Moivre per le funzioni circolari di passo h*).

Dalla (2.13) si possono, ovviamente, ottenere le *formule generali di moltiplicazione* per $\operatorname{sen}_h n\,x$, $\cos_h n\,x$.

2.3. – Tenendo presente lo sviluppo in serie (9):

$$(1 + \alpha h)^{x/h} = \sum_0^\infty {}_n \frac{1}{n!} \alpha^n x^{n|h} \qquad \left(0 < |h| < \frac{1}{|\alpha|}\right), \tag{2.14}$$

---

(8) Con le definizioni di $\operatorname{sen}_{(h)} x$, $\cos_{(h)} x$, $\operatorname{tg}_{(h)} x$ riportate in (2) si ottengono invece le relazioni seguenti [cfr. loc. cit. in (1), pp. 205-206, (13), (14), (15′)]:

$$\mathrm{D}_{x,h} \operatorname{sen}_{(h)} x = \cos_{(h)} x, \quad \mathrm{D}_{x,h} \cos_{(h)} x = -\operatorname{sen}_{(h)} x, \quad \mathrm{D}_{x,h} \operatorname{tg}_{(h)} x = \frac{(1+h^2)^{x/h}}{\cos_{(h)} x \cdot \cos_{(h)}(x+h)}.$$

(9) Cfr., ad es., loc. cit. in (1), p. 204, (9′).

e ricordando che $(-x)^{n|h} = (-1)^n x^{n|-h}$, risulta (per $0 < |h| < 1$)

$$\operatorname{sen}_h x = \frac{1}{2i} \sum_0^\infty {}_n \frac{i^n x^{n|h} - (-i)^n x^{n|-h}}{n!}, \tag{2.15}$$

$$\cos_h x = \frac{1}{2} \sum_0^\infty {}_n \frac{i^n x^{n|h} + (-i)^n x^{n|-h}}{n!}, \tag{2.16}$$

in analogia coi noti sviluppi in serie di $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$, che possono scriversi nelle forme

$$\operatorname{sen} x = \frac{1}{2i} \sum_0^\infty {}_n \frac{i^n - (-i)^n}{n!} x^n,$$

$$\cos x = \frac{1}{2} \sum_0^\infty {}_n \frac{i^n + (-i)^n}{n!} x^n,$$

alle quali tendono rispettivamente (2.15) e (2.16) per $h \to 0$.

2.4. – Accenniamo infine alle funzioni inverse $x = \operatorname{arcsen}_h y$, $x = \arccos_h y$, $x = \operatorname{arctg}_h y$, delle quali ci limiteremo qui a considerare l'ultima. Da $y = \operatorname{tg}_h x$, tenuto conto della (1.4), si ha successivamente

$$(1 + ih)^{2x/h} \cdot (1 - iy) = 1 + iy,$$

$$e_{ih}^{2ix} = \frac{1 + iy}{1 - iy}, \qquad 2ix = \log_{e_{ih}} \frac{1 + iy}{1 - iy},$$

ossia

$$\operatorname{arctg}_h y = \frac{1}{2i} \log_{e_{ih}} \frac{1 + iy}{1 - iy} \qquad [e_{ih} = (1 + ih)^{\frac{1}{ih}}], \tag{2.17}$$

od anche

$$\operatorname{arctg}_h y = \frac{ih}{\log(1 + ih)} \operatorname{arctg} y \tag{2.17'}$$

$\left(\operatorname{arctg} y = \frac{1}{2i} \log \frac{1 + iy}{1 - iy}\right)$. Invero osserviamo che da $\log_{e_{ih}} u = v$ segue $u = e_{ih}^v = (1 + ih)^{v/(ih)}$, e pertanto

$$\log_{e_{ih}} u = \frac{ih}{\log(1 + ih)} \log u. \tag{2.18}$$

Da (2.17), o da (2.17)′, segue subito che, per $h \to 0$, la funzione $\operatorname{arctg}_h y$ tende alla funzione $\operatorname{arctg} y$.

Si trova poi

$$\mathrm{D}_{x,h} \operatorname{arctg}_h x = \frac{ih}{\log(1+ih)}\, \mathrm{D}_{x,h} \operatorname{arcgt} x =$$

$$= \frac{ih}{\log(1+ih)}\; \frac{\log\left(1 + \dfrac{2ih}{1+x^2+hx-ih}\right)}{\dfrac{2ih}{1+x^2+hx-ih}}\; \frac{1}{1+x^2+hx-ih},$$

e se qui si passa al limite per $h \to 0$ si ritrova la derivata fondamentale

$$\mathrm{D}_x \operatorname{arctg} x = \frac{1}{1+x^2}.$$

3. - Funzioni iperboliche di passo h. Proprietà.

3.1. – Definiamo le *funzioni iperboliche di passo h*, $\operatorname{senh}_h x$, $\cosh_h x$, $\operatorname{tgh}_h x$, nel modo seguente:

$$\operatorname{senh}_h x = \tfrac{1}{2}\,(e_h^x - e_h^{-x}) = \tfrac{1}{2}\left\{(1+h)^{x/h} - (1+h)^{-x/h}\right\}, \tag{3.1}$$

$$\cosh_h x = \tfrac{1}{2}\,(e_h^x + e_h^{-x}) = \tfrac{1}{2}\left\{(1+h)^{x/h} + (1+h)^{-x/h}\right\}, \tag{3.2}$$

$$\operatorname{tgh}_h x = \frac{\operatorname{senh}_h x}{\cosh_h x} = \frac{(1+h)^{x/h} - (1+h)^{-x/h}}{(1+h)^{x/h} + (1+h)^{-x/h}}. \tag{3.3}$$

Per $h \to 0$ queste funzioni tendono rispettivamente alle funzioni iperboliche $\operatorname{senh} x$, $\cosh x$, $\operatorname{tgh} x$.

Valgono le seguenti formule:

$$\left\{\begin{array}{l} \operatorname{senh}_h(-x) = -\operatorname{senh}_h x, \qquad \cosh_h(-x) = \cosh_h x, \\ \qquad\qquad \operatorname{tgh}_h(-x) = -\operatorname{tgh}_h x, \end{array}\right. \tag{3.4}$$

$$\cosh_h x + \operatorname{senh}_h x = e_h^x, \tag{3.5}$$

$$\cosh_h x - \operatorname{senh}_h x = e_h^{-x}, \tag{3.6}$$

$$\cosh_h^2 x - \operatorname{senh}_h^2 x = 1; \tag{3.7}$$

$$(3.8)\quad \begin{cases} \operatorname{senh}_h(x \pm y) = \operatorname{senh}_h x \cdot \cosh_h y \pm \cosh_h x \cdot \operatorname{senh}_h y \\ \cosh_h(x \pm y) = \cosh_h x \cdot \cosh_h y \pm \operatorname{senh}_h x \cdot \operatorname{senh}_h y \\ \operatorname{tgh}_h (x \pm y) = \dfrac{\operatorname{tgh}_h x \pm \operatorname{tgh}_h y}{1 \pm \operatorname{tgh}_h x \cdot \operatorname{tgh}_h y}, \end{cases}$$

$$(3.9)\quad \begin{cases} \operatorname{senh}_h p + \operatorname{senh}_h q = 2 \operatorname{senh}_h \dfrac{p+q}{2} \cdot \cosh_h \dfrac{p-q}{2} \\ \operatorname{senh}_h p - \operatorname{senh}_h q = 2 \cosh_h \dfrac{p+q}{2} \cdot \operatorname{senh}_h \dfrac{p-q}{2} \\ \cosh_h p + \cosh_h q = 2 \cosh_h \dfrac{p+q}{2} \cdot \cosh_h \dfrac{p-q}{2} \\ \cosh_h p - \cosh_h q = 2 \operatorname{senh}_h \dfrac{p+q}{2} \cdot \operatorname{senh}_h \dfrac{p-q}{2}. \end{cases}$$

Dalle (3.8) si deducono le *formule di duplicazione*:

$$(3.10)\quad \begin{cases} \operatorname{senh}_h 2x = 2 \operatorname{senh}_h x \cdot \cosh_h x \\ \cosh_h 2x = \cosh_h^2 x + \operatorname{senh}_h^2 x \\ \operatorname{tgh}_h 2x = \dfrac{2 \operatorname{tgh}_h x}{1 + \operatorname{tgh}_h^2 x}, \end{cases}$$

ecc. .

Applicando rispettivamente alle (3.1), (3.2), (3.3) l'operatore $D_{x,h}$, si ottiene

$$(3.11)\quad D_{x,h} \operatorname{senh}_h x = \frac{1}{\sqrt{1+h}} \cosh_h\left(x + \frac{h}{2}\right),$$

$$(3.12)\quad D_{x,h} \cosh_h x = \frac{1}{\sqrt{1+h}} \operatorname{senh}_h\left(x + \frac{h}{2}\right),$$

$$(3.13)\quad D_{x,h} \operatorname{tgh}_h x = \frac{2+h}{2+2h} \quad \frac{1}{\cosh_h x \cdot \cosh_h (x+h)}.$$

Se in queste si passa al limite per $h \to 0$ si ritrovano le note formule

$$\mathrm{D}_x \operatorname{senh} x = \cosh x, \qquad \mathrm{D}_x \cosh x = \operatorname{senh} x, \qquad \mathrm{D}_x \operatorname{tgh} x = 1/\cosh^2 x .$$

3.2. – Accenniamo infine alle *funzioni iperboliche inverse, di passo h*, $x = \operatorname{arcsenh}_h y$, $x = \operatorname{arccosh}_h y$, $x = \operatorname{arctgh}_h y$. Da

$$y = \operatorname{senh}_h x = \tfrac{1}{2}(e_h^x - e_h^{-x}),$$

risulta

$$e_h^x = y \pm \sqrt{y^2+1} .$$

Se x è reale (e h reale), lo è anche y ed è

$$e_h^x = y + \sqrt{y^2+1} ,$$

onde

$$\operatorname{arcsenh}_h y = \log_{e_h}(y + \sqrt{y^2+1}) . \tag{3.14}$$

Analogamente, da

$$y = \cosh_h x = \tfrac{1}{2}(e_h^x + e_h^{-x}),$$

risulta

$$e_h^x = y \pm \sqrt{y^2-1} ,$$

ossia, tenendo conto della condizione $y \geqslant 1$,

$$e_h^x = y + \sqrt{y^2-1} ,$$

onde

$$\operatorname{arccosh}_h y = \log_{e_h}(y + \sqrt{y^2-1}) . \tag{3.15}$$

Infine, da

$$y = \operatorname{tgh}_h x = (e_h^{2x} - 1)/(e_h^{2x} + 1),$$

risulta, supposto y reale, $-1 < y < 1$,

$$e_h^{2x} = \frac{1+y}{1-y},$$

onde:

$$\operatorname{arctgh}_h y = \frac{1}{2} \log_{e_h} \frac{1+y}{1-y}. \tag{3.16}$$

Tenendo presente che

$$\log_{e_h} u = \frac{h}{\log(1+h)} \log u,$$

le espressioni trovate per le funzioni inverse possono anche scriversi, rispettivamente, nelle forme

$$\operatorname{arcsenh}_h y = \frac{h}{\log(1+h)} \log(y + \sqrt{y^2+1}), \tag{3.14$'$}$$

$$\operatorname{arccosh}_h y = \frac{h}{\log(1+h)} \log(y + \sqrt{y^2-1}), \tag{3.15$'$}$$

$$\operatorname{arctgh}_h y = \frac{1}{2} \frac{h}{\log(1+h)} \log \frac{1+y}{1-y}. \tag{3.16$'$}$$

Passando al limite per $h \to 0$, si ritrovano le note espressioni per le funzioni inverse delle ordinarie funzioni iperboliche.

4. - Potenza di esponente α e passo h.

4.1. - Nel lavoro citato in (5), la definizione di *potenza di esponente* α *e passo* h nella forma

$$x^{\alpha|h} = \frac{\dfrac{x}{h}\,!}{\left(\dfrac{x}{h} - \alpha\right)!} h^{\alpha}, \tag{1.6}$$

veniva data imponendo le seguenti condizioni:

$$D_{x,h}\, x^{\alpha|h} = \alpha\, x^{(\alpha-1)|h}, \tag{4.1}$$

$$x^{(\alpha-1)|h} = \frac{1}{x - (\alpha-1)h} x^{\alpha|h}, \tag{4.2}$$

ed inoltre imponendo l'ulteriore condizione che per $\alpha = n$ si avesse la (1.5). La funzione richiesta risultava del tipo [10]

$$\pi(x,\ \alpha,\ h)\ \frac{\dfrac{x}{h}\,!}{\left(\dfrac{x}{h}-\alpha\right)!}\ h^{\alpha}, \tag{4.3}$$

con $\pi(x, \alpha, h)$ arbitraria funzione periodica della x col periodo h e della α col periodo 1, ed eguale ad 1 per $\alpha = n$. Assumendo poi $\pi(x, \alpha, h) \equiv 1$ si aveva la espressione (1.6) di $x^{\alpha|h}$. Veniva anche osservato [11] che ponendo

$$\pi(x,\ \alpha,\ h) = (-1)^{\alpha}\ \frac{\operatorname{sen}\dfrac{\pi x}{h}}{\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi x}{h} - \pi\,\alpha\right)} \tag{4.4}$$

si sarebbe ottenuto per (4.3) l'espressione

$$\frac{\left(-\dfrac{x}{h}+\alpha-1\right)!}{\left(-\dfrac{x}{h}-1\right)!}\,(-h)^{\alpha}. \tag{4.5}$$

La definizione (1.7) qui proposta risulta giustificata dall'esigenza di distinguere, nel campo reale, i due casi $h > 0$, $h < 0$. Nel caso particolare $\alpha = n$, poichè $\pi(x, n, h) = 1$, le due espressioni di $x^{n|h}$ per $h > 0$ e $h < 0$ coincidono. Ciò, del resto, si constata in modo ovvio anche direttamente, osservando che il prodotto (1.5) [12] si può scrivere, moltiplicando e dividendo per h^n, nella forma

$$x^{n|h} = \frac{x}{h}\left(\frac{x}{h}-1\right)\ \dots\ \left(\frac{x}{h}-n+1\right)\cdot h^{n} = \frac{\dfrac{x}{h}\,!}{\left(\dfrac{x}{h}-n\right)!}\ h^{n}, \tag{4.6$'$}$$

---

[10] Cfr. loc. cit. in [5], p. 298, (15).

[11] Cfr. loc. cit. in [5], p. 299.

[12] I prodotti (1.8) hanno, nel Calcolo delle differenze finite, una parte analoga a quella delle potenze x^n nel Calcolo infinitesimale, in quanto risulta:

$$D_{x,h}\, x^{n|h} = n\, x^{(n-1)|h},$$

in analogia con $D_x\, x^n = n\, x^{n-1}$.

o anche, moltiplicando e dividendo per $(-h)^n$, nella forma:

$$(4.6)'' \quad x^{n|h} = -\frac{x}{h}\left(-\frac{x}{h}+1\right)\dots\left(-\frac{x}{h}+n-1\right)(-h^n) = \frac{\left(-\frac{x}{h}+n-1\right)!}{\left(-\frac{x}{h}-1\right)!}(-h)^n.$$

4.2. - Sia $x>0$, $h>0$: calcoliamo il limite di (1.7)$'$ per $h\to 0+$. Risulta [13]

$$x^{\alpha|h} \sim \sqrt{\frac{x}{x-\alpha h}}\left(1-\alpha\frac{h}{x}\right)^{-x/h}(x-\alpha h)^\alpha e^{-\alpha},$$

e pertanto

$$(4.7) \qquad \lim_{h\to 0+} x^{\alpha|h} = x^\alpha .$$

Analogamente, per $x>0$, $h<0$, calcoliamo il limite di (1.7)$''$ per $h\to 0-$. Posto, per semplicità, $u=-\frac{x}{h}-1$ ($u\to+\infty$ per $h\to 0-$), risulta

$$x^{\alpha|h} \sim \sqrt{1+\frac{\alpha}{u}}\left(1+\frac{\alpha}{u}\right)^u (u+\alpha)^\alpha e^{-\alpha}(-h)^\alpha,$$

e poichè

$$(u+\alpha)^\alpha\,(-h)^\alpha = (x+h-\alpha h)^\alpha,$$

si ha

$$(4.8) \qquad \lim_{h\to 0-} x^{\alpha|h} = x^\alpha .$$

Da (4.7) e (4.8) segue

$$(4.9) \qquad \lim_{h\to 0} x^{\alpha|h} = x^\alpha \qquad (x>0).$$

---

[13] Si veda, ad es., E. JANKE and F. EMDE, *Tables of Functions*, IV ed., Dover Publ., New York 1945, p. 10, d):

$$z\gg 1, \qquad z! = \sqrt{2\pi z}\; z^z e^{-z} H(z),$$

dove

$$H(z) = 1 + o(1) \qquad \text{per} \qquad z\to+\infty .$$

Sommario.

Si riprendono alcune funzioni elementari notevoli del Calcolo delle differenze finite, recentemente già considerate da altri AA., e se ne modificano le definizioni per ottenere un parallelismo più aderente alle analoghe funzioni del Calcolo infinitesimale.

Summary.

We consider some elementary functions of Calculus of Finite Differences, which have recently been studied by others Authors; we also modify the definitions to obtain a more adherent parallelism to the analogous functions of Infinitesimal Calculus.

* * *